Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Filip Binkiewicz
Nr albumu: 332069

Własność A dla kompleksów kostkowych CAT(0)

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
prof. dr hab. Sławomira Nowaka
Instytut Matematyki

Czerwiec 2015

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data   Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data   Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

Praca ta skupia się na dowodzie, iż kompleksy kostkowe CAT(0) mają własność A.

Słowa kluczowe

Kompleks kostkowy CAT(0), własność A

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.0 Matematyka, Informatyka:
11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

14 Algebraic Geometry

Tytuł pracy w języku angielskim

Property A for CAT(0) cube complexes

Spis treści

Motywacja

Motywacja bpeaasdgdagafg

Rozdział 1

Wprowadzenie

Pierwszy rozdział tej pracy poświęcę przypomnieniu podstawowych definicji, twierdzeń i przykładów dotyczących jej tematu. Aby zachować ciągłość pracy, postaram się uniknąć przytaczania rozległych dowodów. Dla zainteresowanych w odpowiednich miejscach znajdą się odsyłacze do literatury.

1.1. Przestrzenie CAT(0)

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Odcinkiem geodezyjnym nazywamy przekształcenie izometryczne $\mathbb{R} \supset I \xrightarrow{\rho} X$, gdzie $I = [a, b]$ jest odcinkiem. Przestrzeń X nazwiemy (jednoznacznie) geodezyjną, jeśli każde dwa punkty można połączyć (jednoznacznie wyznaczonym) odcinkiem geodezyjnym.

Przykład 1.1.1. Każda przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^n$ jest jednoznacznie geodezyjna, jak również każdy jej wypukły podzbiór. Sfera S^2 jest geodezyjna, ale nie jednoznacznie - dwa bieguny można połączyć ścieżką geodezyjną na nieskończenie wiele sposobów. Każdy spójny graf metryczny jest przestrzenią geodezyjną.

Dalej będziemy rozważać przestrzenie geodezyjne. Dla wygody przez $[x, y]$ będziemy oznaczać (dowolny) odcinek geodezyjny łączący $x \in X$ z $y \in X$ (a dokładniej obraz tego odcinka).

Zwróćmy uwagę, że jeśli X jest przestrzenią geodezyjną, to dla każdej trójki $(x, y, z) \in X^3$ istnieje trójka $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in (\mathbb{R}^2)^3$ taka, że $d(x, y) = d_{\mathbb{R}^2}(\overline{x}, \overline{y})$, $d(x, z) = d_{\mathbb{R}^2}(\overline{x}, \overline{z})$, $d(y, z) = d_{\mathbb{R}^2}(\overline{y}, \overline{z})$. Innymi słowy, każdemu trójkątowi z X można przypisać trójkąt z przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$ o bokach takiej samej długości. Taki trójkąt jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izometrii przestrzeni $\mathbb{R}^2$ i nazwiemy go trójkątem porównania (x, y, z).

Definicja 1.1.1. Powiemy, że przestrzeń geodezyjna X jest **CAT(0)**, jeśli dla każdej trójki $(x, y, z) \in X^3$ oraz punktu $p \in [y, z]$ oraz odpowiadającym im trójkątowi porównania $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in (\mathbb{R}^2)^3$ i punktowi $\overline{p} \in [\overline{y}, \overline{z}]$ zachodzi nierówność:

$$d(x, p) \leqslant d_{\mathbb{R}^2}(\overline{x}, \overline{p})$$

Innymi słowy, w przestrzeniach CAT(0) trójkąty są „szczuplejsze” niż w przestrzeni euklidesowej. O takich przestrzeniach powiemy, że mają niedodatnią krzywiznę.

Przykład 1.1.2. Nietrudno jest o kilka przykładów takich przestrzeni:

- Każda przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^n$ jest CAT(0). Wówczas wymieniona nierówność jest po prostu równością.

- Graf metryczny jest przestrzenią CAT(0) wtedy i tylko wtedy, gdy jest drzewem.

Uwaga 1.1.1. Każda przestrzeń CAT(0) jest jednoznacznie geodezyjna.

