# Algoritmos y Estructura de Datos:

## Colas con Prioridad y Montículos

**Guillermo Román Díez**

**groman@fi.upm.es**

Universidad Politécnica de Madrid

Curso 2022/2023

# ¿Por qué Colas con Prioridad?

- Son útiles: se usan en la implementación de múltiples algoritmos (veremos ejemplos en el material de grafos)

# ¿Por qué Colas con Prioridad?

- Son útiles: se usan en la implementación de múltiples algoritmos (veremos ejemplos en el material de grafos)
- Tienen una implementación eficiente:

# ¿Por qué Colas con Prioridad?

- Son útiles: se usan en la implementación de múltiples algoritmos (veremos ejemplos en el material de grafos)
- Tienen una implementación eficiente:
  - Todas las operaciones $O(log\ n)$ o mejor

# ¿Por qué Colas con Prioridad?

- Son útiles: se usan en la implementación de múltiples algoritmos (veremos ejemplos en el material de grafos)
- Tienen una implementación eficiente:
  - Todas las operaciones $O(log\ n)$ o mejor
  - No usa más memoria que un array normal en Java

# ¿Por qué Colas con Prioridad?

- Son útiles: se usan en la implementación de múltiples algoritmos (veremos ejemplos en el material de grafos)
- Tienen una implementación eficiente:
  - Todas las operaciones $O(log\ n)$ o mejor
  - No usa más memoria que un array normal en Java
- Se pueden implementar usando árboles (la implementación eficiente usa un array)

# ¿Por qué Colas con Prioridad?

- Son útiles: se usan en la implementación de múltiples algoritmos (veremos ejemplos en el material de grafos)
- Tienen una implementación eficiente:
  - Todas las operaciones $O(log\ n)$ o mejor
  - No usa más memoria que un array normal en Java
- Se pueden implementar usando árboles (la implementación eficiente usa un array)
- Los algoritmos de insertar, acceder (get) y borrar son fáciles de implementar y fáciles de explicar

# ¿Por qué Colas con Prioridad?

- Son útiles: se usan en la implementación de múltiples algoritmos (veremos ejemplos en el material de grafos)
- Tienen una implementación eficiente:
  - Todas las operaciones $O(log\ n)$ o mejor
  - No usa más memoria que un array normal en Java
- Se pueden implementar usando árboles
  (la implementación eficiente usa un array)
- Los algoritmos de insertar, acceder (get) y borrar son fáciles de implementar y fáciles de explicar
- Y tienen un nombre que explica como usarlas . . . :-)

# Colas con Prioridad

- En una cola FIFO el primer elemento en entrar es el primero en salir
- En las *colas con prioridad* el orden de salida viene determinado por la **prioridad** del elemento
- Se puede ver una cola con prioridad como una estructura de datos en la que los elementos se almacenan en orden de prioridad
  - A nivel de implementación no es necesario que esto ocurra así, lo importante es que la cola devuelva primero el elemento con más prioridad (ojo!)
- Las **entradas** de una cola con prioridad tienen
  - Una **clave** que indica la prioridad del elemento
  - Un **valor** que indica el elemento a insertar
  - Al par *clave-valor* lo llamamos **entrada** (entry)

# Interfaz `Entry<K,V>`

- En el interfaz `Entry<K,V>` tenemos:
  - **K** es la clave (key) de la entrada que vamos a insertar
  - **V** es el valor (value) que vamos a insertar
- Por convención, *la clave establece la prioridad inversamente: cuanto menor es la clave mayor es la prioridad*
  - También se conocen como *min-max queue* porque al desencolar se devuelve el elemento con la menor clave
  - Se utilizará el orden total entre las claves. Los objetos que se usen para la clave deben ser `Comparable` o disponer de un `Comparator`

# Interfaz `Entry<K,V>`

- En el interfaz `Entry<K,V>` tenemos:
  - **K** es la clave (key) de la entrada que vamos a insertar
  - **V** es el valor (value) que vamos a insertar
- Por convención, *la clave establece la prioridad inversamente: cuanto menor es la clave mayor es la prioridad*
  - También se conocen como *min-max queue* porque al desencolar se devuelve el elemento con la menor clave
  - Se utilizará el orden total entre las claves. Los objetos que se usen para la clave deben ser `Comparable` o disponer de un `Comparator`
- Nos podemos encontrar con:
  - Dos o más entradas con la misma clave pero distintos valores
  - Dos o más entradas con el mismo valor pero distintas
  - Dos o más entradas con la misma clave y los mismos valores claves

```
public interface PriorityQueue<K,V>
                        extends Iterable<Entry<K,V>> {

  int size(); public boolean isEmpty();

  Entry<K,V> enqueue(K key, V value) throws
      InvalidKeyException;

  Entry<K,V> first() throws EmptyPriorityQueueException;

  Entry<K,V> dequeue() throws EmptyPriorityQueueException;

  void remove(Entry<K,V> entry) throws InvalidKeyException;

  void replaceKey(Entry<K,V> entry, K newKey) throws
      InvalidKeyException;

  void replaceValue(Entry<K,V> entry, V newValue) throws
      InvalidKeyException;
}
```

# Interfaz `PriorityQueue<K,V>`

- Los métodos `first` y `dequeue` devuelven objetos que implementan el interfaz `Entry<K,V>`
- `enqueue`: recibe por separado una clave `key` y un valor `value`
- `first`: es un método observador para consultar el elemento con mayor prioridad (con la clave con menor valor)
- `dequeue`: devuelve el elemento con mayor prioridad (con la clave con menor valor) y lo borra de la cola
- `EmptyPriorityQueueException` se lanza cuando se intenta acceder la entrada de clave mínima en una cola vacía
- `InvalidKeyException` se lanza cuando la clave es `null` o no tiene definido un orden para los elementos de su clase

# Interfaz `PriorityQueue<K,V>`: `remove`, `replaceKey` y `replaceValue`

- Los métodos `remove`, `replaceKey` y `replaceValue` requieren un `Entry<K,V>` como argumento **pero no vale cualquier** `Entry<K,V>`**!**
- Los `Entry<K,V>` que sirven como argumentos a estos métodos tienen que haber sido devuelto por uno de los métodos:
  - `first`
  - `enqueue`
  - o usando el iterador sobre la cola
- Un `Entry<K,V>` devuelto por estos métodos contiene una referencia (position) dentro la estructura de datos implementando la cola, para poder implementar eficientemente los métodos `remove`, `replaceKey` y `replaceValue`.

# Ejemplo de Colas con Prioridad

```
PriorityQueue<Integer,String> cola = new
    SortedListPriorityQueue<Integer,String>();

cola.enqueue(1, "Programacion II");
cola.enqueue(4, "Algoritmica Numerica");
cola.enqueue(3, "Lenguajes y Automatas");
cola.enqueue(0, "AED");

while (!cola.isEmpty()) {
  ...println(cola.dequeue());
}

Entry<Integer,String> entry =
     cola.enqueue(7, "Programacion Funcional");

// Cambiamos programacion functional a 9
cola.replaceKey(entry, 9);
// Lo borramos
cola.remove(entry);
```

# Implementación de Colas con Prioridad

# Implementación de Colas con Prioridad

- Con una **lista de posiciones desordenada**
  - `enqueue` tiene complejidad $O(1)$
  - `first` tiene complejidad $O(n)$
  - `dequeue` tiene complejidad $O(n)$

# Implementación de Colas con Prioridad

- Con una **lista de posiciones desordenada**
  - `enqueue` tiene complejidad $O(1)$
  - `first` tiene complejidad $O(n)$
  - `dequeue` tiene complejidad $O(n)$
- Con una **lista de posiciones desordenada con caché**
  - `enqueue` tiene complejidad $O(1)$
  - `first` tiene complejidad $O(1)$
  - `dequeue` tiene complejidad $O(n)$

# Implementación de Colas con Prioridad

- Con una **lista de posiciones desordenada**
  - `enqueue` tiene complejidad $O(1)$
  - `first` tiene complejidad $O(n)$
  - `dequeue` tiene complejidad $O(n)$
- Con una **lista de posiciones desordenada con caché**
  - `enqueue` tiene complejidad $O(1)$
  - `first` tiene complejidad $O(1)$
  - `dequeue` tiene complejidad $O(n)$
- Con una **lista de posiciones ordenada**
  (incluida en `aedlib.jar` como `SortedListPriorityQueue`)
  - `enqueue` tiene complejidad $O(n)$
  - `first` tiene complejidad $O(1)$
  - `dequeue` tiene complejidad $O(1)$

# Motivación Montículos

- Como acabamos de ver, en las implementaciones de colas con prioridad alguno de los métodos tiene complejidad $O(n)$
- El **montículo** es una implementación de colas con prioridad que satisface las siguientes complejidades

| | |
|---|---|
| `insert` | $O(log(n))$ |
| `first` | $O(1)$ |
| `dequeue` | $O(log(n))$ |

- Los métodos adicionales también tienen complejidad logarítmica o mejor:

| | |
|---|---|
| `replaceKey` | $O(log(n))$ |
| `replaceValue` | $O(1)$ |
| `remove` | $O(log(n))$ |

- Incluida en `aedlib.jar` como `HeapPriorityQueue`

# Motivación

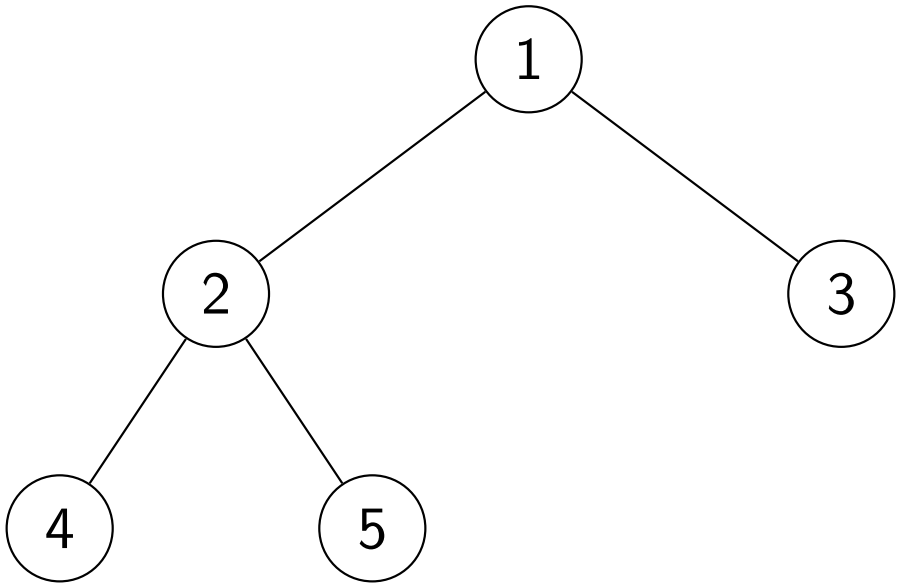
- En la implementación de colas con prioridad mediante una lista usamos una *lista ordenada* usando el orden total de claves
- En una implementación con un **montículo** se utiliza un **árbol binario (casi)completo** para particionar la entrada
  - Reduciendo de esta forma las búsquedas a complejidad $O(log(n))$
- Podemos decir que cambiamos una única fila de tamaño $n$ por *múltiples filas* de tamaño $log(n)$
- Aunque, en realidad un montículo se **describe** como un **árbol binario** pero se **implementa** mediante un **array**

# Terminología

- Un **árbol (casi)completo** es un árbol binario que puede estar completo o faltarle únicamente nodos "a la derecha" del último nivel
  - Todos los niveles (menos el último) deben estar completos
  - El último nivel se va llenando de izquierda a derecha
- Un nodo 'v' **está a la izquierda** de otro 'w' si 'v' aparece a la izquierda de 'w' en un recorrido en inorden
- El **último nodo de un árbol (casi)completo** es la hoja más a la derecha en el último nivel
- La **altura** de un árbol casi completo es $log(n)$, donde $n$ es el número de nodos almacenados en el árbol
- El **último nodo** de un árbol casi completo es el que se encuentra más a la derecha en el último nivel

