质 心，刚 体，振动与波

理论部分 整理人：张硕

一. 质心

1. 质心运动定理　　应用：

$\vec{F}_{合外} = m_c \vec{a}$　$(m_c = m)$.

$\Longrightarrow dW_{合外-c} = dE_{kc}$

积分形式：$W_{合外} = \Delta E_{kc}$，$E_k = \frac{1}{2} m_c V_c^2$

2. 质点系动力学量的分解（相对任何参考系）

动量：$\vec{p} = \vec{p}_c$

动能：$E_k = E_{kc} + E_k'$（E_k'：质点系相对质心的动能）

角动量：$\vec{L} = \vec{L}_c + \vec{L}'$（$\vec{L}'$：质点系相对质心角动量）.

3. 质心(参考)系：随质心平动的参考系

若 $\vec{F}_{合外} = 0$ 则 $\vec{a}_c = 0$，质心系为惯性系

若 $\vec{F}_{合外} \neq 0$ 则 $\vec{a}_c \neq 0$，质心系为平动加速非惯性系

质点系在(自己的)质心(参考)系中

引入平移惯性力，质点为 m_i，则有

$\vec{F}_i = m_i(-\vec{a}_c)$　$\begin{cases} \vec{a}_c = 0 \\ \vec{a}_c \neq 0 \end{cases}$

4. 质心系中质点系的动力学定理

(1) 动量定理 $\vec{p} = 0$

(2) 动能定理

$W_{惯} + W_{内} + W_{外} = \Delta E_k$.

$W_{惯} = 0$

因为选取质心作为参考系，自然质心无位移，故惯性力不做功。

(3) 角动量定理

$\vec{M}_{惯} + \vec{M}_{外} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

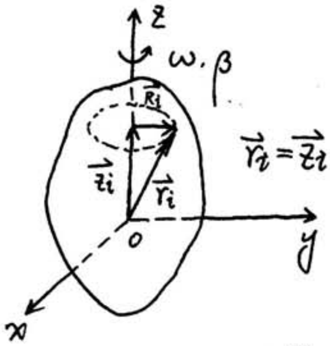
$\vec{M}_{惯} = 0$　质心系参考点可任选.

但若选取质心作为参考点，$\vec{M}_{惯} = 0$.

否则 $\vec{M}_{惯} \neq 0$.

二. 刚体

1. 刚体的定轴转动



$\vec{r_i} = \vec{z_i} + \vec{R_i}$

(1) 运动学内容

ω, β；$V_i = \omega R_i$

$a_{i法} = \omega^2 R_i$

$a_{i切} = \beta R_i$

(2) 动力学内容：

△ 动量 $\vec{p} = \vec{p}_c$；动能

$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i R_i^2 \omega^2$

(引入I) $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$．$I = \sum m_i R_i^2$.

(比较)物体平动动能 $E_k = \frac{1}{2} m V^2$

$\begin{cases} m：平动惯性质量 \\ I：转动惯性质量 \longrightarrow 转动惯量 \end{cases}$

△ 势能 $\begin{cases} 内势能：刚体无. \\ 外势能. \end{cases}$

△ 角动量 $\vec{L} = \sum \vec{r_i} \times m_i \vec{V_i}$

$= \underbrace{\sum \vec{R_i} \times m_i \vec{V_i}}_{\vec{L}_{xy}} + \underbrace{\sum \vec{z_i} \times m_i \vec{V_i}}_{\vec{L}_z}$

角动量分量 $L_z = \sum R_i m_i V_i = (\sum m_i R_i^2)\omega$.

$L_z = I\omega$.

△ 物体平动动量 $p = mV$.

动量定理 $\Longrightarrow$ 质心运动定理.

$\vec{F}_{合外} = m \vec{a}_c$

△ 动能定理.

$W_{内} + W_{外} = \Delta E_k$．　$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$

$W_{内} = 0$

角动量定理，转轴分量式

$$M_{外z}=\frac{dL_z}{dt}=\frac{d(I\omega)}{dt}=I\beta.$$

↳ 转动定理：$M_{外z}=I\beta$.

三、简谐振动：$F_x=-kx$.

$$\| $$

$$ma_x=m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=m\ddot{x}$$

$\Rightarrow$ $\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$ 动力学方程（微分方程）.

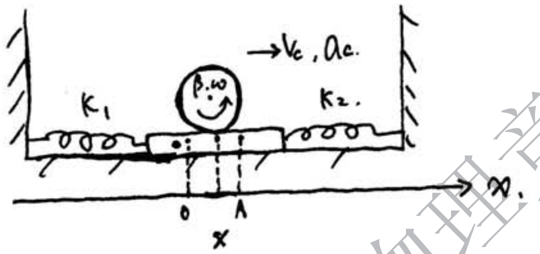
$\Rightarrow$ $x=A\cdot\cos(\omega t+\varphi)$. $\omega=\sqrt{k/m}$

$\Rightarrow$ $\ddot{x}+\omega^2x=0$.

△ 牛顿第二定律（微分式） $\begin{cases}\text{动量定理 积分式}\\ \text{能量定理 积分式}\end{cases}$

例5. 质量为m、半径为r的匀质圆盘竖直放在质量为M的平板上，平板两端分别连接弹簧k_1, k_2，弹簧另一端固定在墙上。整个系统处于平衡状态，现将木板右移长度A，并释放。

求：木板中心点的运动方程.（假设圆盘与木板间只发生纯滚动，并且二者不分离.）



解：以平板质心平衡时所处位置为坐标原点O，在水平桌面上设置右向x坐标，平板质心坐标记为x，则有：

M：$M\ddot{x}=-f-(k_1+k_2)x$ ① f为摩擦力

m：$f=ma_c$ ② $fr=I_c\beta=\frac{1}{2}mr^2\beta$ ③

由②③得

$f=\frac{1}{2}m\beta r$ ④ $a_c=\frac{1}{2}\beta r$ ⑤

运动关联：$a_c+\beta r=\ddot{x}$ ⑥

由①④⑤⑥得

$(M+\frac{1}{3}m)\ddot{x}=-(k_1+k_2)x$

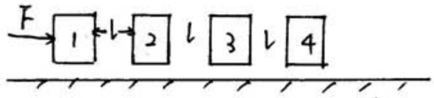
可知质心作简谐振动.

$$\omega=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{M+\frac{m}{3}}}=\sqrt{\frac{3(k_1+k_2)}{3M+m}}.$$

可得质心振动方程

$$x=A\cdot\cos\sqrt{\frac{3(k_1+k_2)}{3M+m}}\cdot t.$$

例1.