Dowód. Przypuśćmy przeciwnie i niech $x, y \in X$ łączą dwa różne odcinki geodezyjne, powiedzmy $[x, y], \overline{[x, y]}$. Wówczas istnieją $[x, y] \ni p \neq \overline{p} \in \overline{[x, y]}$ takie, że $d(x, p) = d(x, \overline{p})$ oraz $d(y, p) = d(y, \overline{p})$. Wówczas trójkątowi $(x, y, \overline{p})$ w $\mathbb{R}^2$ odpowiada trójkąt zdegenerowany, zaś $d(p, \overline{p}) > 0$, co przeczy nierówności CAT(0) □

Wniosek 1.1.1. Sfera S^2 nie jest przestrzenią CAT(0). Płaszczyzna $\mathbb{R}^2$ wyposażona w metrykę pochodzącą od normy ℓ_1 nie jest przestrzenią CAT(0)

1.2. Kompleksy kostkowe CAT(0)

Niech $K = [0, 1]^n$ będzie n-wymiarową kostką. Będzie to podstawowy „budulec" interesujących nas przestrzeni. Przez ścianę o kowymiarze równym 1 będziemy rozumieć zbiór

$$F_{i,\varepsilon} = \{x \in K : \ x_i = \varepsilon\}, \quad \text{dla } i = 1 \ldots n \text{ oraz } \varepsilon \in \{0, 1\}$$

Wszystkie ściany o niższym kowymiarze (o wyższym wymiarze) można otrzymać jako przecięcie ścian o wyższym kowymiarze.

Definicja 1.2.1. Niech K, K' będą dwiema kostkami oraz $F \subset K, \ F' \subset K'$ będą ich ścianami. **Sklejeniem** (lub **przyłączeniem**) K z K' nazwiemy izometrię $\varphi : F \to F'$.

Definicja 1.2.2. Przypuśćmy, że $\mathcal{K}$ jest zbiorem kostek (dla każdego $K \in \mathcal{K}$ istnieje $n(K) \in \mathbb{N}$ takie, że $K \simeq [0, 1]^{n(K)}$), zaś $\mathcal{S}$ - zbiorem sklejeń elementów $\mathcal{K}$ (każdemu $\varphi \in \mathcal{S}$ odpowiadają kostki $K = K(\varphi), K' = K'(\varphi) \in \mathcal{K}$ oraz ściany $F \subset K, F' \subset K'$. Załóżmy wreszcie, że taka para $(\mathcal{K}, \mathcal{S})$ spełnia następujące warunki:

1. Żadna kostka nie jest sklejona sama ze sobą.

2. Dla każdych dwóch kostek $K \neq K'$ istnieje co najwyżej jedno sklejenie K z K'.

Wówczas w następujący sposób można zdefiniować **kompleks kostkowy**:

$$X = \left(\bigsqcup_{K \in \mathcal{K}} C \right) \Big/ \sim$$

gdzie $\sim$ dla każdego $\varphi \in \mathcal{S}$ utożsamia dziedzinę φ z jego obrazem, to znaczy:

$$\{x \sim \varphi(x) \mid \varphi \in \mathcal{S}, \ x \in \text{dom}(\varphi)\}$$

Uwaga 1.2.1. W ten sposób zdefiniowany kompleks kostkowy jest przestrzenią metryczną, przy czym metryka długości[1] indukowana jest z metryki euklidesowej na $[0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$. Odległość punktów x, y mierzona w metryce długości jest to infinum długości krzywych $\gamma : [a, b] \to X$ łączących x z y. Długość krzywej definiujemy następująco:

$$l(\gamma) = \sup_{a=t_0 \leqslant \cdots \leqslant t_n = b} \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$$

[1]length metric

Stwierdzenie 1.2.1. Z powyższej definicji łatwo wynikają następujące fakty:

- Obcięcie rzutowania $p : \bigsqcup_{K \in \mathcal{K}} \to X$ do jednej kostki $K \in \mathcal{K}$
- Niepuste przecięcie dwóch kostek jest ścianą obydwu.

