

자연상수 e의 의미

Question

- 자연상수 e는 다음으로 표현된다.

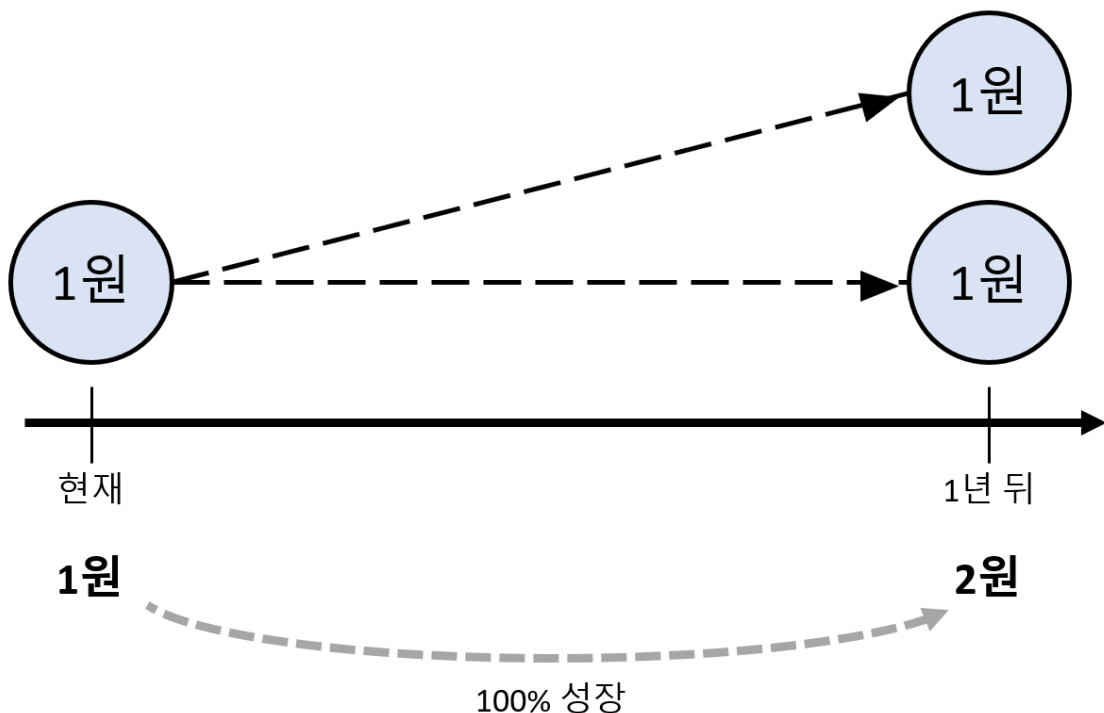
$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

- 자연상수 e에 대해 생각하다가, 자연상수에 대한 의미에 대해 생각해보기로 하였다.