每小物体质量为m 摩擦因数为μ、间距L（木块大小忽略）
恒力F推动1.2.3，碰撞均为完全非弹性，1.2.3.恰好在4处停止. 求恒力F

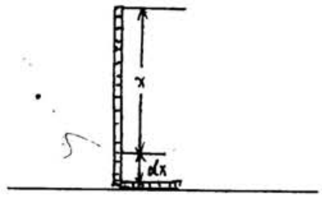
解 取{1.2.3}为一系统
根据质心运动定理

$$F\cdot 2L = \mu mg\times\frac{L}{3} + 2\mu mg\times\frac{2}{3}L + 3\mu mg\times L$$

$$\therefore F = \frac{7}{3}\mu mg$$

上式中 $\frac{L}{3}$ 表示 物块1从1位置到2位置 所过程中质心的位移 $\frac{2}{3}L$、L同理

例2.



长为L质量为m匀质细绳团放在地上，以竖直向上恒力拉绳子一端，当绳的另一端刚好离开地面时速度为v 求F

解：根据质心运动定理

$$F\cdot\frac{L}{2} - \int_0^L dw = \Delta E_k$$

式中dw指每上升dx距离重力做的功 $\Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2$

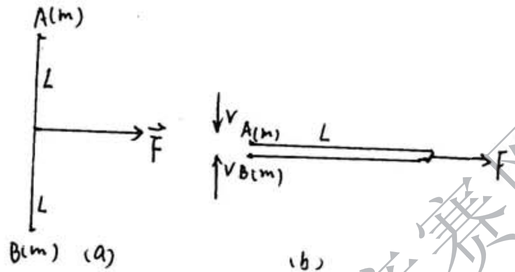
$$dw = E_p' - E_p = \frac{x+dx}{L}\cdot\frac{x+dx}{2}\times\frac{x+dx}{L}\cdot mg - \frac{x}{L}\times\frac{x}{2}\times\frac{x}{L}mg$$

式中 E_p'、E_p 均为质心位置的重力势能

$$dw = \frac{(x+dx)^3 - x^3}{2L^2}\cdot mg = \frac{x^2\,dx}{L^2}\cdot mg$$

$$\therefore F\cdot\frac{L}{2} - \frac{1}{3}mgL = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \therefore F = \frac{2}{3}mg + \frac{mv^2}{L}$$

例3.



一轻绳两端系着两个小球A、B 质量均为m.
一条水平力F向右拉绳的中心. 当A、B球如(b)图所示状态时 求A、B在竖直方向上的速度.

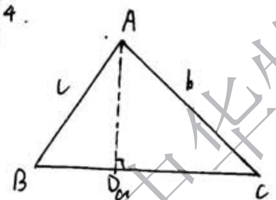
解：选择质心系为参考系 质点始终位于线段A.B上.

$W_{内} + W_{外} = \Delta E_k$

内力为接触力 ∴ $W_{内}=0$ ∴ $W_{外} = \Delta E_k$

$F\cdot L = \frac{1}{2}mv^2\times 2$ ∴ $v = \sqrt{\frac{FL}{m}}$

例4.



用力学方法证明一个锐角三角形三个高线共点.

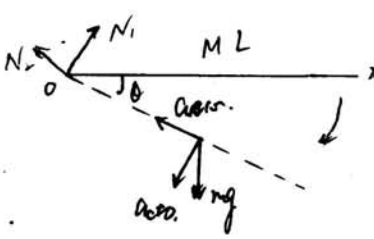
解 设 $m_A = \lambda a\cos B\cos C$ $m_B = \lambda\cdot b\cos C\cos A$ $m_C = \lambda\cdot c\cdot\cos A\cos B$

式中λ为假设的质量线密度 为常量

B.C的质心 $m_B\cdot\overline{BD} = m_C\cdot\overline{CD}$ 其中 $\overline{BD} = c\cdot\cos B$ $\overline{CD} = b\cdot\cos C$

∴D点为BC的质心. ∴A.B.C三点质心在AD上.
同理质心必在AC、AB边的高上
由于系统质心唯一. 故三角形三条边上的高共点

例5



一质量为M 长度为L 从水平位置自由释放杆 以O为固定转轴. 当杆转过θ角度时. 求固定点O给细杆的作用力 N_1、N_2

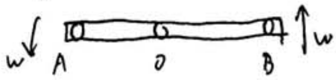
解. 利用能量守恒. $\Delta E_p = E_k$ $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow$ 得到ω

以O为转轴 $M = I\beta \Rightarrow$ 求出β.

∵ $a_{c切} = \beta\cdot\frac{L}{2}$ $a_{c向} = \omega^2\times\frac{L}{2}$

在垂直杆和沿杆方向利用牛II定律
从而得出 N_1、N_2

例6.



匀质细杆AOB上: A·O·B有三个小孔. 先让杆在光滑水平面以O孔以角速度ω_0作顺时针旋转, 将一细棍插入A孔, 稳定转动后, 拔出细棍插入B孔中. 同理再插入O孔中. 求杆转动的最终角速度

解: 开始时 由于 $L_A = L_C + L_B$相对于C

∴ $L_A = I_0\omega_0 + mv_0\times\frac{L}{2}$ ∵ $v_0=0$ ∴ $L_A = I_0\omega_0$

∵ 插入细杆后. 相对A角动量守恒. $L_A = I_A\omega_A$

上两式中 $I_0=\frac{1}{12}ml^2$. $I_A=\frac{1}{3}ml^2$ ∴ $\omega_A=\frac{1}{4}\omega_0$.

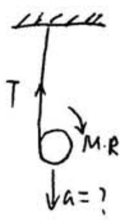
将细棍拔出. 一瞬间 相对于B点 角动量为

$$\left.\begin{aligned} L_B &= I_0\omega_A - mv_{0A}\cdot\frac{L}{2} \\ v_{0A} &= \omega_A\cdot\frac{L}{2}=\frac{1}{8}\omega_0 L \end{aligned}\right\}\ \therefore L_B=-\frac{1}{24}ml^2\omega_0.$$

$$\because \left\{\begin{aligned} L_B &= I_B\omega_B \\ L_B &= -\frac{1}{24}ml^2\omega_0 \end{aligned}\right. \Rightarrow \omega_B=-\frac{1}{8}\omega_0$$ 式中负号代表与原角速度方向相反.

同理. 求得最后一次 $\omega=-\frac{1}{8}\omega_0$.

例7



一匀质滑轮. 沿细绳滑滚下. 无相对滑动 求向下加速度a=?