Przykład 1.2.1. Łatwo o kilka prostych przykładów:

- Rozważmy graf metryczny bez wierzchołków izolowanych, w którym każda krawędź ma długość 1. Każda krawędź jest izometryczna z $[0, 1]$, zaś sklejenia to po prostu izometrie punktów. Jest to prosty przykład kompleksu kostkowego.
- Torus można interpretować jako kompleks kostkowy. Rozważmy zbiór $[0, 3] \times [0, 3] \subset \mathbb{R}^2$, w którym można wprowadzić podział na dziewięć części izometrycznych z $[0, 1]^2$. Wtedy odpowiednie izometrie prowadzą do konstrukcji torusa (rysunek).

1.3. Własność A

Własność A jest pewnym przeniesieniem pojęcia średniowalności dla przestrzeni metrycznych. Przed właściwym wprowadzeniem tego pojęcia przypomne kilka podstawowych definicji dotyczących geometrii zgrubnej.

Przez X, Y będziemy oznaczać przestrzenie metryczne, d będzie oznaczać metrykę pochodzącą z przestrzeni, z której pochodzą jej argumenty. Jeśli będzie to konieczne, przez d_X, d_Y będziemy dla ścisłości oznaczać metryki pochodzące odpowiednio z X i Y.

Definicja 1.3.1. Powiemy, że funkcja $\varphi : X \to Y$ jest **zgrubna**, jeśli spełnia następujące dwa warunki:

- (*Bornologiczność*) Dla każdego $R > 0$ istnieje $S > 0$ takie, że
$$d(x_1, x_2) < R \Rightarrow d\left(\varphi(x_1), \varphi(x_2)\right) < S$$
- (*Właściwość*) Dla każdego $S > 0$ istnieje $R > 0$ takie, że
$$d\left(\varphi(x_1), \varphi(x_2)\right) < S \Rightarrow d(x_1, x_2) < R$$

Przykład 1.3.1. Zanurzenie $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ jest zgrubne. Każde przekształcenie liniowe $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \to an+b$ jest zgrubne. Przekształcenie $\mathbb{Z} \ni n \to n^2 \in \mathbb{Z}$ nie jest zgrubne, bo nie jest bornologiczne ($d(n, n+1) = 1$, a $d(n^2, n^2 + 2n + 1) = |2n + 1|$ jest dowolnie duże).

Powiemy, że dwa przekształcenia $f_1, f_2 : X \to Y$ są blisko, jeśli istnieje $C > 0$ takie, że
$$d(f_1(x), f_2(x)) < C \text{ dla każdego } x \in X$$
Zbiór $A \subset X$ jest r-gęsty, jeśli dla każdego $x \in X$ istnieje element $a \in A$ taki, że $d(x, a) < r$. Zbiór A jest zgrubnie gęsty, jeśli jest r-gęsty dla pewnego $r > 0$.

Definicja 1.3.2. Powiemy, że przestrzenie X, Y są **zgrubnie równoważne**, jeśli istnieją przekształcenia zgrubne $\varphi : X \to Y$, $\psi : Y \to X$ takie, że $\varphi \circ \psi$ jest blisko id_Y, zaś $\psi \circ \varphi$ jest blisko id_X. Przestrzenie X, Y są zgrubnie równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\varphi : X \to Y$ takie, że $\varphi(X) \subset Y$ jest podzbiorem zgrubnie gęstym.

Uwaga 1.3.1. Każda przestrzeń metryczna X zawiera dyskretny podzbiór zgrubnie gęsty.

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $\mathcal{D} = \{D \subset X : \forall_{x_1,x_2 \in D,\ x_1 \neq x_2}\ d(x_1,x_2) > \varepsilon\}$. Rodzina $\mathcal{D}$ jest niepusta oraz każdy łańcuch jest ograniczony z góry przez swoją sumę. Wobec lematu Kuratowskiego- Zorna istnieje więc maksymalny element $D_0 \in \mathcal{D}$. Jest on ε- gęstym podzbiorem X. Istotnie, załóżmy przeciwnie - istnieje $x \in X$ taki, że $d(x, D_0) > \varepsilon$. Wtedy zbiór $D_0 \cup \{x\}$ należy do rodziny $\mathcal{D}$ i zawiera w sobie D_0, co przeczy maksymalności D_0 □

Definicja 1.3.3.