

2022 年中科大创新班模拟考试

数学四

考试时间： 110 分钟 满分： 100 分

一. 填空（每小题 6 分，共 30 分）

- $$\begin{cases} a+b-2 \geq 0, \\ b-a-1 \leq 0, \\ a \leq 1, \end{cases}$$
1. 若实数 a, b 满足条件 $\begin{cases} a+b-2 \geq 0, \\ b-a-1 \leq 0, \\ a \leq 1, \end{cases}$ 则 $\frac{a+2b}{2a+b}$ 的最大值等于_____。
2. 函数 $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x - 2 \sin 3x$ 的最大值为_____。
3. 对于 $m, n \in \mathbb{Z}^+$ ，若 $(\sqrt{3}+i)^m = (1-i)^n$ ，则 $|n-m|$ 的最小值是_____。
4. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， M, N 分别在 BB_1, B_1C_1 上， $2MB = MB_1, NB_1 = NC_1$ ，由 A, M, N 确定的平面将正方体分为两个部分，体积分别为 $V_1, V_2 (V_1 > V_2)$ ，则 $\frac{V_1}{V_2} =$ _____。
5. 在平面直角坐标系上，甲由点 $A(0,0)$ 移动到点 $B(4,4)$ ，乙从点 $C(2,0)$ 移动到点 $D(6,4)$ ，甲乙二人每步均只能向右或向上移动一个单位距离，则甲乙二人的行走路线没有公共点的概率为_____。

二. (15 分) 求所有的正整数数列 $\{a_n\} (n \geq 1)$ ，满足 $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}a_{n+3} - 200$ 。

三. (15 分) 求满足下列条件的正整数数对 (x, y) ： $(x+y+1) \mid 2xy, (x+y-1) \mid (x^2+y^2-1)$ 。

四. (20 分) 如图， F_1, F_2 是双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 的左、右焦点，一条直线与双曲线的右支相切，且分别交两条渐近线于 A, B ，又设 O 为坐标原点，求证：

(1) $|OA| \cdot |OB| = |OF_1|^2$ ；

(2) F_1, F_2, A, B 四点在同一个圆上。

五. (20 分) 考虑多项式 $P(x) = (x+d_1)(x+d_2) \cdots (x+d_9)$ ，其中， d_1, d_2, \dots, d_9 是九个不同的整数。证

明：存在整数 N ，使得对于所有的整数 $x \geq N$ ，均有 $P(x)$ 能被一个大于 20 的素数整除。