解: 设绳子中张力为T

$Mg-T=Ma$. (对M运用牛II定律) ①

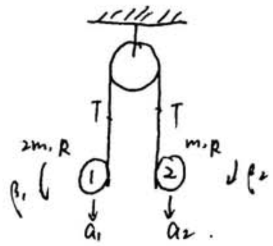
在质心参考系中用转动定理.

$T\cdot R = I\cdot\beta$. ②

运动关系 $\alpha=\beta R$ ③

①②③ 联立求解

例8



绳子与大滑轮之间无摩擦. 质量. 半径分别为 2m, R 和 m, R 的圆盘沿绳滚下. 求1,2 两盘的加速度

$$\left.\begin{aligned} 2mg-T&=2ma_1 \\ mg-T&=ma_2 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} g&=2a_1-a_2 \quad ① \\ 3mg-2T&=2ma_1+ma_2 \quad ④ \end{aligned}\right.$$

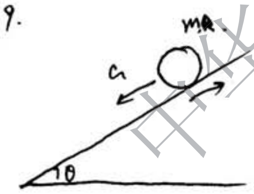
$TR=I_1\beta_1$ $TR=I_2\beta_2$. ②

∵ 根据运动关联. $\omega_1 R+\omega_2 R=v_1+v_2$ 两边对时间求导 得到

$\beta_1 R+\beta_2 R=a_1+a_2$ ③

①②③④ 联立 求出 $a_1=\frac{7}{9}g$ $a_2=\frac{5}{9}g$

例9.



一球体质量为m. 半径为R 在粗糙 滑面上发生纯滚动 求加速度a.

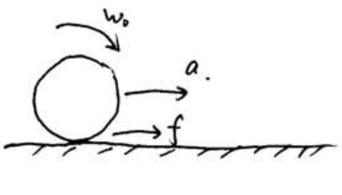
牛II定律 $mg\sin\theta - f = ma$

质心参考系转动定理 $f\cdot R = I_C\beta$.

运动关联 $\beta\cdot R=a$

联立求解

例10.



匀质圆环. 质量为m. 半径R. $I_c=mR^2$ 水平地面的摩擦因数为u.

求小球最终的平动速度V.

解. 开始时 由于角速度ω_0过大. ∴ 接触点与地面之间有滑动摩擦力

$$\therefore \left\{\begin{aligned} fR &= I_c\beta \\ \omega &= \omega_0-\beta t = \omega_0-\frac{ug}{R}\cdot t \end{aligned}\right.$$

圆环加速度 $a=\frac{f}{m}=ug$

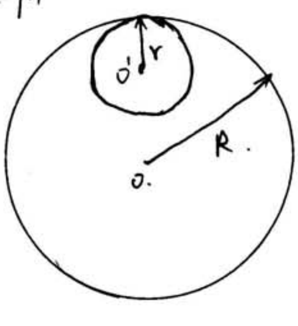
∴ 圆环在t时刻速度为ugt

当 $\omega R=V$时. 环与地接触点速度为0. f消失

∴ $(\omega_0-\frac{ug}{R}t)R = ugt$ ∴ $\omega_0 R - ugt = ugt$ ∴ $ugt=\frac{1}{2}\omega_0 R$

∴ $V=\frac{1}{2}\omega_0 R$

例11



在光滑水平地面上，r为固定的圆盘，大圆是可以运动的圆薄环，两者接触部分有摩擦，摩擦因数为μ。t=0时，圆环平动速度 V_0，大圆结果圆环在小环周边施旋转起来。

(1) 圆环达到稳定运动状态时环心速度 V_e 是多少。

(2) 圆环刚达到稳定运动状态时刻 t_1

解 (1) 环心O将始终绕着盘心O'作(R−r)的圆周运动，接触处盘给的径向支持力

$\vec{f}=\mu N$

f 使环心减速 又使环绕环心加速运动 f 消失后运动稳定。

环心切向方程 $f=ma=-m\frac{dv}{dt}$

环的转动方程 $fR=I_0\beta=mR^2\frac{d\omega}{dt}$

联立并且积分 $\int_0^\omega R\,d\omega=-\int_{V_0}^{V}dv$ ∴ $R\omega=V_0-V$

当ω增加到 $\omega_e=\frac{V_e}{R}$ 时 $R\omega_e=V_0-V_e$ ∴ $V_e=\frac{1}{2}V_0$

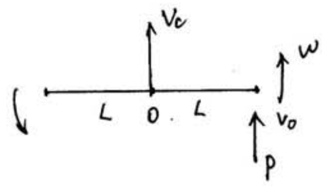
(2) $N=mV^2/R-r$ $\mu N=f=-m\frac{dv}{dt}$

∴ $\mu V^2/R-r=-dv/dt$

∴ $-\int_{V_0}^{V_e}\frac{dv}{V^2}=\int_0^{t_e}\frac{\mu}{R-r}dt$ ∴ $\frac{1}{V_e}-\frac{1}{V_0}=\frac{\mu}{R-r}t_e$ $(V_e=V_0/2)$

∴ $t_e=(R-r)/\mu V_0$.

例12



碰撞无动能损失，杆的质量为m，小球的速度 V_0

求 碰撞后 杆的旋转角速度ω，p碰撞后速度 V_p' 杆质心的速度 V_c 是多少？

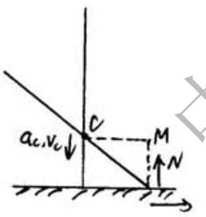
$$\begin{cases} MV_c+mV_p=mV_0 & \text{动量守恒} \\ \frac{1}{2}mV_p^2+\frac{1}{2}MV_c^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}mV_0^2 & \text{能量守恒} \\ I\omega+mV_pL=mV_0L & \text{以O点为转轴的角动量守恒} \end{cases}$$

延伸：如果小球和细杆发生第二次碰撞 M=γm 求γ

上题中求出v和V_c后 只需满足 $V=V_c$ 就会发生第二次碰撞

例13

匀质细杆直立在光滑水平地面上，从静止状态释放后，因不稳定而滑行地倾倒，如图5-43中虚线所示。试问，在细杆全部着地前，它的下端是否会跳离地面



解 由于细杆在水平方向上不受外力 ∴ 杆的质心只能在竖直方向运动

杆下端只沿水平面水平方向运动

∴ 可以等效地看成 以MC为斜边的直角板靠在墙下滑。

$V_c=\omega\cdot(\frac{L}{2}\sin\theta)$

∴ $mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mV_c^2+\frac{1}{2}I_c\omega^2$ $I_c=\frac{1}{12}mL^2$ (能量守恒)