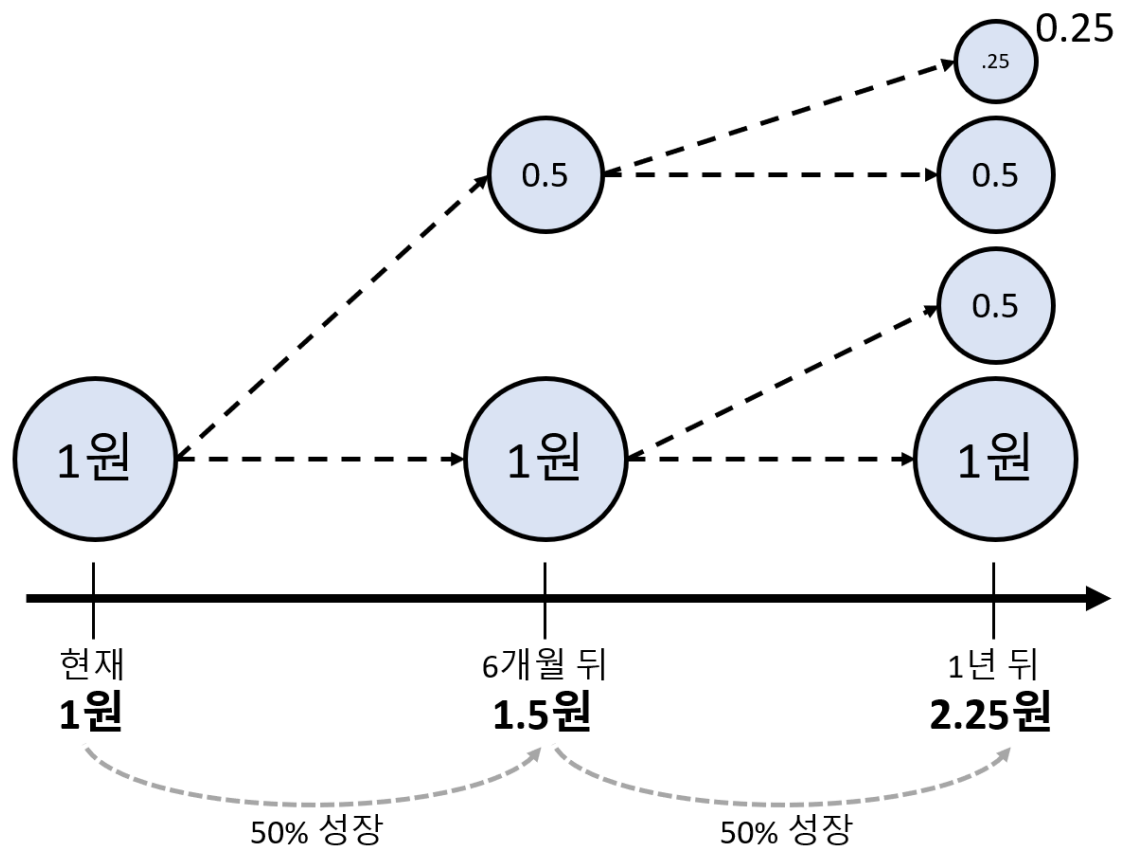
Answer

- 자연상수 e는 자연의 연속적인 성장을 표현하기 위해 고안된 상수이다.
- 100%의 성장률을 가지고 1회 연속 성장할 때 얻게 되는 성장량을 의미한다.
- 마법의 저금통이 하나 있다고 하자. 이 저금통은 1원을 넣을 때 정확히 1년 뒤에 100% 성장하여 2원이 된다.

