# 第一课中的 Splay 操作均摊分析

## 1　势能分析方法回顾

回顾下均摊分析的势能方法:

$D_i$: 执行第 $i$ 步操作后的数据结构;

$D_0$: 初始数据结构;

势能函数: $\Phi : D_i \to R$, 反映操作后数据结构的势能;

$c_i$: 将 $D_{i-1}$ 变换到 $D_i$ 的实际成本;

$\hat{c}_i$: 将 $D_{i-1}$ 变换到 $D_i$ 的均摊成本, 我们有: $\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$; 所以, 总均摊成本为:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i = \sum_{i=1}^{n} c_i + \Phi(D_n) - \Phi(D_0)$$

上式中, 如果 $\Phi(D_n) - \Phi(D_0) \geq 0$, 总均摊成本 $\hat{c}_i$ 将是总实际成本 $c_i$ 的一个上限。同时, 如果 $\Phi(D_0)$ 是这个序列中的最小值, 而且 $\Phi(D_0) = 0$, 只要证明上式中 $\Phi(D_i) \geq 0$, 就可以证明均摊成本是实际成本的一个上限。势能方法的关键是找到合适的势能函数, 使得上述估算尽量精确。因此, 如果 $\sum_{i=1}^{n} c_i$ 是 $O(\log n)$, 合理的势能函数选择应该满足 $\Phi(D_n) - \Phi(D_0)$ 也是 $O(\log n)$, 否则会影响估算的精确度。

## 2　P25 Splay 势能分析

现在我们讨论使用势能方法分析 splay 伸展树的均摊成本。

分析的关键是要找到合适的势能函数。这也是很多势能分析问题的难点所在。我们注意到 Splay 操作中, 会将所访问的节点翻转到根节点; 同时, 翻转代价高的操作往往更大程度上的降低了树高 (比如前面例子中, 将节点 1 从叶节点位置翻转到根节点, 大致将树高缩减为原来的一半)。所以我们考虑一个跟节点高度相关的 (或类似的) 势能函数。

我们注意到在 Splay 操作中, 几乎每个节点的高度都会改变, 哪怕该节点为根节点的子树没有任何变化。如果我们直接使用节点高度作为势能函数, 后续的数学计算与推导会变得非常复杂。我们希望有一个可以简化后续数学推导的势能函数。

一个可用的势能函数是树中所有节点的 rank 之和:

$$\Phi(T) = \sum_{i=1}^{n} \log S(i)$$

其中 $S(i)$ 指的是子树 $i$ 中的节点数 (包括节点 $i$)。我们用 $R(i)$ 表示节点 $i$ 的 rank, $R(i) = \log S(i)$。选取 rank 之和作为势能函数的好处是除了 $X, P, G$ 三个节点外, 其他节点在 splay 操作中 rank 保持不变, 因而可以简化计算。

## 3　P26 Splay 势能分析

势能函数 $\Phi(T) = \sum_{i \in T} R(i)$。对于我们刚才学过的 3 种 splay 操作: zig、zig-zig、zig-zag, 我们使用 $R_2$ 表示操作后的势能, $R_1$ 表示操作前势能。首先是 zig 操作, 做了个单旋, 成本为 1; 从 PPT 上的 zig

操作示意图中可以看出，在整个操作中只有 $X$ 和 $P$ 的 rank 值有变化。所以我们有:

$$\hat{c}_i = 1 + R_2(X) - R_1(X) + R_2(P) - R_1(P)$$

由于节点 $P$ 由根节点变为非根节点，我们有 $R_2(P) - R_1(P) \leq 0$，因此 $\hat{c}_i \leq 1 + R_2(X) - R_1(X)$。既然 $R_2(X) - R_1(X) \geq 0$，我们有 $\hat{c}_i \leq 1 + 3(R_2(X) - R_1(X))$。

对于 zig-zag 操作，实际成本是两次旋转，为 2。因此，

$$\hat{c}_i = 2 + R_2(X) - R_1(X) + R_2(P) - R_1(P) + R_2(G) - R_1(G)$$

从左图中看到，操作前 G 是根节点，操作后 X 是根节点，他们的 rank 相同，因此，$\hat{c}_i = 2 - R_1(X) + R_2(P) - R_1(P) + R_2(G)$。同时，操作后我们可以看到 $S_2(P) + S_2(G) \leq S_2(X)$，由书上的 lemma 11.4，我们可以得出：$R_2(P) + R_2(G) \leq R_2(x) - 2$。故我们有:

$$\hat{c}_i \leq 2(R_2(X) - R_1(X))$$

zig-zig 的推导就留给同学们自己完成。

最后，给定一个伸展树上访问节点 $X$ 的一系列 M 个 splay 操作（zig、zigzig、zigzag），其中最多只会有 1 个 zig。把他们都给加起来后，可得:

$$\sum_{i=1}^{M} \hat{c}_i \leq 3(R_M(X) - R_1(X)) + 1$$

注意到结束操作后，$X$ 是新的根节点，所以 $R_M(X) = R_1(T)$，所以我们有

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i \leq 3(R_1(T) - R_1(X)) + 1$$

很明显，均摊成本是 $O(\log n)$ 级别的。

# 4 $M$ 个 Splay 操作均摊分析

注：上节课结束的时候，有同学来问：你上面的证明说明每个操作的均摊成本是 $O(\log n)$ 级别的，这和上课讲到的例子矛盾吗？上课有个例子对退化成链表的树的叶节点做 Splay 操作，复杂度为 $O(n)$。其实和我们这个证明是不矛盾的。上面证明的结论是：$\hat{c}_i = O(\log n)$；而那个例子中，$c_i = O(n)$。这位同学接着问：我们不是应该证明 $M$ 个连续操作的成本不大于 $O(M \log n)$ 吗？是的，这不难。

我们接下来证明由空树开始的 $M$ 个操作的总成本不大于 $O(M \log n)$。令 $T_0$ 为操作前的伸展树，$T_i$ 为第 $i$ 次操作后的伸展树（$1 \leq i \leq M$），$c_i$ 为第 $i$ 次操作的实际成本，$\hat{c}_i$ 为第 $i$ 次操作的均摊成本，我们有：$\hat{c}_i = c_i + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1})$。$M$ 个连续操作的均摊成本可以表示为:

$$\sum_{i=1}^{M} \hat{c}_i = \sum_{i=1}^{M} c_i + \Phi(T_M) - \Phi(T_0)$$

上式可以变换为：$\sum_{i=1}^{M} c_i = \sum_{i=1}^{M} \hat{c}_i + \Phi(T_0) - \Phi(T_M) \leq \sum_{i=1}^{M} \hat{c}_i + \Phi(T_0)$。由于我们操作是从空树开始，$\Phi(T_0) = 0$，因此我们有：$\sum_{i=1}^{M} c_i \leq \sum_{i=1}^{M} \hat{c}_i = O(M \log n)$。