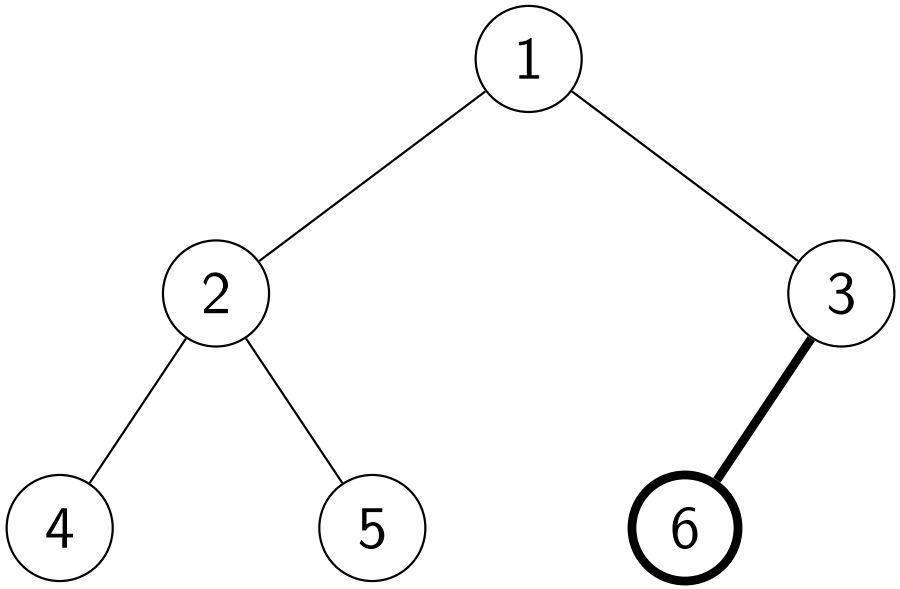
# Terminología

Árbol (casi)completo



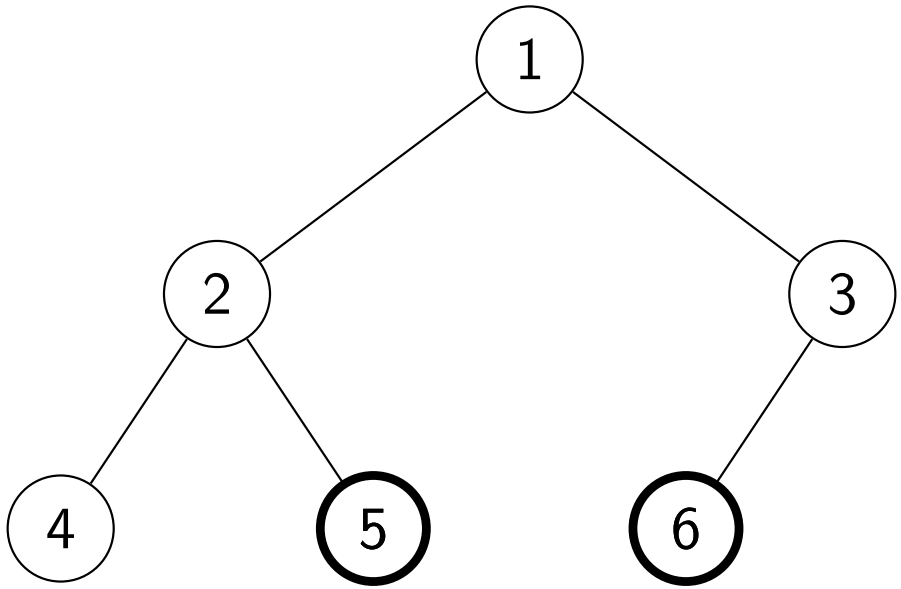
# Terminología

Añadimos el nodo 6



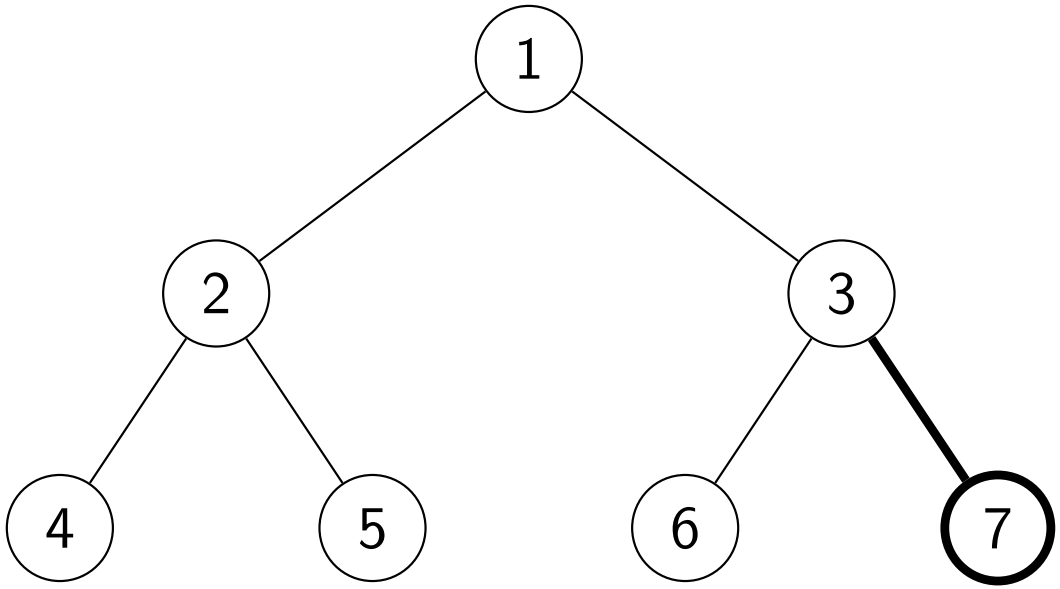
# Terminología

El nodo **5 está a la izquierda de 6**



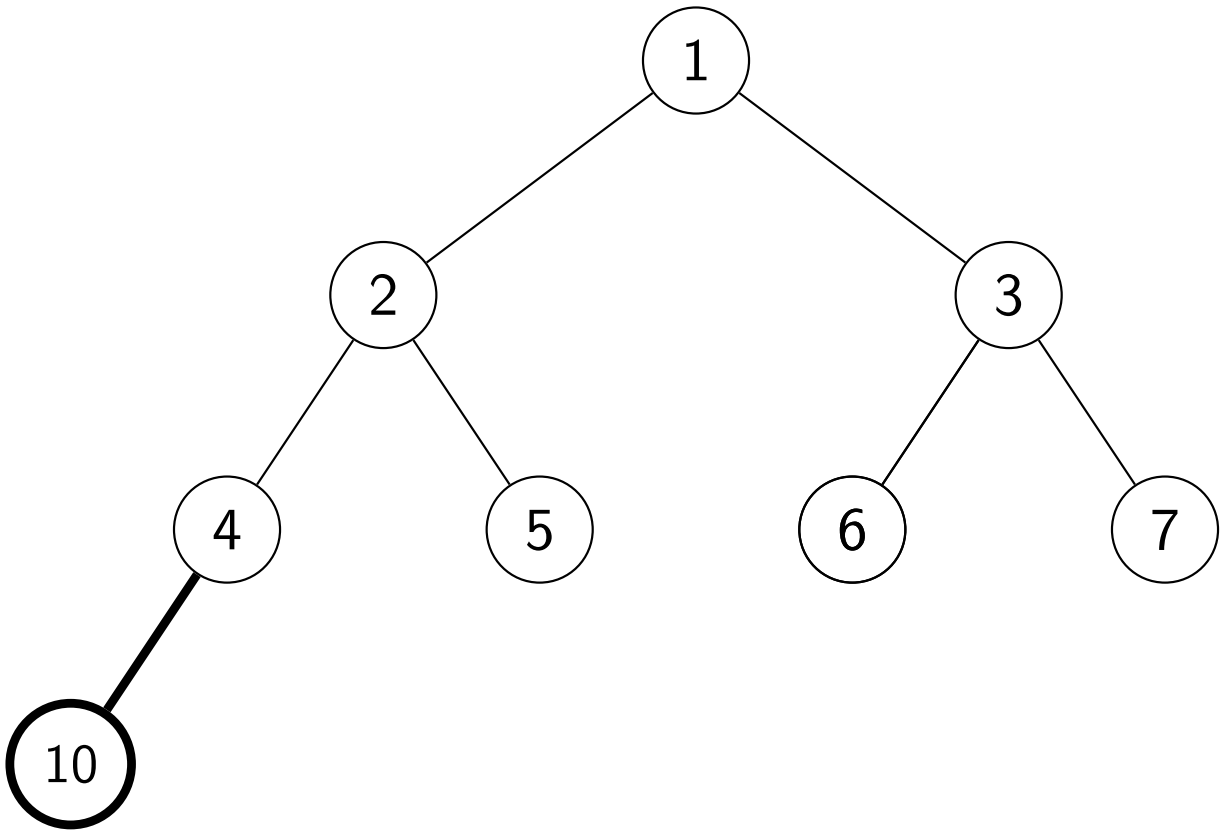
# Terminología

Añadimos el nodo 7



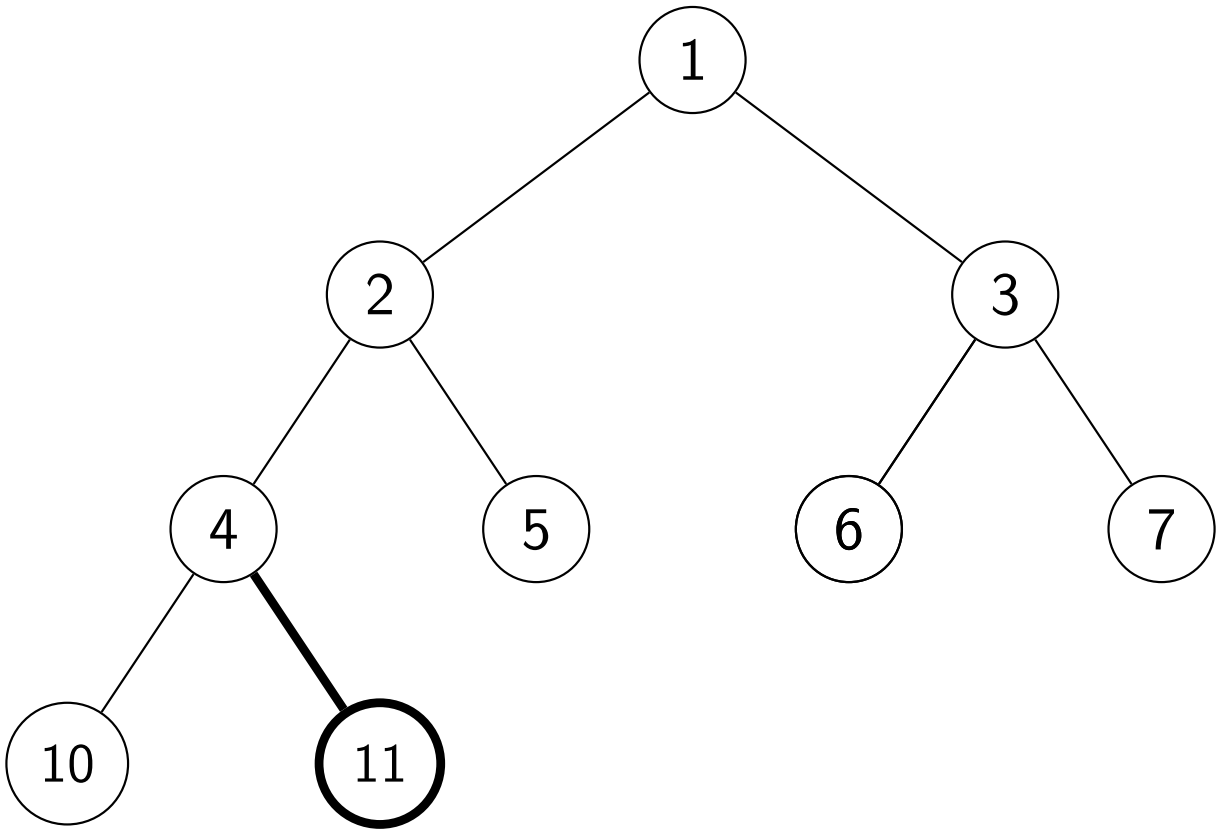
# Terminología

Al tener el nivel 2 completo, **cambiamos de nivel**



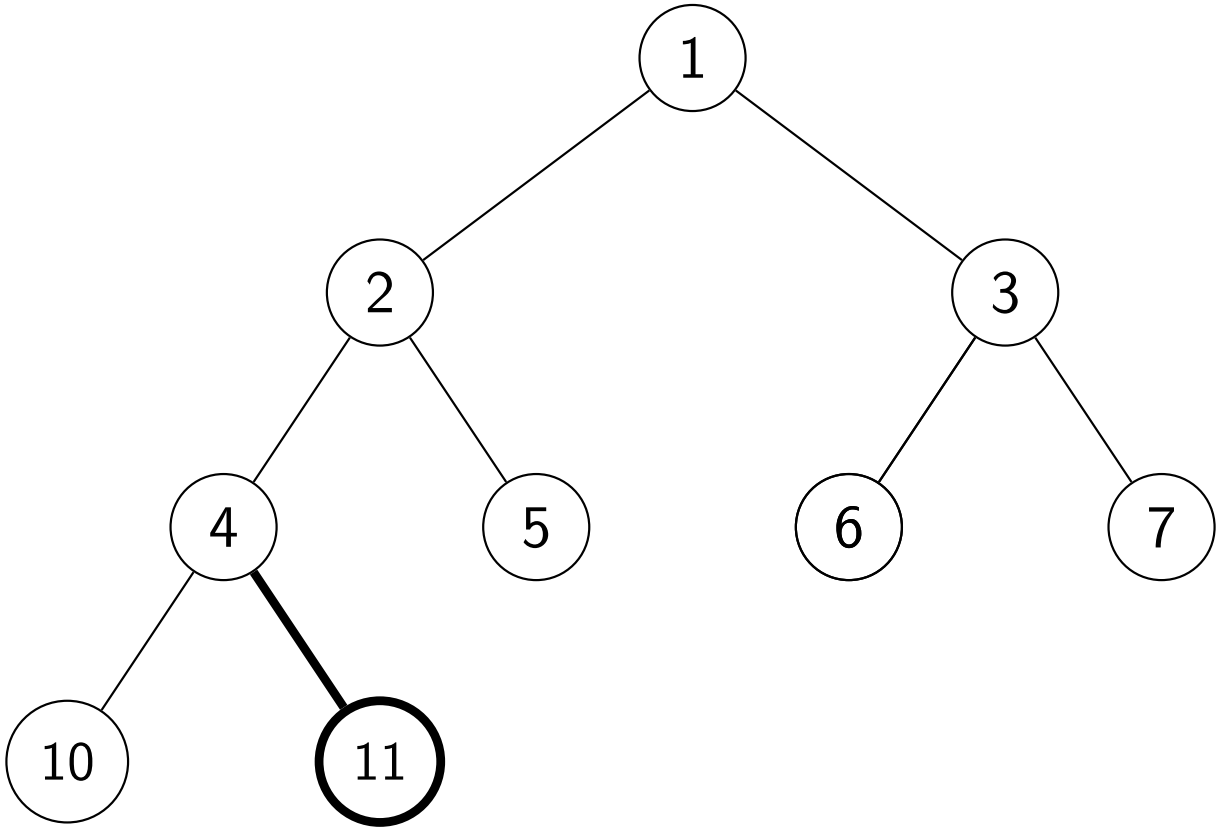
# Terminología

Añadimos más nodos en el nuevo nivel



# Terminología

El nodo **11** es el **último nodo**



# Definición Montículo

## Montículo

*"Es un árbol binario (casi)completo que almacena entradas en los nodos tal que para todo nodo distinto de la raíz, su entrada es mayor o igual que la entrada almacenada en el nodo padre"*