○ $1+1=2$

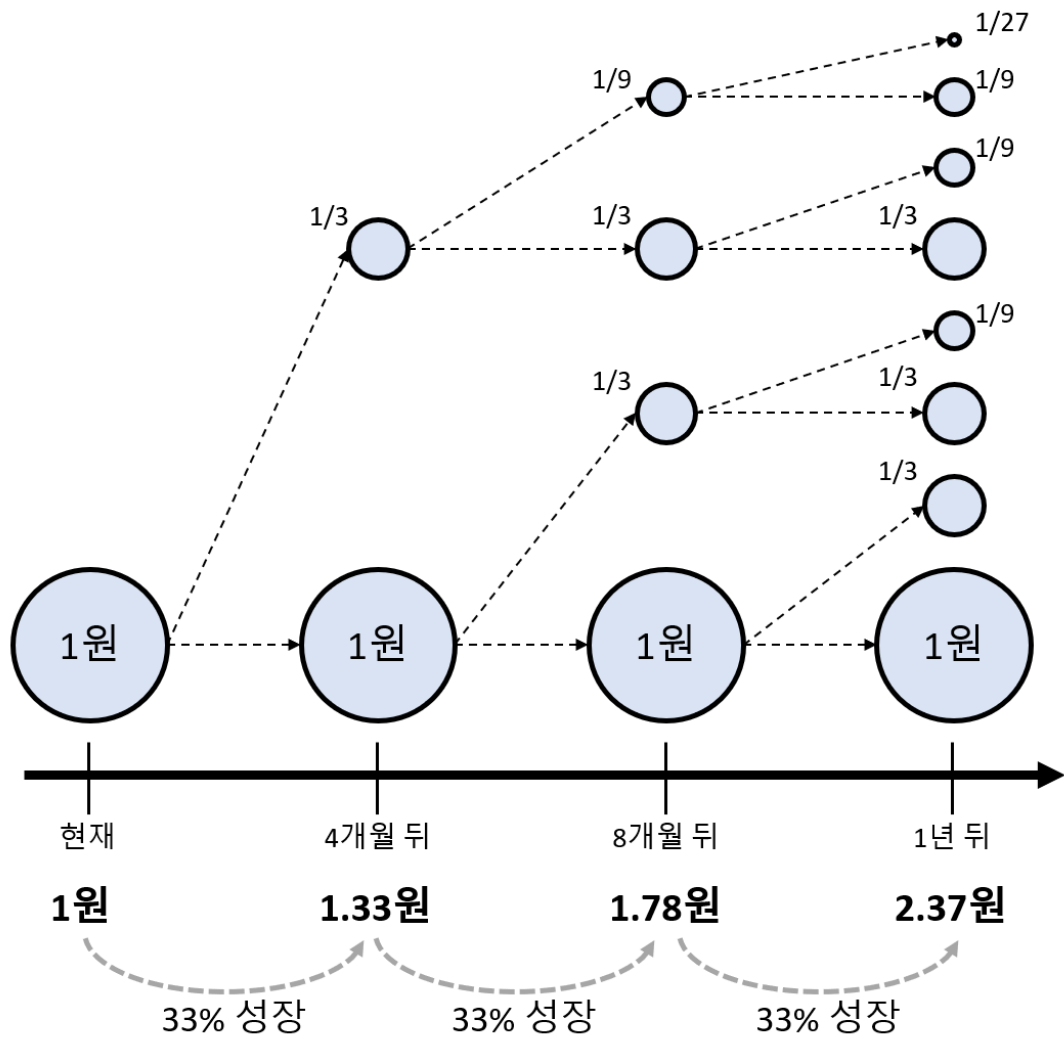


- 마법의 저금통의 수식을 바꾸어서, 6개월마다 50%씩 성장한다고 가정해보자.
- 6개월 단위로 50%씩 성장시키면 1년 뒤에는 2원이 아니라 2.25원이 된다.
 - $(1+0.5) \times (1+0.5)$
 - $= 1 \times (1 + 0.5) + 0.5 \times (1 + 0.5)$
 - 원래의 1원이 1.5원이 되는 과정이 우변의 첫번째 항, 6개월 뒤에 얻어진 0.5원이 0.75원이 되는 과정이 우변의 두 번째 항에서 표현된 것이다.



- 3번에 나누어서 성장시켜보도록 하자. 4개월에 33.33% 성장하는 저금통을 가정해보자.

○ $(1 + 1/3)^3$



- 1년 100%보다 6개월 50%, 6개월 50%보다 4개월 33%가 더 성장률이 높더라.
- 그렇다면, “무한히 많이 쪼개면 어떻게 될까? 성장량도 무한하게 커질까?”
 - 일반화를 시켜보면 다음과 같다. 같은 원리를 이용하여 100% 성장을 n 번으로 나눠서 성장시키면 다음과 같다.
 - $(1+1/n)^n$
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n)^n = 2.178$

성장횟수와 성장률

- 50% 성장률을 가지고 1회 연속 성장한다면 그 값은 어떻게 될까.