∴ $V_c^2=[3gL(1-\cos\theta)\sin^2\theta/(1+3\sin^2\theta)]$

两边对时间t求导得

$2V_ca_c=\frac{d}{d\theta}[3gL(1-\cos\theta)\sin^2\theta/(1+3\sin^2\theta)]\omega$

∴ $a_c=3g(\sin^2\theta+3\sin^4\theta+2\cos\theta-2\cos^2\theta)(1+3\sin^2\theta)^2$

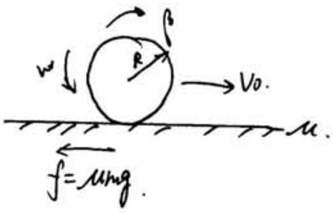
∴ $N=mg-ma_c=\frac{3\cos^2\theta-6\cos\theta+4}{(1+3\sin^2\theta)^2}mg$

若N>0，

则 $3\cos^2\theta-6\cos\theta+4>0$ 此不等式显然成立。

∴ 细杆不会跳离地面

例14 在水平地面上用手按动半径为R的乒乓球，使其获得向右的初速度v_0和逆时针方向转动角速度ω_0，如图5-42所示.乒乓球可处理成匀质薄球壳，球壳与地面间的摩擦因数为常量μ.试求乒乓球最后达到的稳定运动状态.



解：根据质心运动定理和质心轴转动定理

$f=ma$. $fR=I\beta$ $f=\mu mg$ $I=\frac{2}{3}mR^2$

∴ $a=\mu g$ $\beta=3\mu g/2R$.

分三种情况讨论

(1) 经某段时间记为t_1 同时达到 $v=0$. $\omega=0$即

$v_0-\mu g t_1=0$. $\omega_0-(3\mu g/2R)t_1=0$.

∴ $v_0=\frac{2}{3}\omega_0 R$

此后乒乓球处于静止状态

(2) 经某时间仍记为t_1 仍有$v>0$. 但恰有$\omega=0$.

∴ $v_0-\mu g t_1>0$ $\omega_0-(3\mu g/2R)t_1=0$.

∴ $v_0>\frac{2}{3}\omega_0 R$.

该某状态为$v_1=v_0-\frac{2}{3}\omega_0 R$ $\omega=0$.

此后摩擦力仍朝左. 平动加速度和角加速度相同 再经过时间t,右行速度v_2和顺时针方向角速度ω_2分别为

$v_2=v_1-at=v_1-\mu g t$ $\omega_2=\beta t=(3\mu g/2R)t$

设$t=t_2$时 恰有 $v_2=\omega_2 R$

此时摩擦力随即消失, 进入纯滚动状态.

∴ $t_2=2v_1/5\mu g$ $v_2=v_1-\mu g t_2=\frac{3}{5}(v_0-\frac{2}{3}\omega_0 R)$ ∴ $\omega_2=v_2/R=\frac{3}{5R}(v_0-\frac{2}{3}\omega_0 R)$

(3) 经某时间t_1 恰有$v=0$ 但仍有$\omega>0$:

$v_0-\mu g t_1=0$ $\omega_0-(3\mu g/2R)t_1>0$. ∴ $v_0<\frac{2}{3}\omega_0 R$

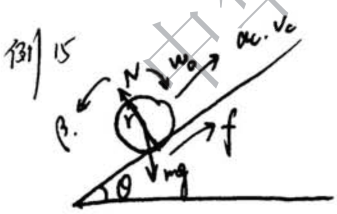
末状态为$v_1=0$ $\omega_1=\omega_0-\frac{3v_0}{2R}$

此后摩擦力仍向左. 平动加速度和转动角加速度相同. 这将使乒乓球进入朝左加速平动,且逆时针方向继续减速转动状态. 经时间t. 左行速度v_2和逆时针方向角速度ω_2分别为 $v_2=at=\mu g t$ $\omega_2=\omega_1-(3\mu g/2R)t_1$

当$t=t_2$时 恰有 $v_2=\omega_2 R$ 可得 $t_2=2\omega_1 R/5\mu g$ $v_1=\mu g t_1=\frac{2}{5}(\omega_0 R-\frac{3}{2}v_0)$

$\omega_2=v_2/R=\frac{2}{5R}(\omega_0 R-\frac{3}{2}v_0)$

例15



斜面夹角为θ. 一球半径为r. 角速度为ω_0. 球与斜面间摩擦为μ. ($\mu>\tan\theta$)

求小球上升的最大高度.

解. 分两个阶段讨论小球的爬高.

第一阶段: 从开始到小球在斜面上刚达到纯滚动状态时. 此阶段斜面摩擦力沿斜面向上. 是滑动摩擦力

如图, 对图示参量, 可列下列方程

$N=mg\cos\theta$ $f=\mu N$ $f-mg\sin\theta=ma_c$ $v_0=a_c t$

$f\cdot r=I_c\beta$. $I_c=\frac{2}{5}mr^2$ $\omega=\omega_0-\beta t$

解得 $a_c=(\mu\cos\theta-\sin\theta)g$ $v_c=(\mu\cos\theta-\sin\theta)gt$

$\beta=5\mu g\cos\theta/2r$ $\omega=\omega_0-(5\mu g\cos\theta/2r)\cdot t$

刚达到纯滚动时有 $v_{c1}=\omega r$

该时刻与时间球心速度可解得为 $t_1 = 2\omega_0 r/(7\mu\cos\theta-2\sin\theta)g$ $v_{c1}=2\omega_0 r(\mu\cos\theta-\sin\theta)/(7\mu\cos\theta-2\sin\theta)$

第二阶段. 从刚进入纯滚动状态到小球中心沿斜面向上的速度减为零。此过程中，斜面对小球若无摩擦或有向下的静摩擦力或滑动摩擦力 v_c 均会减小。ω 或不变，或增大。球与斜面触点相对斜面都会有向下滑动，应受向上滑动摩擦力，有矛盾，不可取。此过程中，斜面若对小球仍有向上的滑动摩擦力，则同第一阶段，v_c 继续增大，ω 继续减小，小球与斜面接触点相对斜面向上滑动，应受向下的滑动摩擦力，仍有矛盾也不可取。

综上所述，此过程中斜面对小球必有向上的静摩擦力 f'。此力一方面使 ω 继续减小，同时与重力分力联合使 v_c 减小，两者配合，保证小球与斜面接触点速度为0 可见)，第二阶段必定为小球纯滚动降速阶段，直到 v_c、ω 均降到0。

可列 $mg\sin\theta - f = ma_c'$ $f'r = I_c\beta$. $a_c'=\beta r$ $\therefore a_c' = \frac{5}{7}g\sin\theta$

还可得 $f'=\frac{2}{7}mg\sin\theta < mg\sin\theta < \mu mg\cos\theta$ $\therefore f'<f$.