- El nombre "montículo" viene de "amontonar" claves en orden ascendente
- Cumple la **heap-order property**
  - Todos los caminos de la raíz a las hojas están ordenados ascendentemente
  - Si lo usamos para una *priority queue*, la entrada de menor clave (la más prioritaria) está almacenada en el nodo raíz

# PriorityQueues con montículos

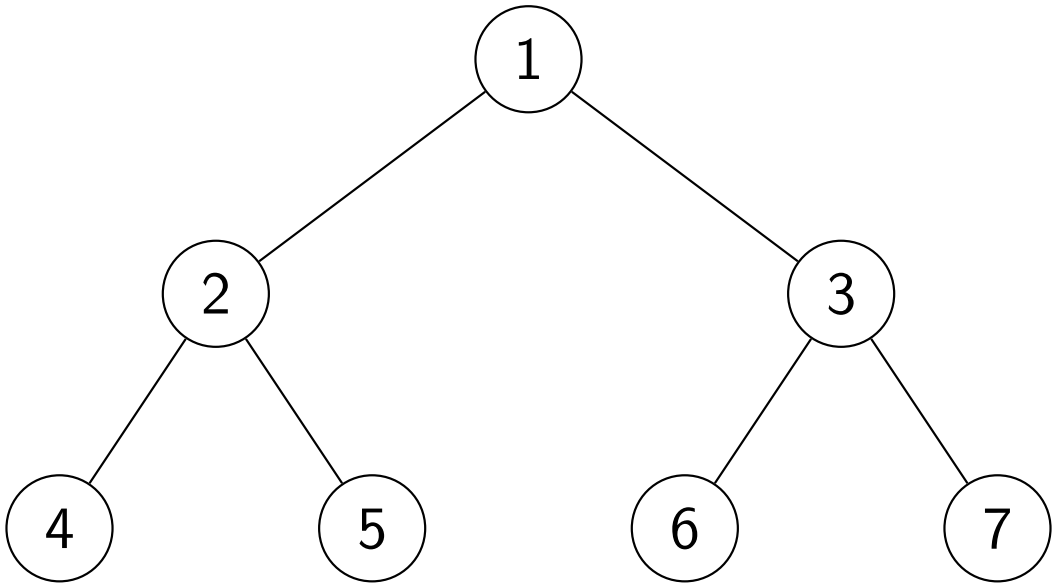
- Podemos implementar una **cola con prioridad** mediante un **montículo**
- El montículo ser ordena considerando las claves de los elementos de la cola con prioridad
- Al igual que en la implementación con listas, necesitamos un `Comparator` o bien que las claves sean `Comparable`
- Podríamos conseguir que las operaciones de una cola con prioridad tengan las siguientes complejidades:

| | |
|---|---|
| `enqueue` | $O(log(n))$ |
| `first` | $O(1)$ |
| `dequeue` | $O(log(n))$ |

# Montículo y Heap-order Property

## Pregunta

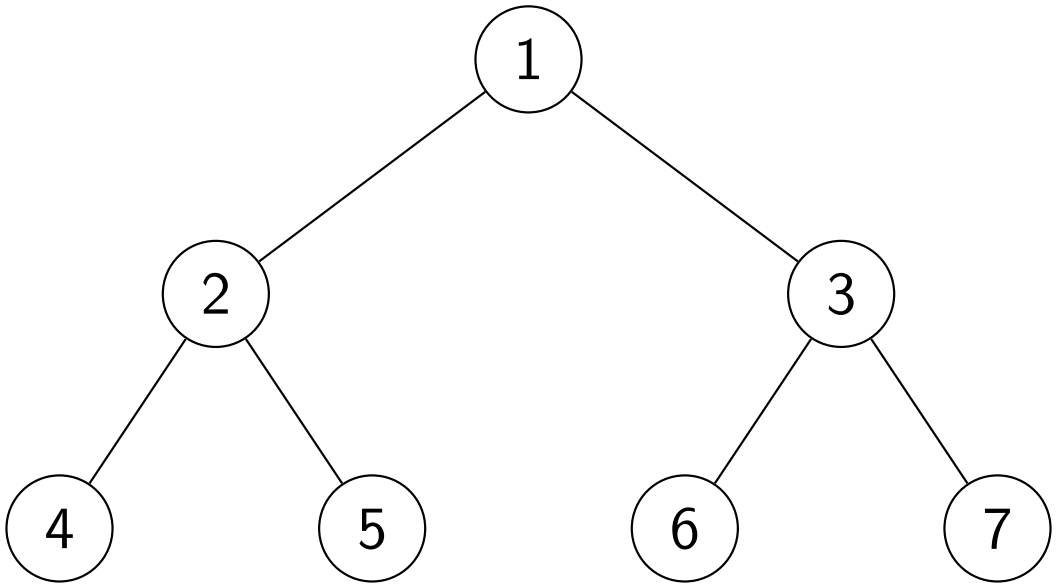
¿tiene el padre de cada nodo mayor o igual prioridad que el nodo?



# Montículo y Heap-order Property

## Pregunta

¿tiene el padre de cada nodo mayor o igual prioridad que el nodo?

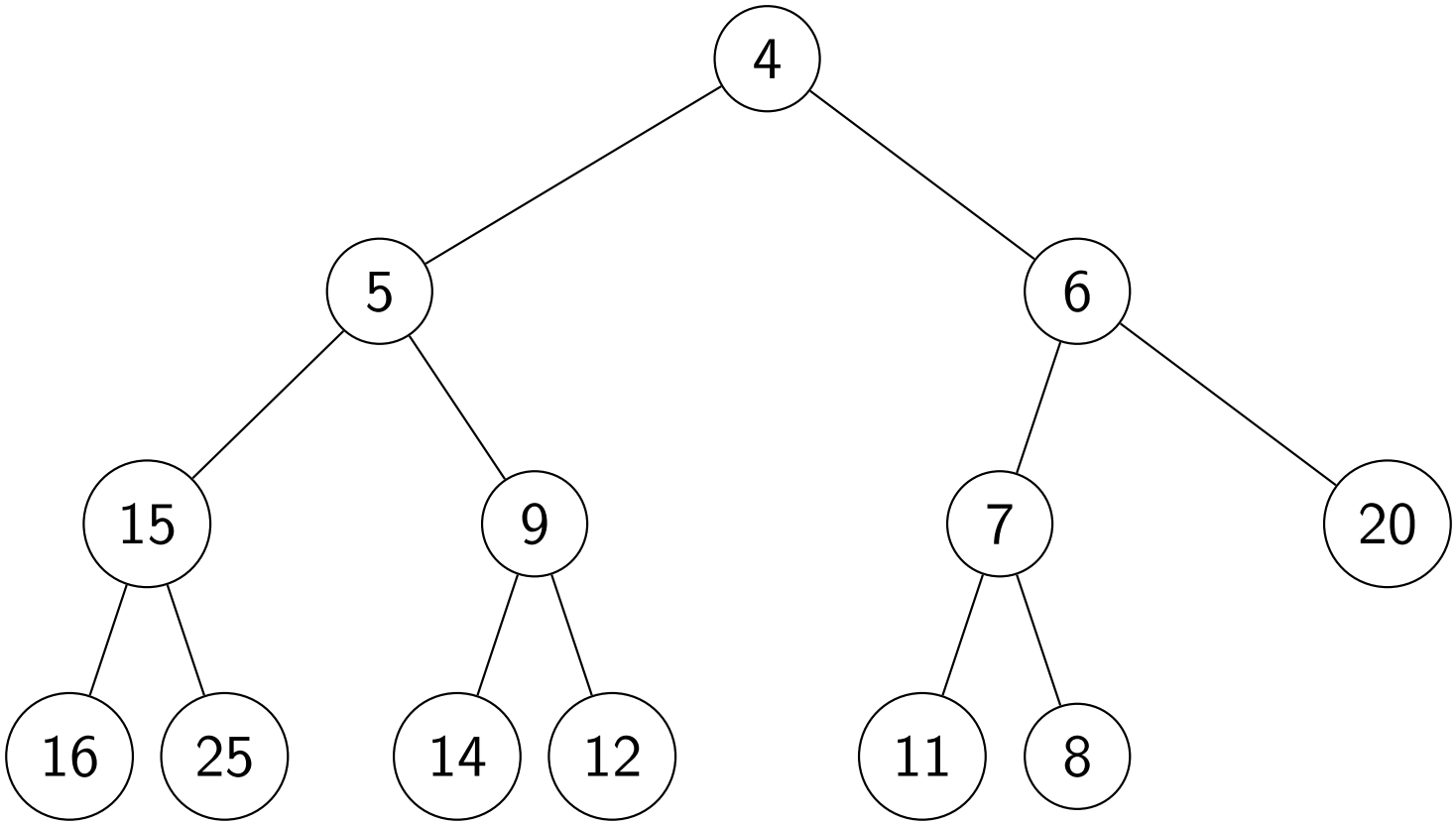



Si es un árbol casi completo y se cumple para todos los nodos, entonces, es un **montículo** que puede implementar una **cola con prioridad**

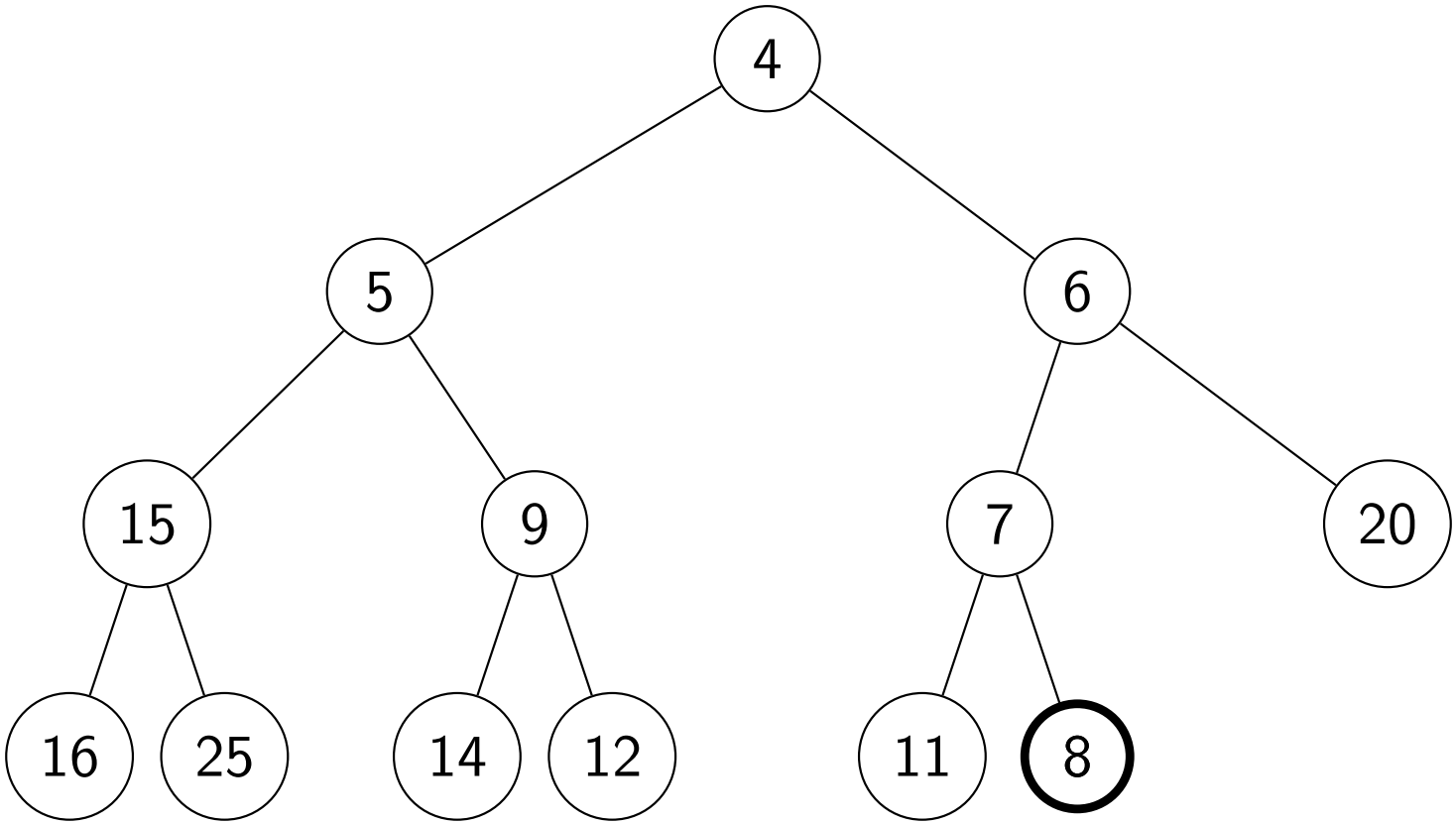
# Operación enqueue

- La inserción de un nuevo nodo se hace incluyendo el nuevo nodo como el **último nodo del árbol**
- Como ésto puede *violar* la *heap-order property* puede ser necesario reajustar los nodos del árbol
  - Se comprueba la "heap-order property" entre el nuevo nodo y su padre
    - ★ Si se cumple hemos acabado
    - ★ Si no se cumple entonces se intercambian las entradas entre el nodo nuevo y el padre
  - Se repite la operación con el nodo intercambiado y el padre correspondiente hasta que se cumpla la "heap-order property" o hasta llegar a la raíz
- Esto se conoce como **up-heap bubbling**