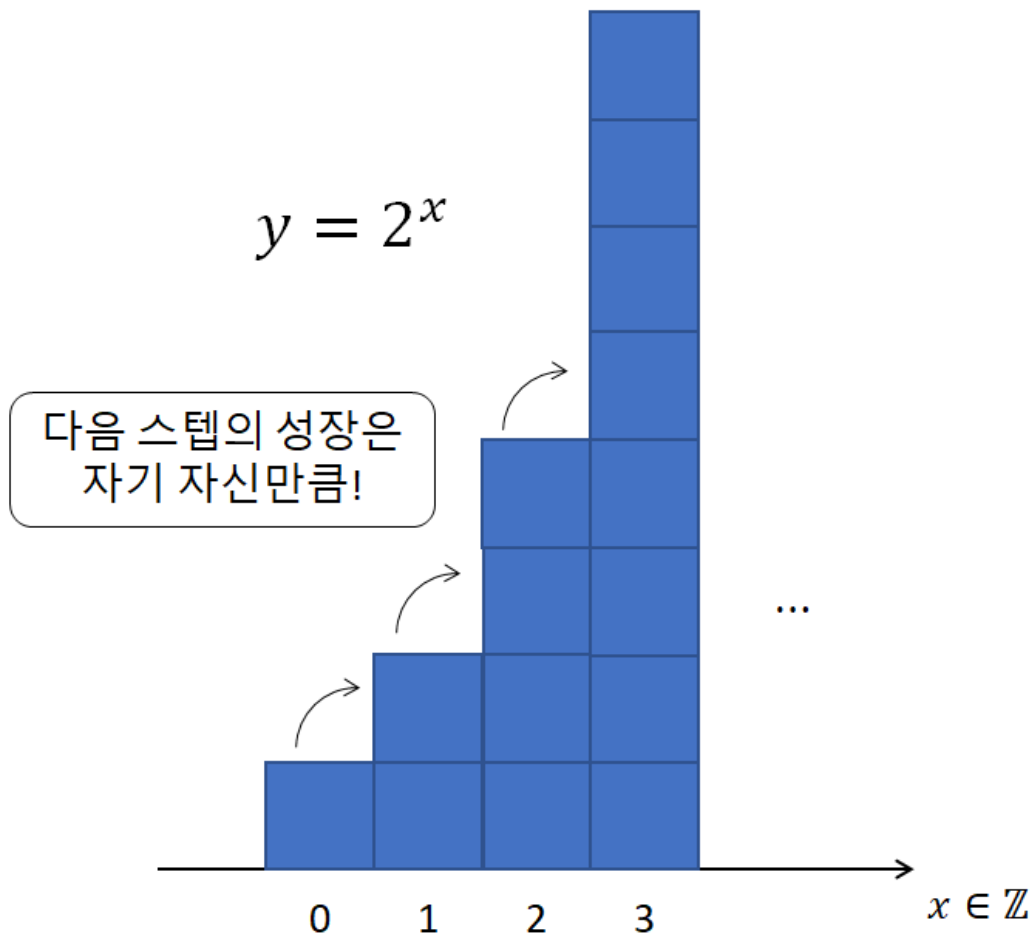
$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{50\%}{n} \right)^n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n/2} \\
 &= e^{1/2}
 \end{aligned}$$

- 100% 성장률을 가지고 2회 연속 성장한다면 그 성장률은 $e * e = e^2$ 이다.

- 즉, e^x 의 식에서 지수 x 가 갖는 의미는, e^x (성장횟수 \times 성장률) 이다.
- 따라서 다음과 같이 쓸 수 있다.
 - A 라는 성장률을 알고 있고, 이를 $A=e^x$ (성장횟수 \times 성장률) 로 나타낼 수 있다고 가정한다.
 - $\ln(e^x(\text{성장횟수}\times\text{성장률})) = \text{성장횟수}\times\text{성장률}$

자연상수가 밑인 지수함수의 미분

- 우리는 다음을 알고 있다.
 - $d/dx(e^x)=e^x$
 - $d/dx(a^x)=a^x(\ln(a))$
- $d/dx(e^x)=e^x$ 가 정말 연속 성장을 의미하나?
 - $h=1$
 - $(f(x+1)-f(x))/1=f(x)$
 - $=f(x+1)=2f(x)$
 - 예시로는 $f=2^x$ 가 있다.



- 즉, 다음번 x 에서는 지금의 함수 크기 만큼 키워준다는 뜻이다.
- $h=0.5$
 - $(f(x+0.5)-f(x))/0.5=f(x)$
 - $=f(x+0.5)=1.5f(x)$
 - 다시 말해 매번 아주 작은 스텝에서 매우 조금씩 크게 만들겠다는 것이고 이것은 다시 말하면 연속 성장이다.

참고

- https://angeloyeo.github.io/2019/09/04/natural_number_e.html