$\therefore$ 可阐 f' 确为静摩擦力.

第一阶段小球上爬升路程为 $l_1 = v_{c1}^2/2a_c = 2\omega_0^2r^2(\mu\cos\theta-\sin\theta)/(7\mu\cos\theta-2\sin\theta)^2 g$.

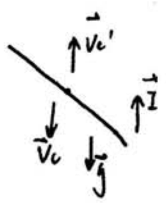
第二阶段小球爬升路程为 $l_2 = v_{c1}^2/2a_c' = 14\omega_0^2r^2(\mu\cos\theta-\sin\theta)^2/5g\sin\theta(7\mu\cos\theta-2\sin\theta)^2$

爬的总高度 $h=(l_1+l_2)\sin\theta = 2\omega_0^2r^2(\mu\cos\theta-\sin\theta)/5(7\mu\cos\theta-2\sin\theta)g$.

例15

长为 l 的细杆，B与地面高度为 h 夹角为60° 掉下，B点发生弹性碰撞，碰后弹起，质心该速度时恰好细杆转过60° 求 h 高度.

解：设B端受到地面的冲量为 $I_冲$ 杆的旋转角速度为 ω



取向下为正方向.

$$\begin{cases} -I_冲 = -mv_c' - mv_c & ① \\ I_冲 \times \frac{l}{2} = I\omega & ② \\ \frac12 mv_c'^2+\frac12 I\omega^2 = \frac12 mv_c^2 & ③ \\ \omega t = \frac{\pi}{3} \quad v_c = gt & ④ \\ I=\frac{1}{12}ml^2 \end{cases}$$

由①②可得 $v_c'+v_c = \frac{l\omega}{6}$ ⑤

代入③ $\frac12 m(v_c'+v_c)(v_c'-v_c) = -\frac{1}{24}ml^2\omega^2$

$\therefore v_c'-v_c = -\frac{l\omega}{2}$ ⑥

联立⑤⑥解 $v_c'=-\frac16 l\omega$

$v_c=\frac13 l\omega$.

由④可得 $v_c=\frac{\pi g}{3\omega}$

$\therefore$ 忽略 ω 的方向性 $\omega=\sqrt{\frac{\pi g}{l}}$.

$v_c'=-\frac16\sqrt{\pi gl}$

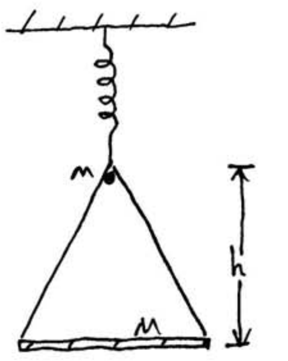
$v_c=\frac13\sqrt{\pi gl}$

$\because v_c^2=2gh$ $\therefore h=\frac{\pi l}{9}$

延伸：细杆弹起后，以 ω 角速度绕质心旋转，当质心速度减为0后又落下，当B室接触地面后，是B与地面发生弹性碰撞的逆过程，角速度减为0，以后往复运动.

简谐振动

例1. 如图所示，劲度系数为k的轻弹簧竖直悬挂着，它的下端连接质量为M的平板，平板上方h处有一质量也是M的小物块。今使系统从弹簧处于自由长度状态，平板和小物块静止开始释放，当平板降落到受力平衡位置时，小物块恰好追上平板并与其粘连，试求h以及小物块与平板粘连后的瞬间向下运动的速度u。再问如果连接在平板两端是轻绳，那么小物块与平板粘连后能否形成纯粹的简谐振动（即在简谐振动过程中始终不会有其他形式的运动）？



解：粘连前平板作简谐振动，下降高度为

$$\Delta l = Mg/k.$$

振动角频率和周期分别为

$$\omega = \sqrt{k/M},\quad T = 2\pi\sqrt{M/k}$$

下降时间便是

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{k}}.$$

小物块在此时间内下落高度为

$$h + \Delta l = \frac{1}{2}gt^2,$$ 即得

$$h = \left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right)\frac{M}{k}g.$$

粘连前平板和小物块的末速度分别为

$$v_{板} = \omega\Delta l = \sqrt{\frac{M}{k}}g,\quad v_{物} = gt = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M}{k}}g.$$

粘连后瞬间两者下落速度同为

$$u = \frac{1}{2}(v_{板} + v_{物}) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{M}{k}}g.$$

粘连后，系统平衡位置下移

$$\Delta l' = Mg/k$$

以此下移位置为原点，设置向下的y坐标，再将粘连的时刻定为$t=0$，便有

$$t=0时,\quad y_0 = -\Delta l',\ v_0 = u.$$

考虑到新的振动角频率为

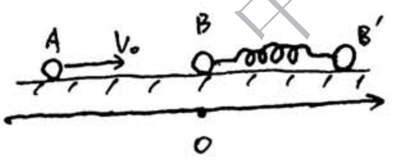
$$\omega' = \sqrt{k/2M}$$

即得新振幅为

$$A = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega'^2}} = \sqrt{1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)^2}\,\frac{M}{k}g = 2.07Mg/k$$

纯粹的简谐振动要求振幅A不可超过粘连体处于平衡位置时的弹簧的伸长量$2Mg/k$，即要求$A \le 2Mg/k$，但事实上$A = 2.07Mg/k > 2Mg/k$，故不能形成纯粹的简谐振动。

例2. 小球A、B、B′在光滑水平面上沿一直线静止放置，A、B质量不同，B、B′质量相同，B与B′间有一轻弹簧连接，弹簧处于自由长度状态。让A对准B匀速运动，弹性碰撞后，接着又可观察到A、B两球间发生一次相遇不相碰事件，试求A质量与B质量的比值r。（给出3位数字）



解：将B、B′质量同记为m，A质量便是rm，再将A初速记为v_0，A、B相碰后，A速度v_A和B速度$v_B(0)$可由方程组

$$rmv_A + mv_B(0) = rmv_0,$$

$$\frac{1}{2}rmv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2(0) = \frac{1}{2}rmv_0^2$$