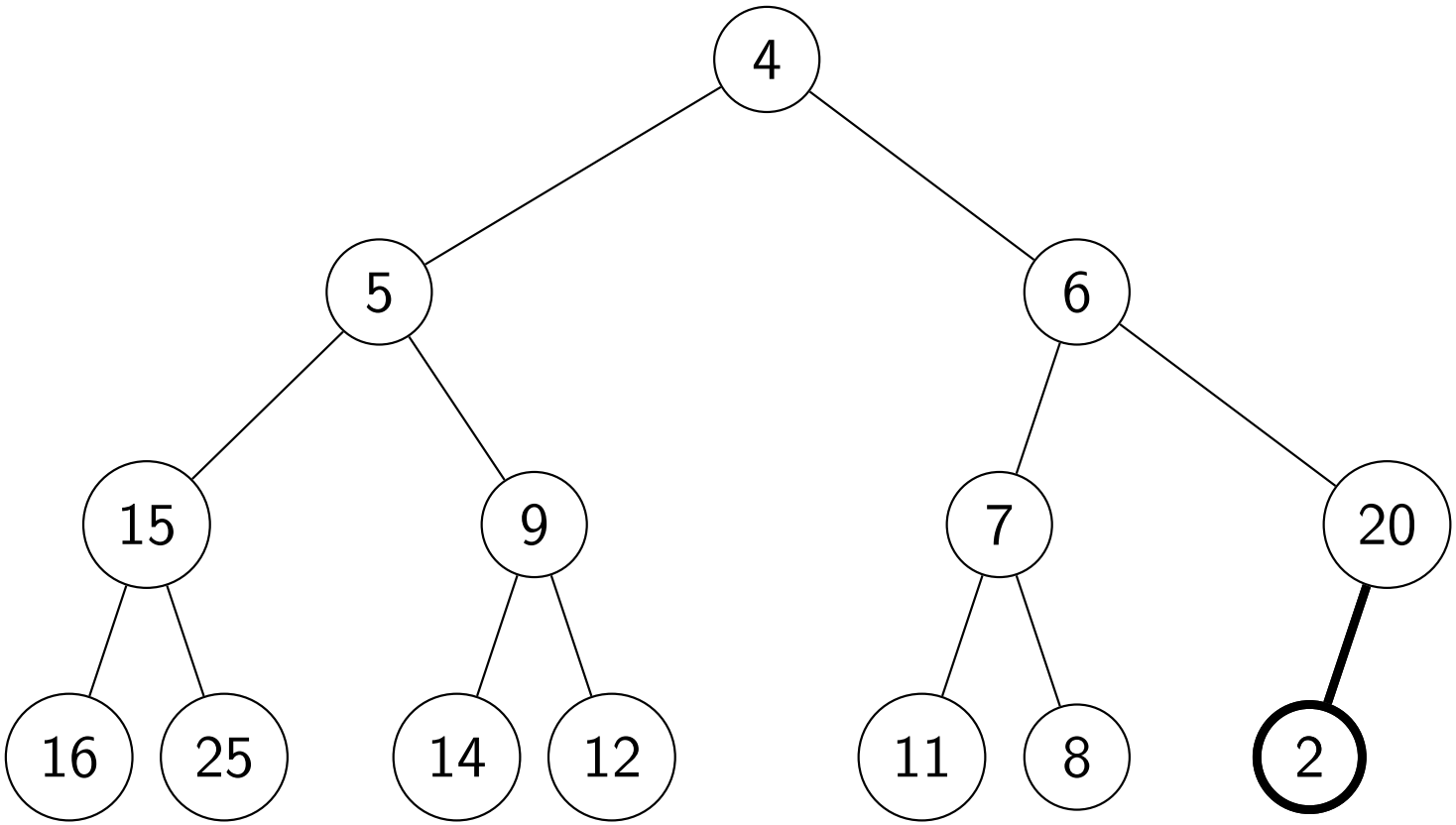
# up-heap bubbling



# up-heap bubbling

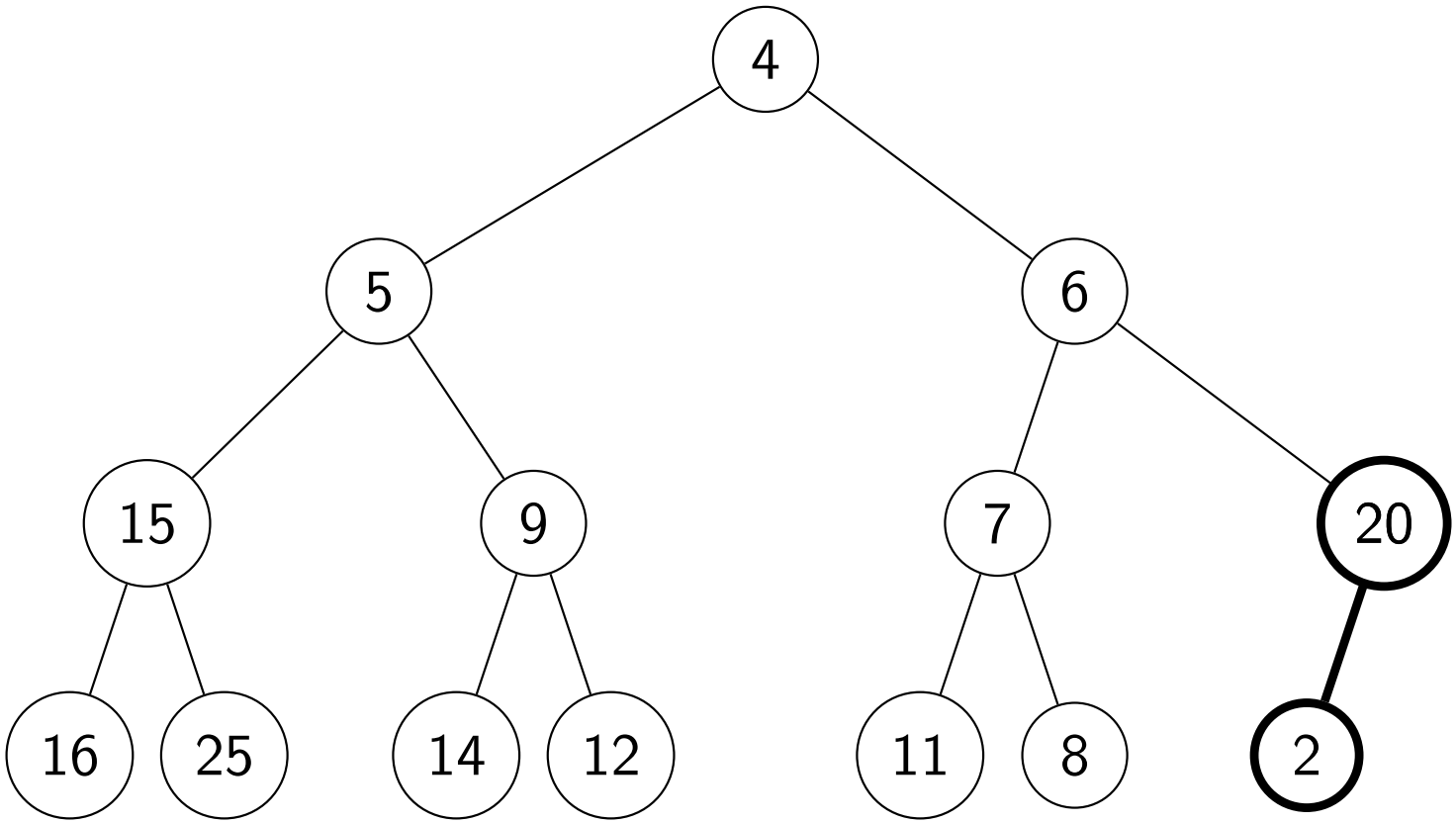


# up-heap bubbling



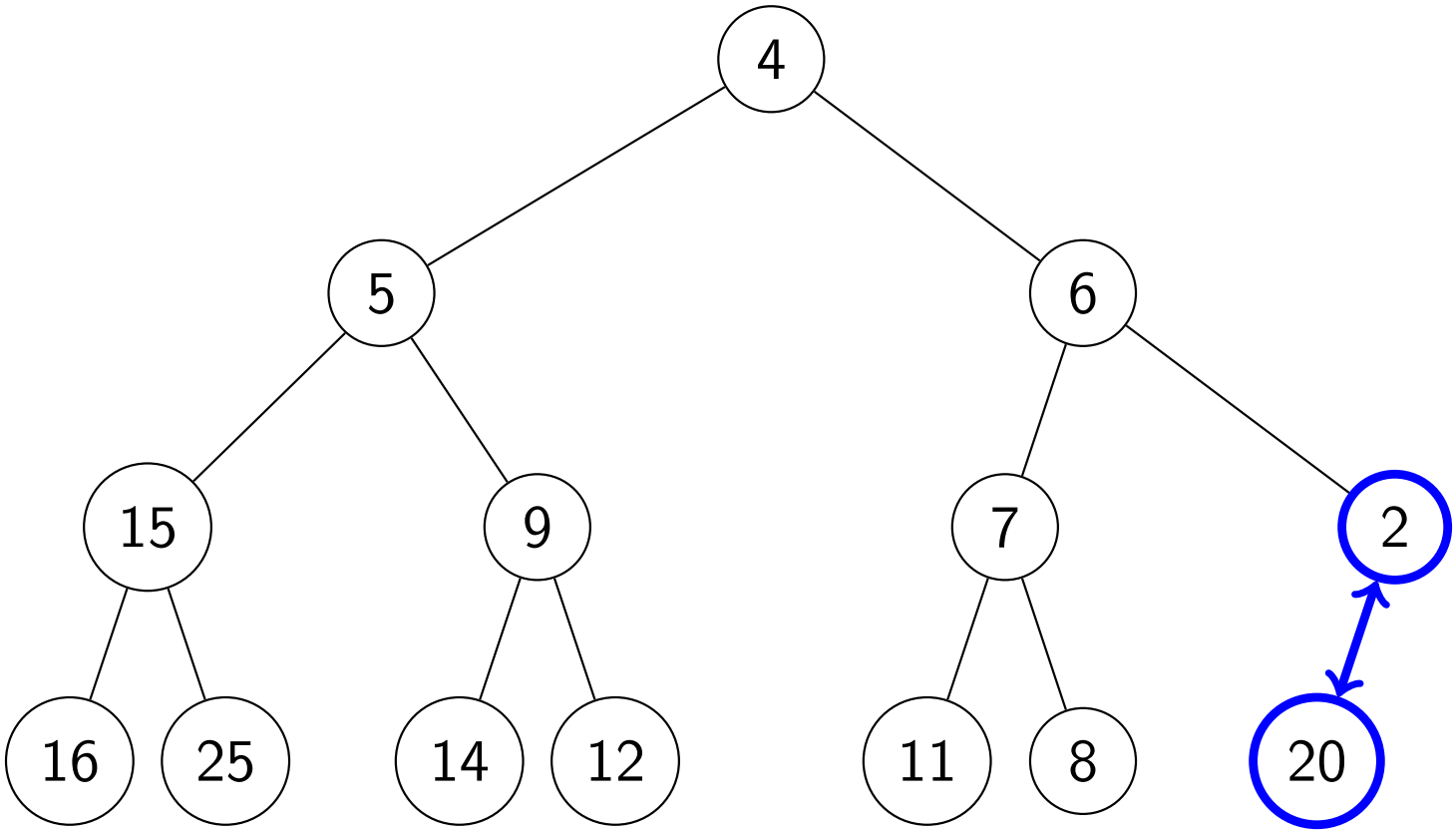

Insertamos el **nuevo** 2 nodo en la **último** posicíón libre

