

2022 年中科大创新班模拟考试

数学七

考试时间： 110 分钟 满分： 100 分

一. 填空（每小题 6 分，共 30 分）

1. 若 $\log_2(\log_4 x) + \log_4(\log_{16} x) + \log_{16}(\log_2 x) = 0$ ，则 $\log_2(\log_{16} x) + \log_{16}(\log_4 x) + \log_4(\log_2 x) =$ 为_____。

2. 已知异面直线 a 、 b 成 80° ，若过空间顶点 P ，且与 a 、 b 都成 α 角度的平面有 4 个，则 α 的取值范围为_____。

3. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ，设过点 F_2 的直线 l 与双曲线 C 的右支交于 A 、 B 两点，且 $|AF_1| = |F_1F_2|$ ， $|BF_2| = 2|AF_2|$ ，则双曲线 C 的离心率为_____。

4. 在平面直角坐标系中， $A(1,2)$ 、 $B(3,0)$ ， P 为圆 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 上任一点，设 $OP = \lambda OA + \mu OB$ ，则 $11\lambda + 9\mu$ 的最小值为_____。

5. 设方程 $xyz = 900$ 的全部正整数解为 $(x_i, y_i, z_i) (1 \leq i \leq n)$ ，其中 (x_i, y_i, z_i) 为有序三元数组，即

$(900, 1, 1)$ 、 $(1, 900, 1)$ 、 $(1, 1, 900)$ 视为三组不同的解。则 $\sum_{k=1}^n (x_k + y_k + z_k) =$ _____。

二. （15 分）解方程： $2^{\sin^4 x - \cos^2 x} - 2^{\cos^4 x - \sin^2 x} = \cos 2x$ 。

三. （15 分）求所有的函数 $f: R \rightarrow R$ ，使得对所有的实数 x, y 有 $f(y + f(x)) - f(x + f(y)) = f(x - y)(f(x + y) - 1)$ 。

四. （20 分）若正项递增数列 $\{a_n\}$ 无界，证明：存在某个正整数 k ，当 $n > k$ 时，恒有

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} < n - 2022。$$

五. （20 分）设函数 $f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n}$ ，其中 $x \in R, n \in Z^+$ ；

(1) 证明：对于每一个正整数 n ，存在唯一的 $x_n \in [\frac{2}{3}, 1]$ ，满足 $f_n(x_n) = 0$ ；

(2) 对于任意的正整数 p ，由 (1) 中 x_n 构成是数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_n - x_{n+p} < \frac{1}{n}$ 。