解得

$$v_A = \frac{r-1}{r+1}v_0,\quad v_B(0) = \frac{2r}{r+1}v_0.$$

按图中设置的x轴，取碰撞时刻$t=0$，而后A的运动可表述为

$$x_A = \frac{r-1}{r+1}v_0 t,\quad v_A = \frac{r-1}{r+1}v_0.$$

碰后，{B，弹簧，B′}系统质心C将作匀速直线运动，速度为

$$v_C = \frac{1}{2}v_B(0) = \frac{r}{r+1}v_0.$$

B沿x轴方向相对C的初速度为

$$v'_B(0) = v_B(0) - v_C = \frac{r}{r+1}v_0.$$

设弹簧劲度系数为k，从B到C一段弹簧的劲度系数便是$k' = 2k$，B相对C所作简谐振动为

$$x'_B = A\cos(\omega t + \varphi),\quad \omega = \sqrt{k'/m} = \sqrt{2k/m}$$

由初条件 $t=0$ 时，$x_B'(0)=0$，$V_B'(0)=\frac{r}{r+1}V_0$

可得振幅和初相位分别是

$$A=\frac{r}{r+1}V_0\sqrt{\frac{m}{2k}},\ \varphi=-\frac{\pi}{2}$$

于是 $x_B'=\frac{r}{r+1}V_0\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right)$

B相对水平面沿x轴方向的运动便是

$$x_B=x_B'+V_ct=\frac{r}{r+1}V_0\left(\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}t+t\right)$$

$$V_B=V_B'+V_c=\frac{r}{r+1}V_0\left(\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t+1\right).$$

某个 t_0 时刻，A.B相遇不相碰的条件是

$$x_A(t_0)=x_B(t_0),\ V_A(t_0)=V_B(t_0)$$

即为 $\frac{r-1}{r+1}V_0t_0=\frac{r}{r+1}V_0\left(\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0+t_0\right)$,

$$\frac{r-1}{r+1}V_0=\frac{r}{r+1}V_0\left(\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0+1\right).$$

两式平方相加以及两式相除后，有

$$\left(-\frac{1}{r}\right)^2+\left(-\frac{t_0}{r}\sqrt{\frac{2k}{m}}\right)^2=1 \text{ ①} \quad \tan\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0=\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0 \left(\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0 \text{ 在第三象限}\right)\text{②}$$

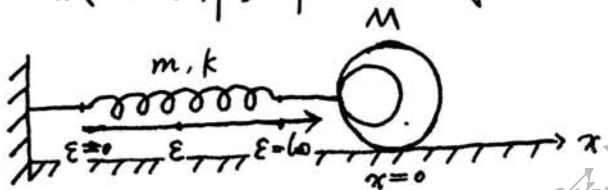
由①得 $\sqrt{\frac{2k}{m}}t_0=\sqrt{r^2-1}$，$\frac{3}{2}\pi>\sqrt{r^2-1}>\pi$

代入②，得 $\tan\sqrt{r^2-1}=\sqrt{r^2-1}$，$\frac{3}{2}\pi>\sqrt{r^2-1}>\pi$.

采用计算器二分逼近法，可得

$$\sqrt{r^2-1}=4.494.\quad r=4.60.$$

例3. 如图所示，劲度系数为k，质量为m的均匀水平弹簧一端固定，另一端连接质量为M的小球，小球与水平地面间无摩擦。让小球偏离平衡位置 $x=0$ 点，自由释放后便可沿图示的x轴振动。在弹簧无形变时，以固定端为原点沿弹簧设置向右的 ε 坐标。设小球振动量为x时，弹簧中原 ε 点的振动量（即相对其初始位置的位移量）为 $u_\varepsilon=(\varepsilon/l_0)x$，式中 l_0 是弹簧自由长度。这一假设也可简单地说成：弹簧各处振动量与小球振动量成正比。作此假设后，试求小球振动周期T。



解：弹簧为原长 l_0 时，在 ε 邻域取 $d\varepsilon$ 段，它的质量为

$$dm=\frac{m}{l_0}d\varepsilon,$$

小球从平衡位置 $x=0$ 点移往到x时，$d\varepsilon$ 弹簧段相对其初始位置的位移量为

$$u_\varepsilon=\frac{\varepsilon}{l_0}x.$$

若小球振动速度为v，则 $d\varepsilon$ 弹簧段的振动速度为 $\frac{du_\varepsilon}{dt}=\frac{\varepsilon}{l_0}\frac{dx}{dt}=\frac{\varepsilon}{l_0}v$.

具有的动能为 $dE_{k,m}=\frac{1}{2}(dm)\left(\frac{du_\varepsilon}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}\frac{m\varepsilon^2}{l_0^3}v^2d\varepsilon$.

整个弹簧的动能便是

$$E_{k,m}=\int_0^{l_0}dE_{k,m}=\frac{1}{6}mV^2$$

系统总能量为

$$E=\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{6}mV^2+\frac{1}{2}kx^2,\quad V=\dot{x}$$

两边对t求导，因为E为守恒量，可得

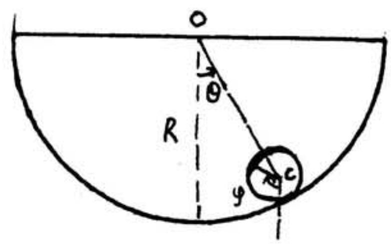
$$\ddot{x}+\frac{k}{M+\frac{m}{3}}x=0.$$

小球振动的角频率和周期分别为：

$$\omega=\sqrt{3k/(3M+m)}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{3M+m}{3k}}$$

例4. 半径为r的匀质小球在半径为 $R>r$ 的固定半球形大碗内壁作纯滚动，往返滚动过程中小球球心C始终在同一竖直平面内。试在滚动过程中为图示θ角位置建立动力学微分方程，并给出小角度近似下滚动周期T的计算式。



解：能量法（可避开小球所受静摩擦力的作用因素）

系统能量守恒方程 $mg(R-r)(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}mV_c^2+\frac{1}{2}I_c\dot{\phi}^2=E_0$

化简为 $g(1-\cos\theta)+\frac{7}{10}(R-r)\dot{\theta}^2=E_0/m$

两边对t求导，即得动力学微分方程 $\ddot{\theta}+\frac{5g}{7(R-r)}\sin\theta=0$.

小角度近似下微分方程简化成 $\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0$，$\omega=\sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$

滚动周期便是

$$T=2\pi/\omega=2\pi\sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}}$$

波.

波：振动状态传播形成的波.

波	线波.	在线上传播	例：绳波.
	面波	在面上传播	例：水波.
	体波	在三维空间传播	例：声波.光波.地震波

波阵面：某时刻振动状态相同点构成的面，这样的面叫波阵面

波前：某时刻最前面的波阵面.

平面波：波阵面为平面的波.

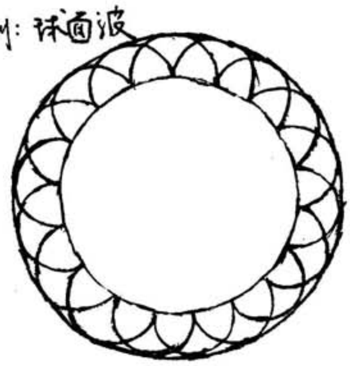
球面波：波阵面为球面的波.