# up-heap bubbling



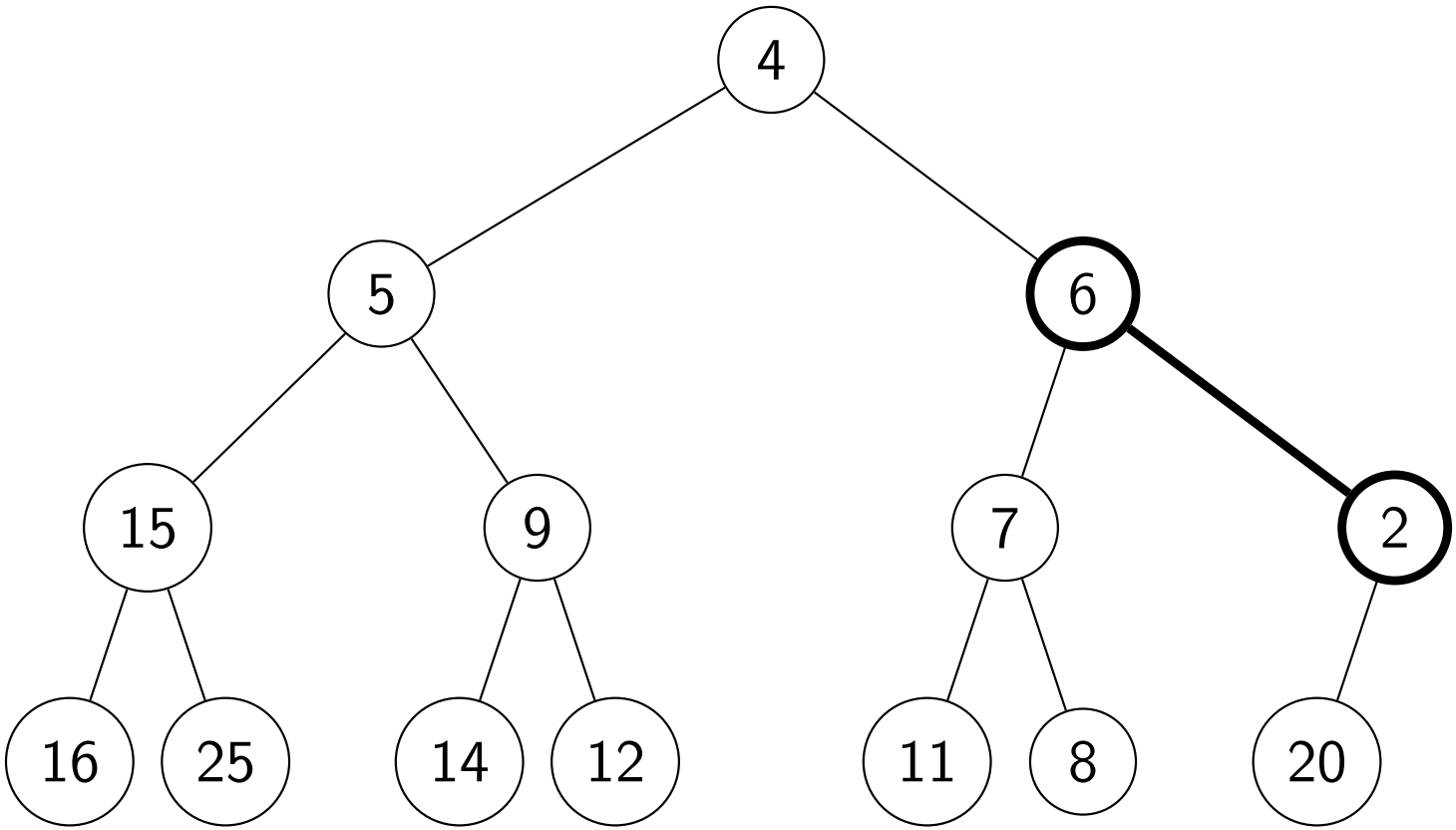

¿violamos la heap-order property?

# up-heap bubbling



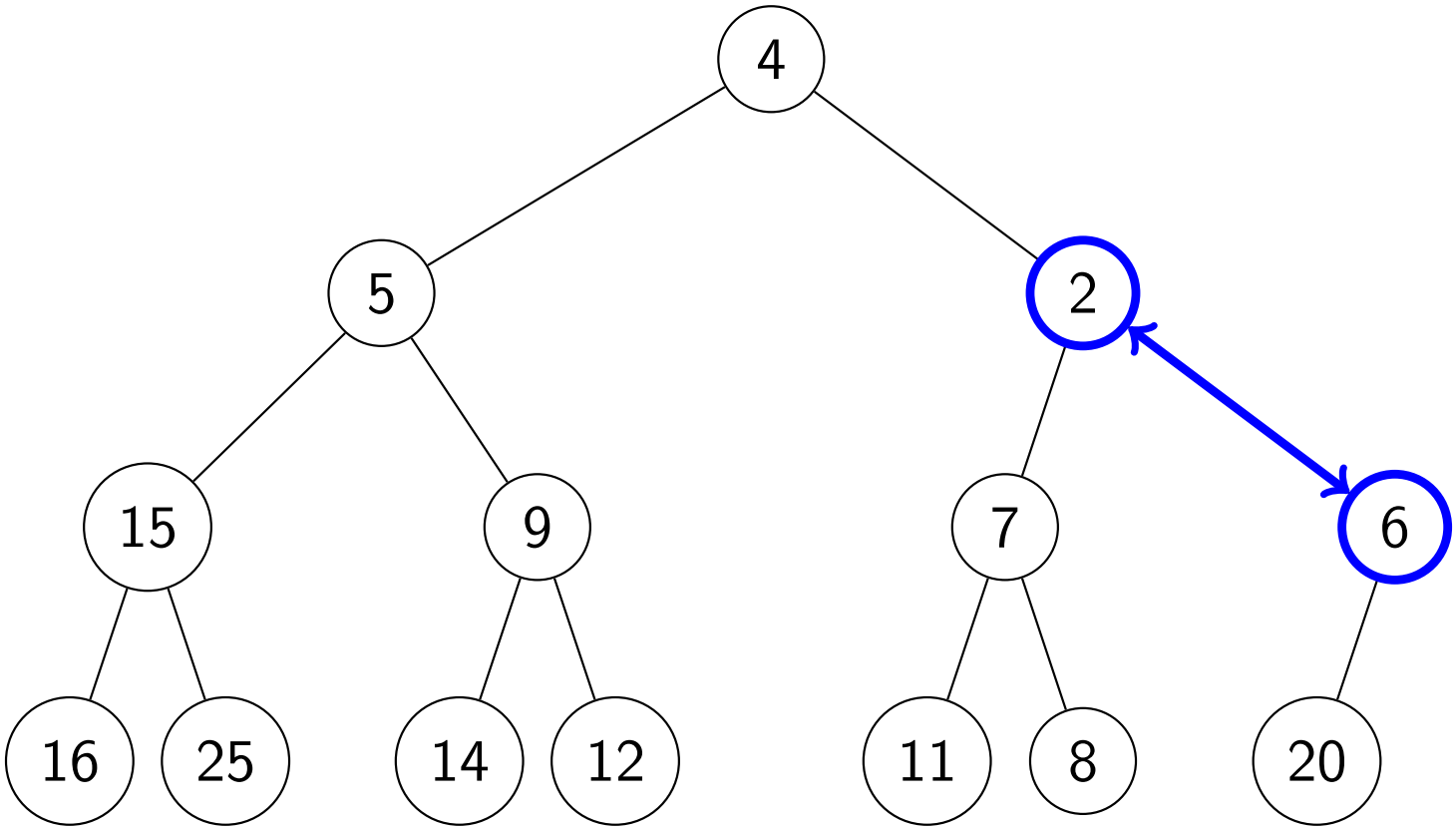

Intercambiamos los nodos

# up-heap bubbling



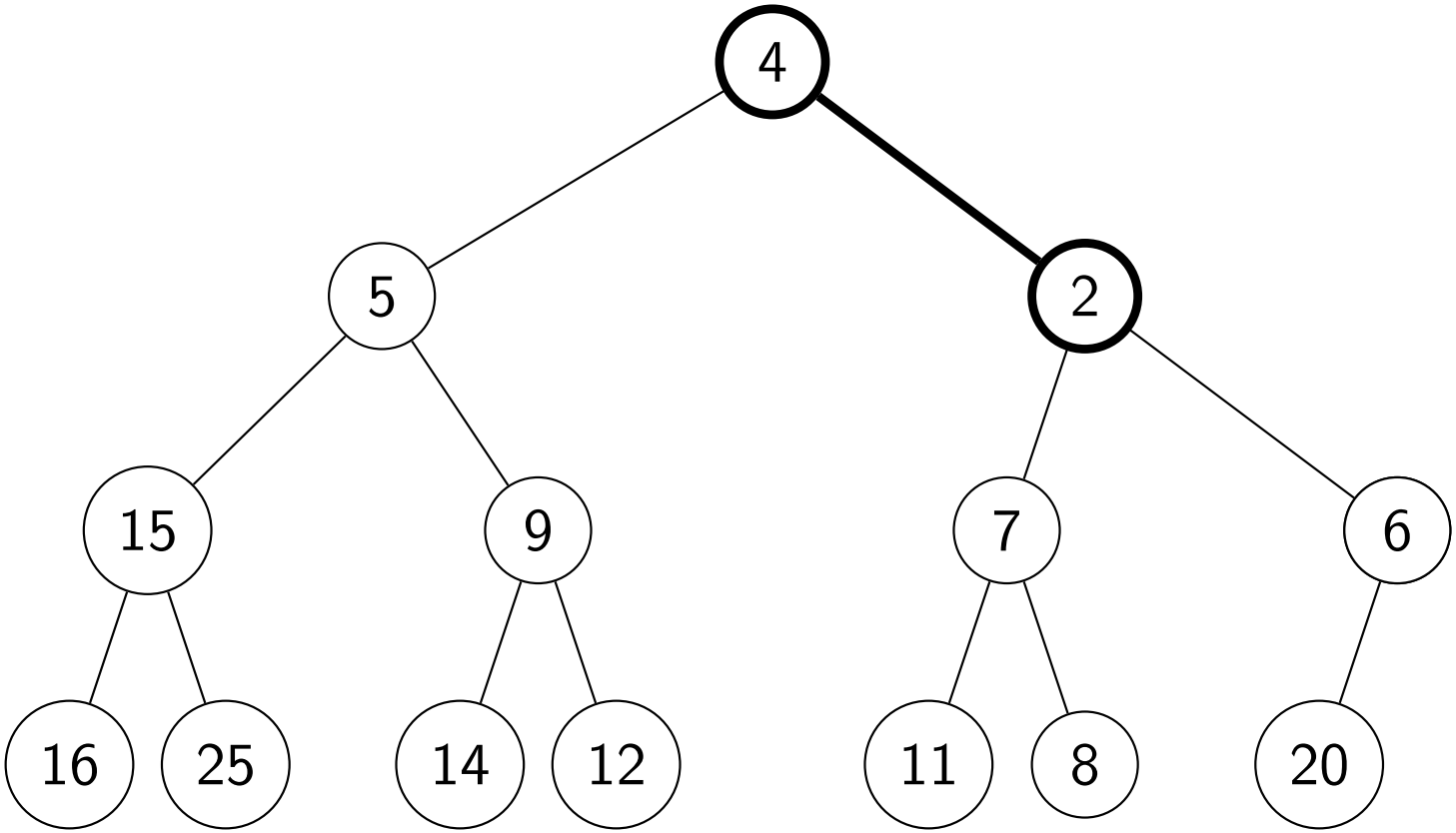

¿violamos la heap-order property?