波线：波的传播方向线

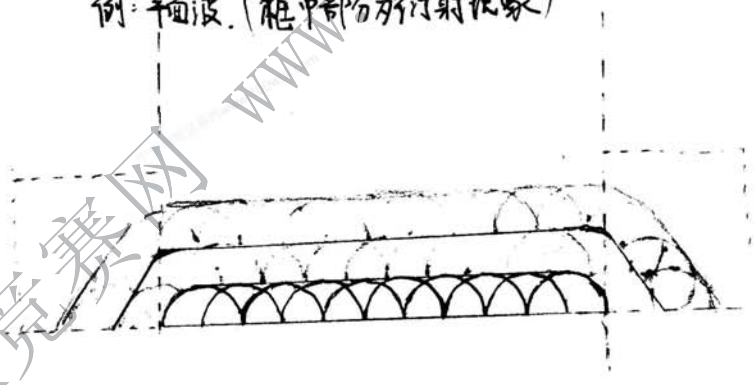
惠更斯原理：

t时刻波前上各点均为子波源，各自发出球面子波，t+Δt时刻，这些子波波阵面的包络面即为该时刻原波的波前.

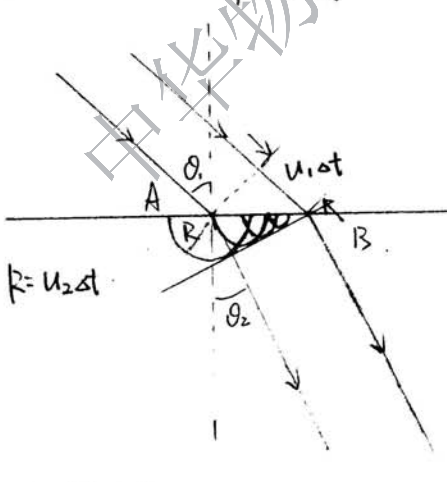
例：球面波

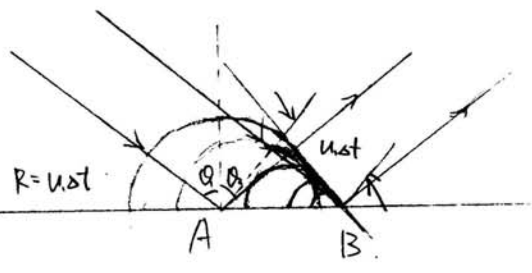


例：平面波（框中部分为衍射现象）



波的反射.折射（设界面不动）





$u_1\Delta t=AB\sin\theta_1$

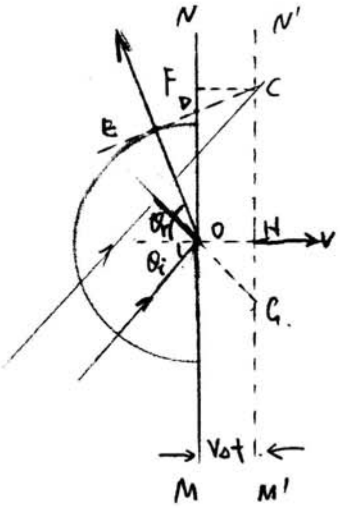
$u_2\Delta t=AB\sin\theta_2$

$\dfrac{u_1}{u_2}=\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} \Rightarrow \dfrac{\sin\theta_2}{u_2}=\dfrac{\sin\theta_1}{u_1}$ 折射定律

$u_1\Delta t=AB\cos\theta_1=AB\cos\theta_2$.

$\theta_1=\theta_2$ 反射定律

光在匀速运动镜面的反射.

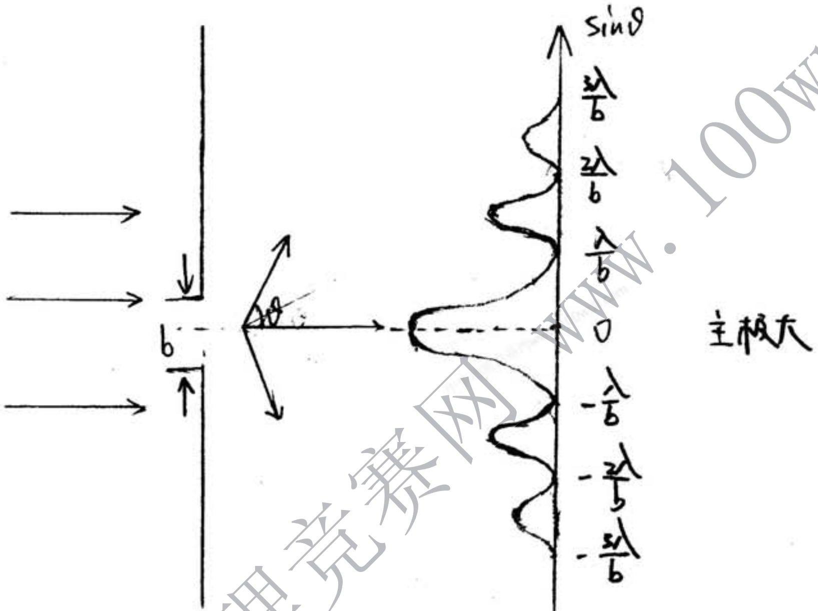


$$\overline{OF} = \overline{OD} + \overline{DF} = \frac{\overline{OE}}{\sin\theta_r} + \overline{CF}\cot\theta_r = \frac{Ct}{\sin\theta_r} + V_0 t\frac{\cos\theta_r}{\sin\theta_r}$$

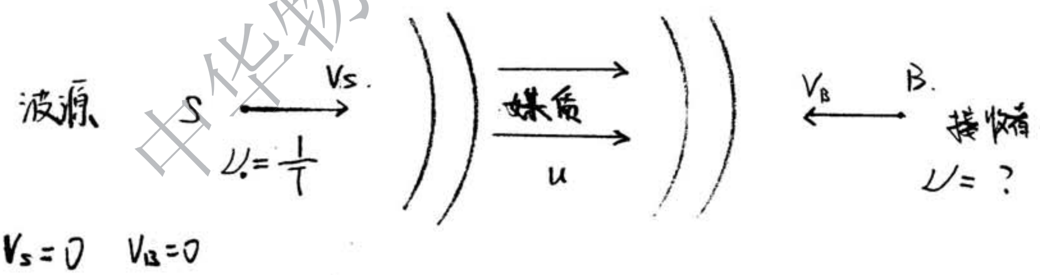
$$\overline{OF} = \overline{CG} - \overline{GH} = \frac{\overline{AC}}{\sin\theta_i} - \overline{OH}\cot\theta_i = \frac{Ct}{\sin\theta_i} - V_0 t\frac{\cos\theta_i}{\sin\theta_i}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin\theta_r}{1+\beta\cos\theta_r} = \frac{\sin\theta_i}{1-\beta\cos\theta_i} \qquad \beta = \frac{v}{c}.$$