# up-heap bubbling



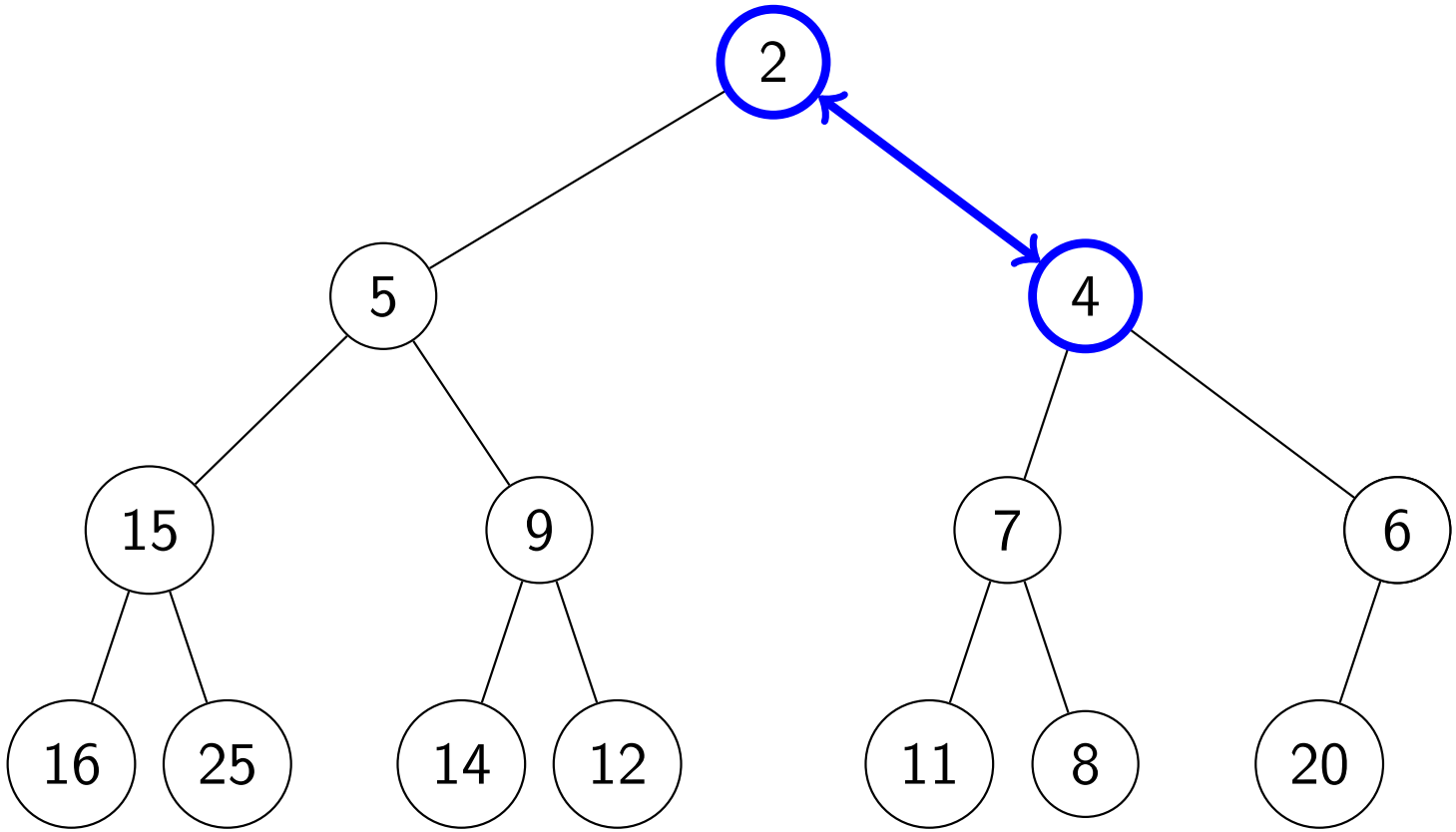

Intercambiamos los nodos

# up-heap bubbling



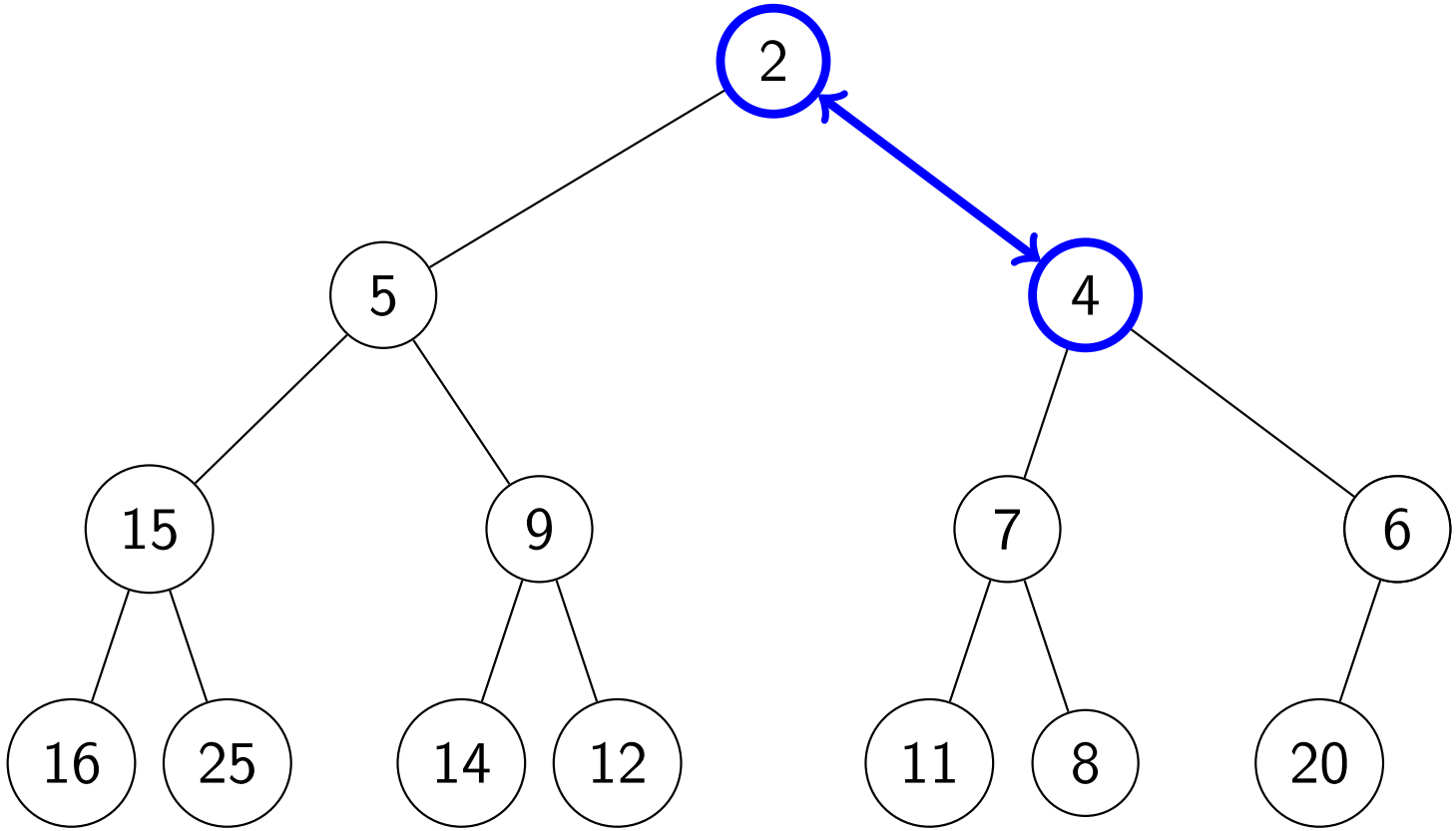

¿violamos la heap-order property?

# up-heap bubbling




Intercambiamos los nodos

# up-heap bubbling

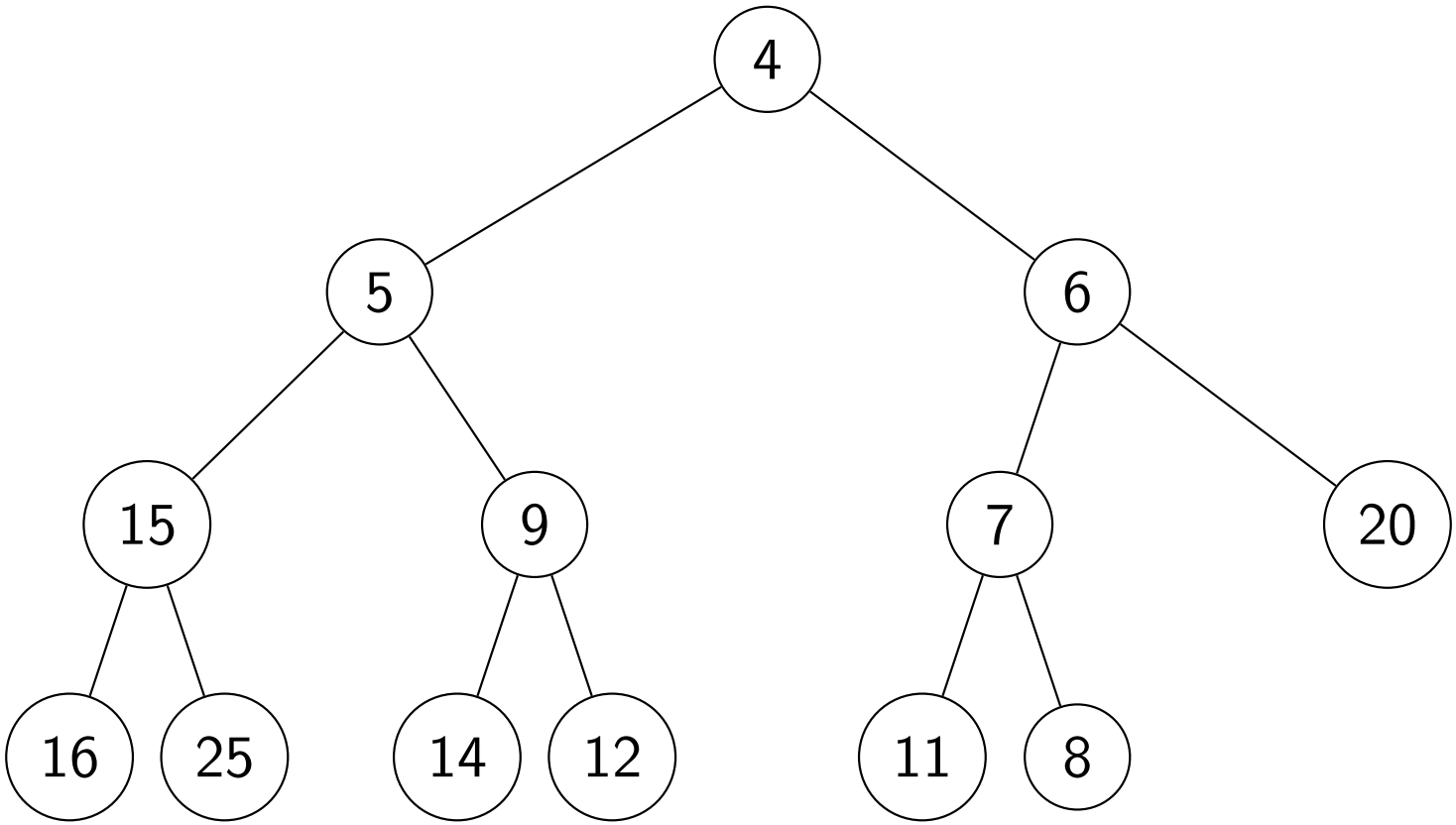



FIN

# Operación dequeue

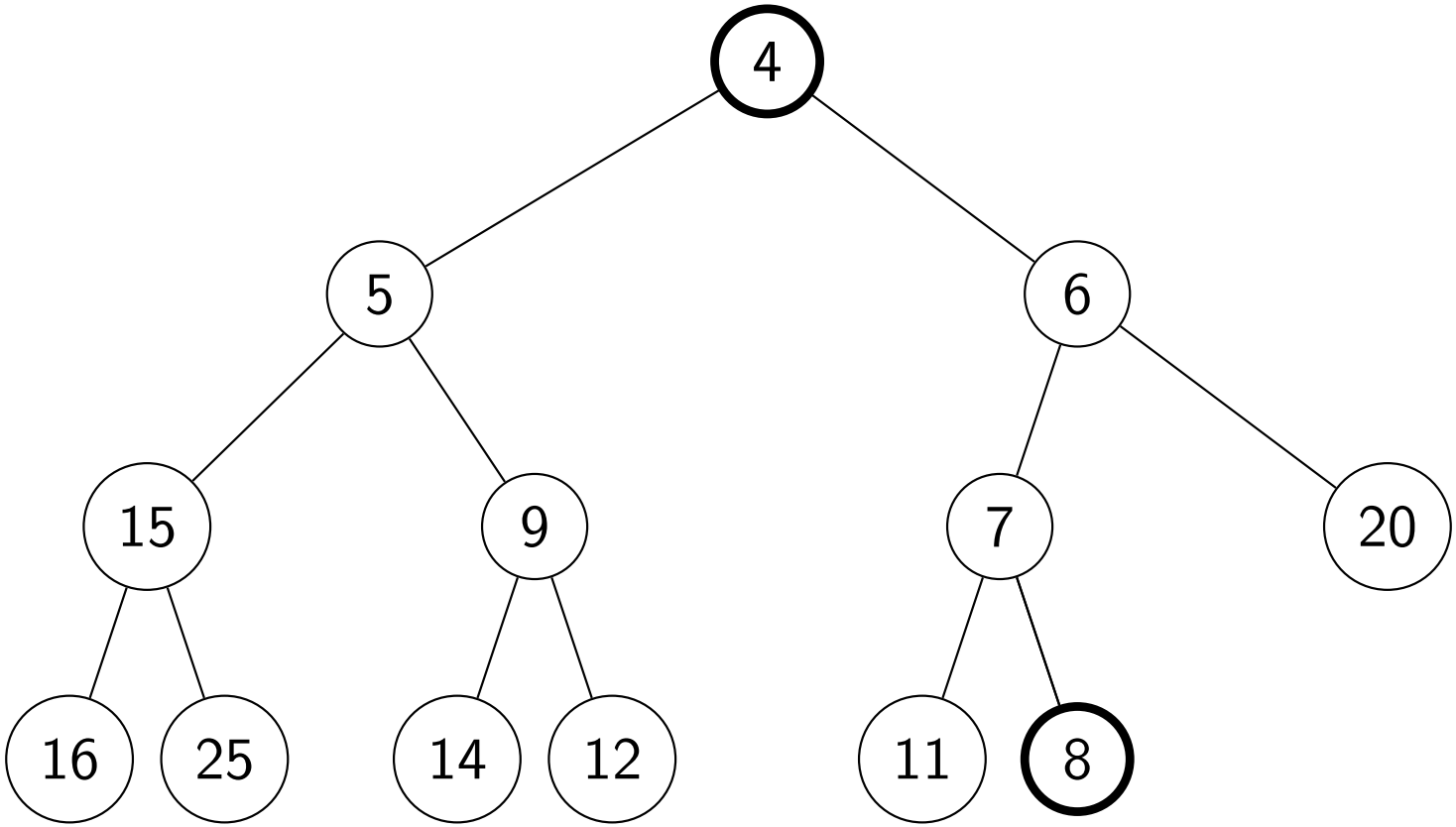
- La entrada de menor clave siempre es la raíz, pero la raíz no se puede borrar directamente
- **Intercambiamos** la **raíz** con el **último nodo** del árbol y borramos el último nodo
- Como ésto puede *violar* la *heap-order property* puede ser necesario reajustar los nodos del árbol
  - Se comprueba la *heap-order property* entre la raíz y sus hijos
    - ★ Si se cumple hemos acabado
    - ★ Si no se cumple entonces se intercambian las entradas entre la raiz y el nodo hijo de menor clave
  - Se repite la operación con el hijo intercambiado y sus hijos hasta que se cumpla la "heap-order property" o hasta llegar a una hoja
- Esto se conoce como **down-heap bubbling**