单缝衍射



经典多普勒效应



① $V_s = 0 \quad V_B = 0$

B单位时间接收到的波列长度u. 内含全波长个数即为接收到的全振动次数(即为接收频率)

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{u}{uT} = \frac{1}{T} = \nu_0$$

② $V_s = 0 \quad V_B \neq 0$

B朝S运动

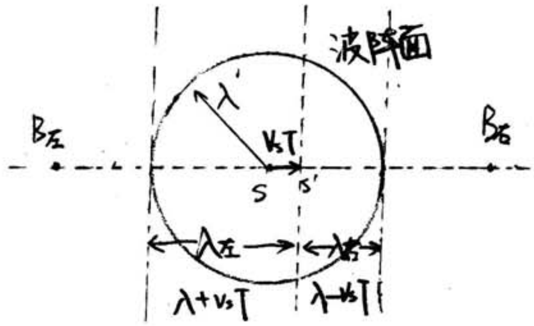
B单位时间接收到的波列长度为 $u+V_B$, 内含全波长个数即为接收到的全振动次数(即为接收频率)

$$\nu = \frac{u+V_B}{\lambda} = \frac{u+V_B}{uT} = \frac{u+V_B}{u}\nu_0 > \nu_0$$

B背离S运动 (设 $V_B < u$) ···

$$\nu = \frac{u-V_B}{\lambda} = \frac{u-V_B}{u}\nu_0 < \nu_0$$

③ $V_S \neq 0$ $V_B = 0$.



对$B_右$:

$$\nu_右 = \frac{u}{\lambda_右} = \frac{u}{u-u_s}\nu_0 > \nu_0$$

对$B_左$:

$$\nu_左 = \frac{u}{\lambda_左} = \frac{u}{u+u_s}\nu_0 < \nu_0$$

经典多普勒效应普适公式（一般情况下）

① $\vec{V_S}=0$ $\vec{V_B}\neq 0$

某时刻B位于P_0 与S相距r_0.

t+dt时刻 B位于P 与S相距r

$$dr = r - r_0 = V_B dt\cos(\varphi_B - d\theta) = V_B\cos\varphi_B dt$$

t时刻过B的波阵面Σ_0.

t+dt时刻过B的波阵面Σ

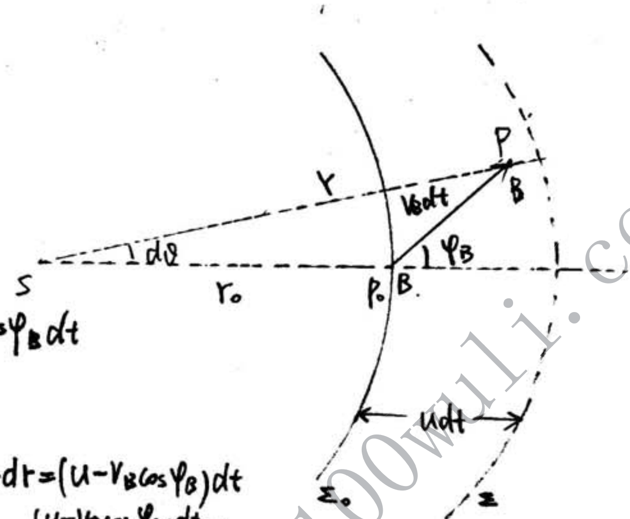
dt时间内扫过B的波长为全振动次数

频率

$$\overline{PQ} = u dt - dr = (u - V_B\cos\varphi_B)dt$$

$$dN = \frac{\overline{PQ}}{\lambda} = \frac{(u-V_B\cos\varphi_B)dt}{u}\nu_0$$

$$\nu = \frac{dN}{dt} = \frac{u-V_B\cos\varphi_B}{u}\nu_0$$



② $\vec{V_S}\neq0$ $\vec{V_B}=0$

设t=0时刻 S经t到B

$$r_0 = ut \Rightarrow t = \frac{r_0}{u}$$

$$t+dt = dt_0 + \frac{r}{u} = dt_0 + \frac{r_0 - V_S dt_0\cos\varphi_S}{u}$$

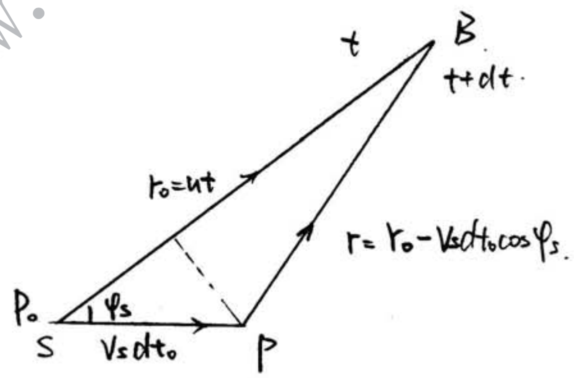
$$= dt_0 + t - \frac{V_S}{u}\cos\varphi_S dt_0$$

$$dt = \left(1-\frac{V_S}{u}\cos\varphi_S\right)dt_0$$

dt_0时间，S发

$$dN = \frac{dt_0}{T} = \nu_0 dt_0$$

$$\nu = \frac{dN}{dt} = \frac{u}{u - V_S\cos\varphi_S}\nu_0$$



③ $\vec{V_S}\neq0$ $\vec{V_B}\neq0$

$$\nu = \frac{u - V_B\cos\varphi_B}{u - V_S\cos\varphi_S}\nu_0$$

公式的解释规定

设u为常量

ν应表示某时刻B的接收频率

V_B为t时刻B的速率

设t时刻接收到的波振动由S在某个t_0时刻发出（$t_0<t$）

V_S为t_0时刻S的速率

从t_0时刻S所在位置到t时刻B所在位置引一矢量$\vec{r}$，则φ_B为t时刻$\vec{V_B}$与$\vec{r}$的夹角，

φ_S为t_0时刻$\vec{V_S}$与$\vec{r}$的夹角。

半波损失

当入射波从波疏介质入射到波密介质时，反射波会有π相位突变，这种现象通常称为半波损失。（个人理解，非常不严密）