# down-heap bubbling



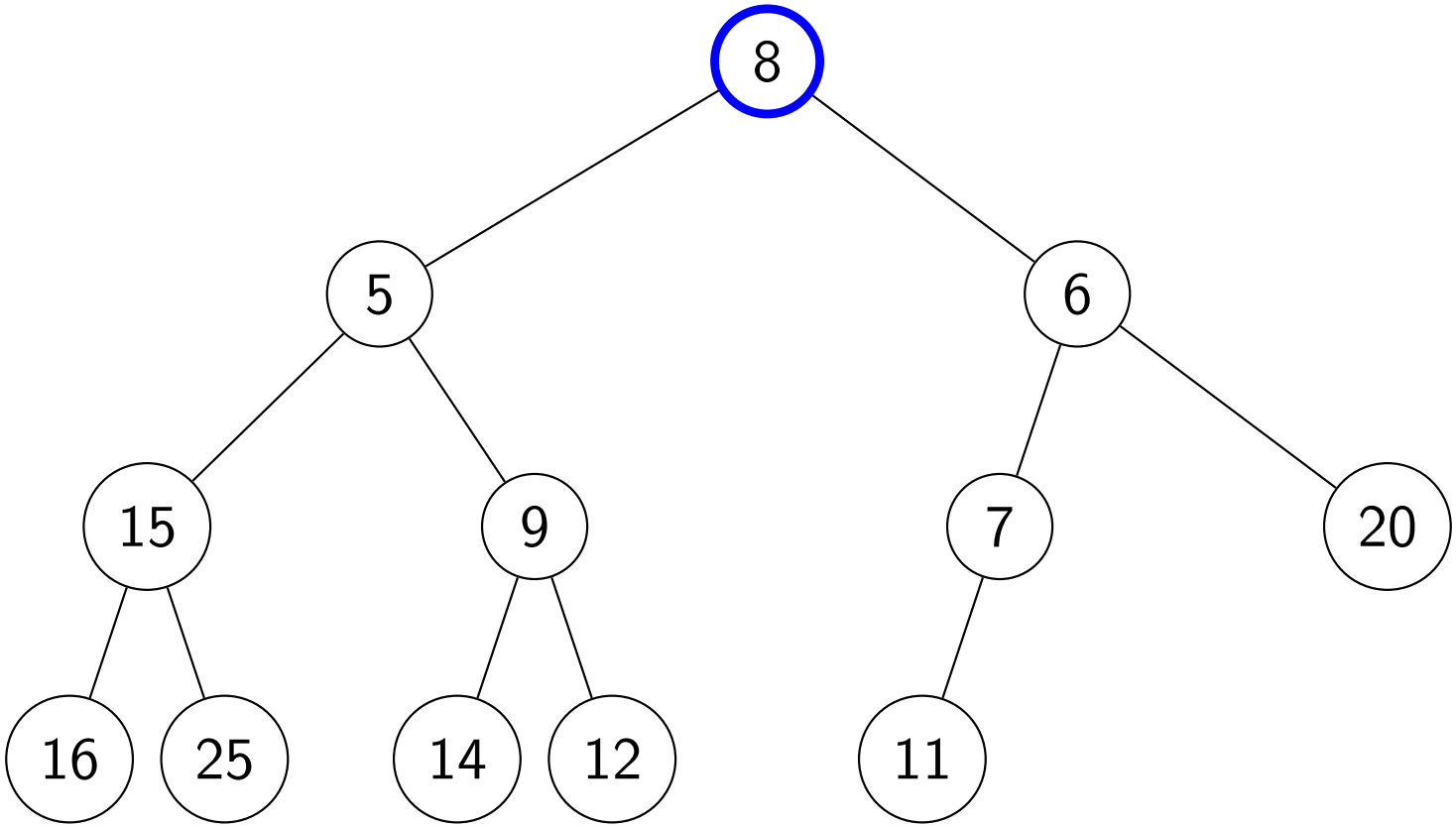

Ejecutamos `dequeue`

# down-heap bubbling



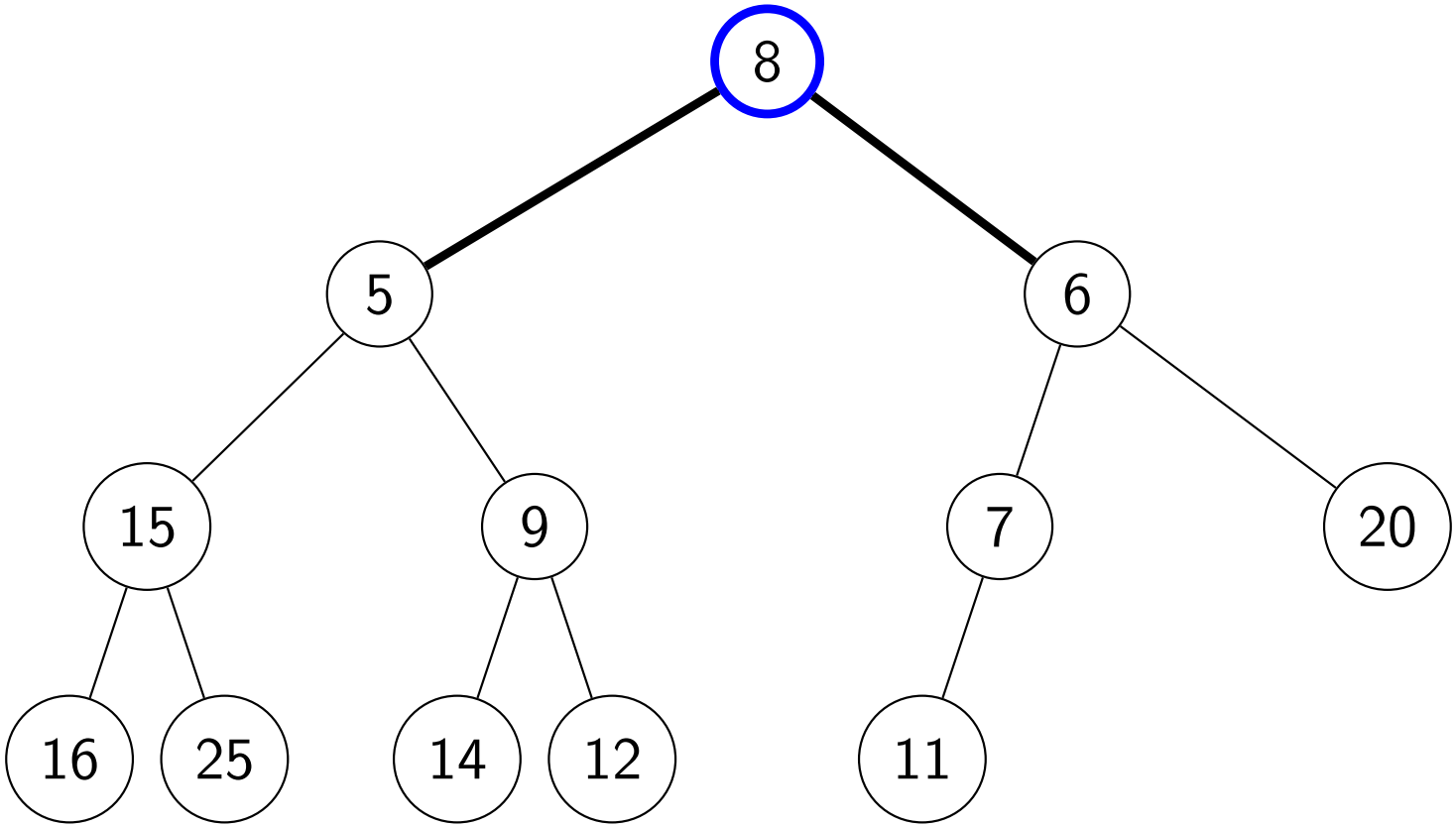

Quitamos la raíz y ponemos el último como raíz

# down-heap bubbling



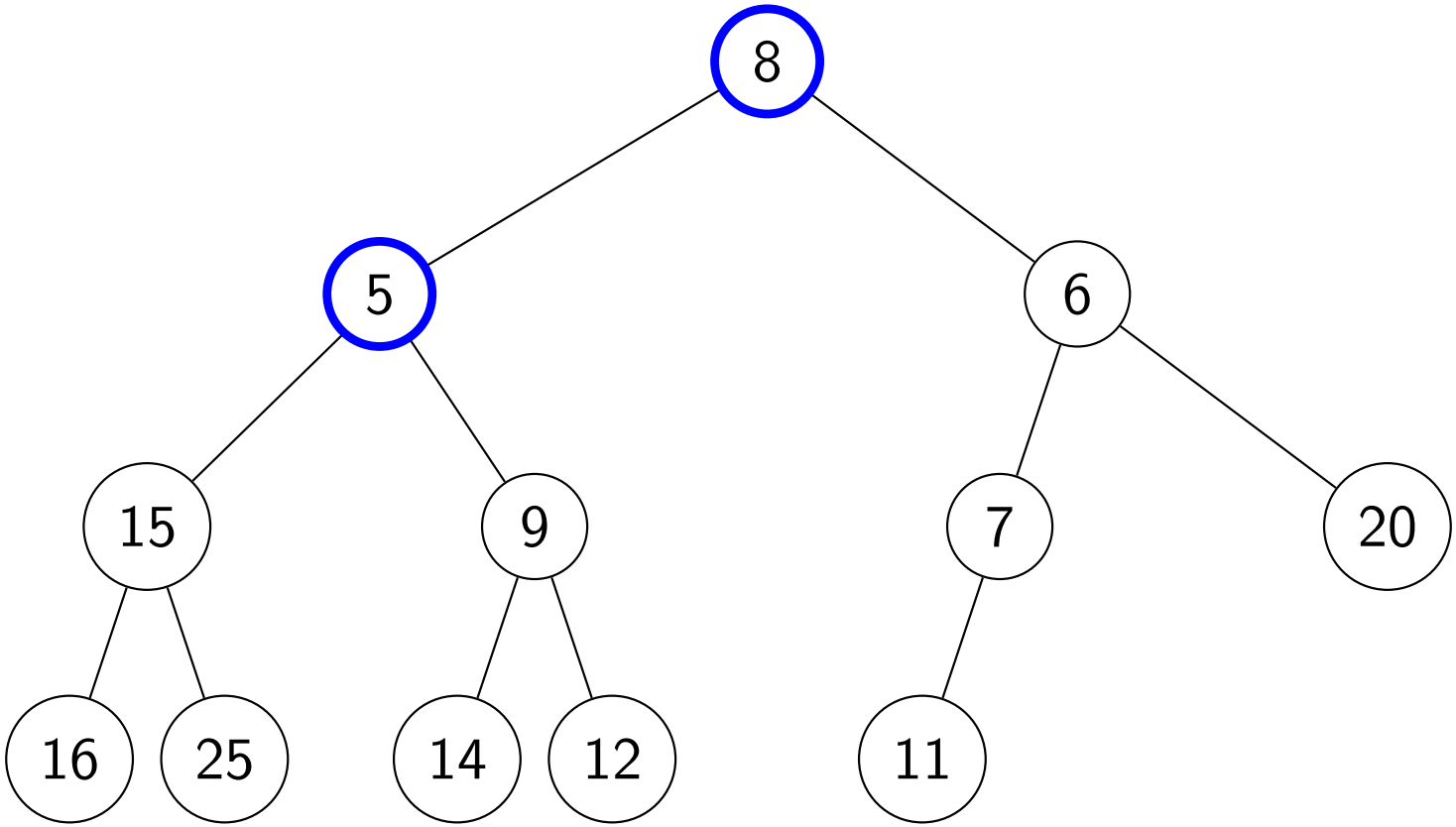

Quitamos la raíz y ponemos el último como raíz

# down-heap bubbling



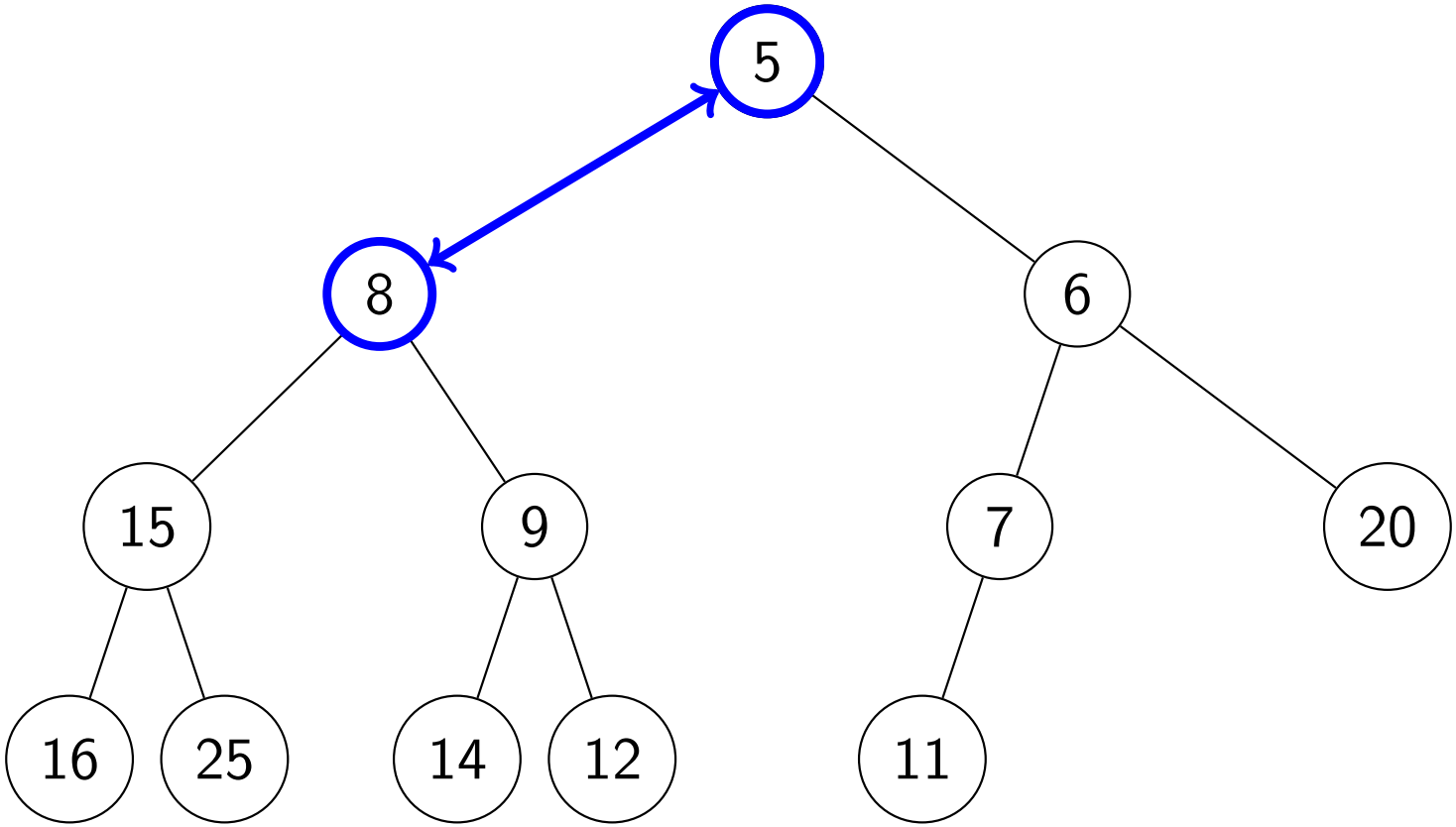

¿violamos la heap-order property?

# down-heap bubbling



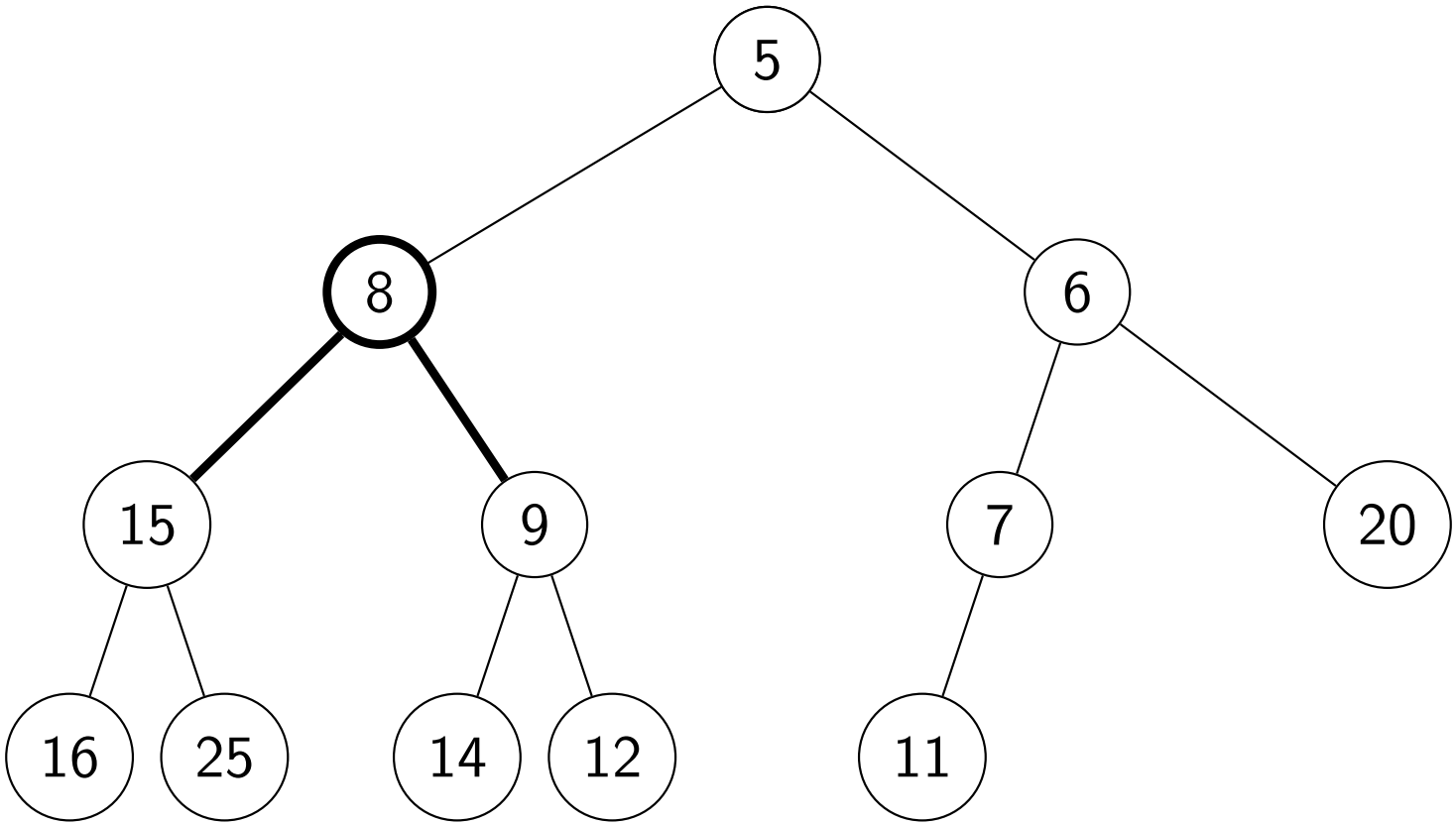

Intercambiamos con el hijo con mayor prioridad

# down-heap bubbling



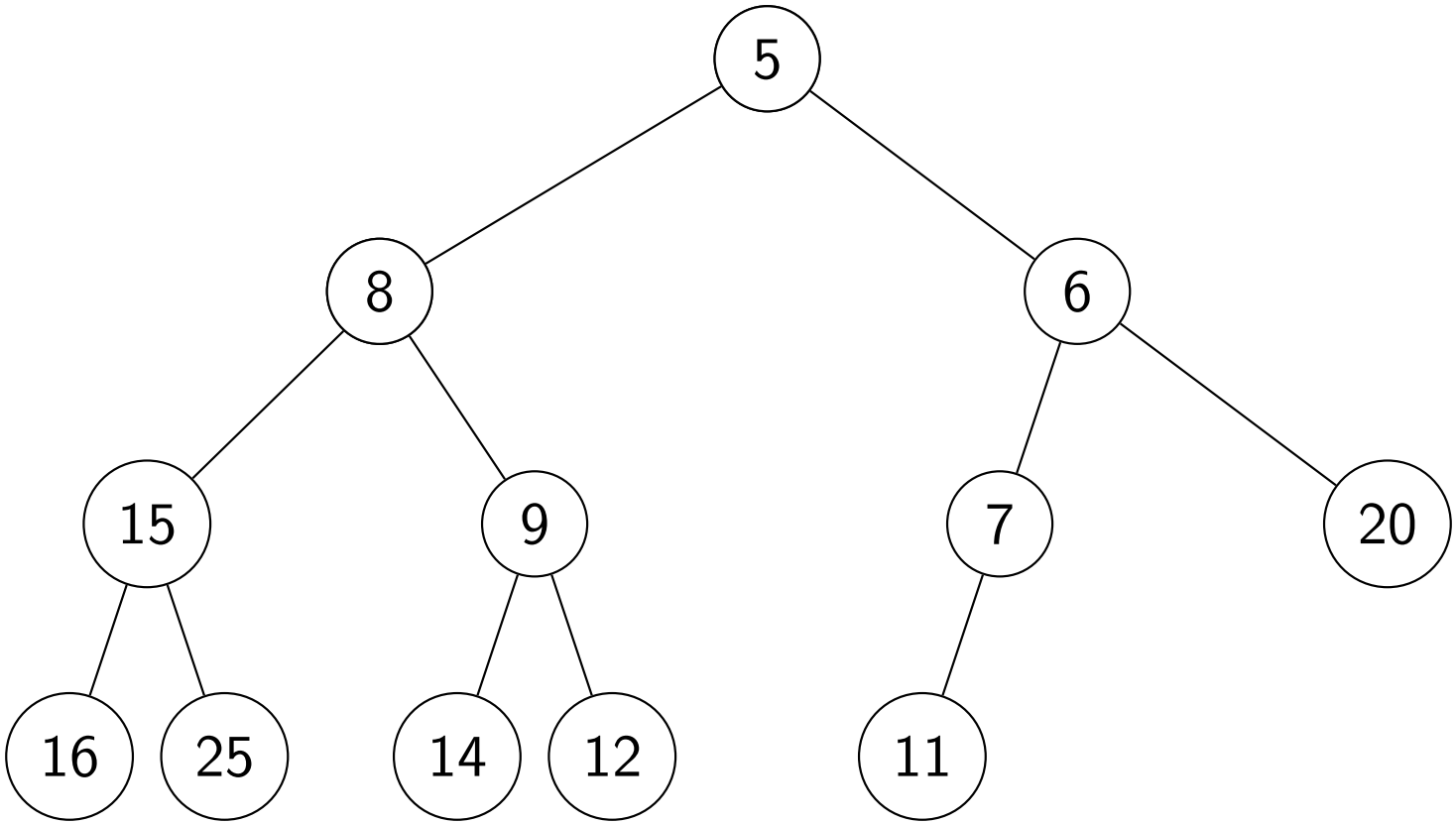

Intercambiamos con el hijo con mayor prioridad

# down-heap bubbling




¿violamos la heap-order property?

# down-heap bubbling

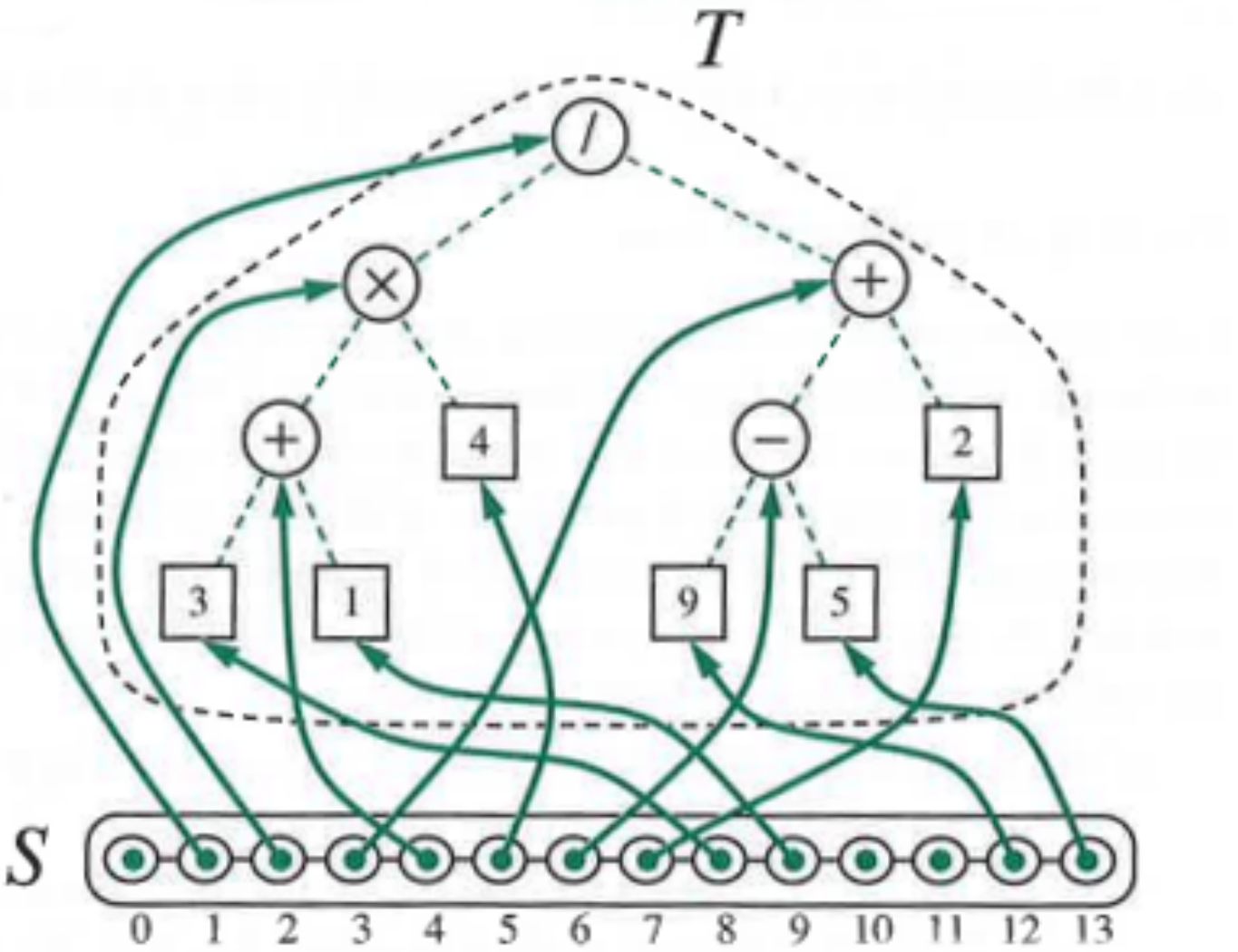



FIN

# Implementando un árbol binario con un Array

- Un **árbol binario (casi)completo** se puede implementar mediante un **array**
- Como el árbol es perfecto es todos los niveles menos el último
- En el último nivel se meten de izquierda a derecha, es decir, **consecutivamente** en el array
- Dado un nodo en el indice $i$ en el array
  - su padre *siempre* esta en el indice $(i-2)/2$ (si existe)
  - su hijo izquierdo *siempre* esta en el indice $i*2+1$ (si existe)
  - su hijo derecho *siempre* esta en el indice $i*2+2$ (si existe)
- Esto nos permite tener complejidad $O(1)$ para
  - En las inserciones por el final
  - En el borrado del último elemento
  - Las operaciones de intercambio entre dos nodos
- Con esta implementación conseguimos que la inserción y el borrado tengan complejidad $O(log(n))$

# Implementando un árbol binario con un Array



# Heap-sort

- Ya hemos visto que en una cola con prioridad implementada con un montículo, las inserciones se pueden hacer con $O(log(n))$
- Podemos utilizar esto para implementar un algoritmo de ordenación eficiente
- El algoritmo **heap-sort** ordena los elementos de una lista con complejidad $O(n \cdot log(n))$
  - Otros algoritmos de ordenación como *bubble-sort* o *quick-sort* tienen complejidad $O(n^2)$
  - *Merge-sort* o *shell-sort* también tienen complejidad $O(n \cdot log(n))$