Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Filip Binkiewicz
Nr albumu: 332069

Własność A dla kompleksów kostkowych CAT(0)

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
prof. dr hab. Sławomira Nowaka
Instytut Matematyki

Czerwiec 2015

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data   Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data   Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

Praca ta skupia się na dowodzie twierdzenia mówiącego, że każdy skończenie wymiarowy kompleks kostkowy CAT(0) ma własność A. Rozdział pierwszy dostarcza podstawowych informacji dotyczących pojęć własności A oraz kompleksu kostkowego CAT(0). W rozdziale drugim znajduje się dowód głównego twierdzenia.

Słowa kluczowe

Kompleks kostkowy CAT(0), własność A

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.0 Matematyka, Informatyka:
11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

14 Algebraic Geometry

Tytuł pracy w języku angielskim

Property A for CAT(0) cube complexes

Spis treści

Motywacja

Kompleksy kostkowe są pewnym naturalnym uogólnieniem pojęcia grafu na większą liczbę wymiarów - zaś własność CAT(0) odpowiada za „brak cykli”, uogólniając analogicznie przypadek szczególny - drzewa. Nie jest więc zaskakujące pytanie o ich własności - poniższa praca wprowadza podstawowe pojęcia dotyczące przestrzeni CAT(0) oraz kompleksów kostkowych. Więcej informacji na temat tych przestrzeni znaleźć można w [2], [8] bądź też [7].

W swojej pracy skupiam się na dowodzie twierdzenia mówiącego, że każdy skończenie wymiarowy kompleks kostkowy ma własność A, opierając się na [4]. Własność A, po raz pierwszy zdefiniowana przez Yu (więcej informacji w [9] lub [3]) jest pewnym uogólnieniem pojęcia średniowalności, zdefiniowanego dla grup. Definicja nawet przypomina pewne kryterium średniowalności, istnienie ciągu Følnera. Istotne jest to, iż własność A jest niezmiennikiem relacji zgrubnej równoważności, coraz częściej pojawiającej się w literaturze (więcej informacji o geometrii zgrubnej można znaleźć w [5]).

Jako główny wkład własny w treść pracy chciałbym traktować nie treść dowodu głównego twierdzenia, naśladującą [4], lecz rozdział pierwszy, w którym zawarłem podstawowe definicje, lematy i twierdzenia dotyczące pojęć istotnych w mojej pracy. Forma rozdziału pierwszego, opartego przede wszystkim na [8], [2], [9] oraz [3] ma na celu sprawić, aby do lektury konieczna była znajomość jedynie podstawowych pojęć topologii.

Wśród dowodów twierdzeń i lematów można znaleźć drobne różnice względem literatury zawartej w bibliografii, w szczególności w dowodach uwagi 1.1.1 oraz stwierdzenia 1.3.2. Zmiany te zostały wprowadzone, gdy rozumowania obecne w literaturze mogły zostać opisane w sposób bardziej szczegółowy, bądź przeciwnie - uproszczone, w zamierzeniu z pozytywnym skutkiem dla zrozumienia przez czytelnika.

Rozdział drugi, skupiający się na dowodzie głównego twierdzenia, składa się z dwóch sekcji. W pierwszej z nich znajduje się dowód własności A dla przestrzeni euklidesowych $\mathbb{R}^d$. Może wydawać się to zaskakujące, jako że fakt ten nie jest trudny do udowodnienia - okazuje się jednak, że po kilku modyfikacjach standardowy dowód własności A dla przestrzeni $\mathbb{R}^d$ daje się dość łatwo uogólnić na dowolny, skończenie wymiarowy kompleks kostkowy CAT(0). Więcej informacji dotyczących tego pomysłu znajduje się w rozdziale drugim, gdzie Czytelnik będzie już zaznajomiony z narzędziami służacymi do dowodu, w uwadze 2.0.1.

Rozdział 1

Wprowadzenie

Pierwszy rozdział tej pracy poświęcę przypomnieniu podstawowych definicji, twierdzeń i przykładów dotyczących jej tematu. Aby zachować ciągłość pracy, postaram się uniknąć przytaczania rozległych dowodów. Dla zainteresowanych w odpowiednich miejscach znajdą się odsyłacze do literatury.

1.1. Własność A

Własność A jest pewnym przeniesieniem pojęcia średniowalności na przestrzenie metryczna. Przed właściwym wprowadzeniem tego pojęcia przypomnę kilka podstawowych definicji dotyczących geometrii zgrubnej.

Przez X, Y będziemy oznaczać przestrzenie metryczne, d będzie oznaczać metrykę pochodzącą z przestrzeni, z której pochodzą jej argumenty. Jeśli będzie to konieczne, przez d_X, d_Y będziemy dla ścisłości oznaczać metryki pochodzące odpowiednio z X i Y.

Definicja 1.1.1. Powiemy, że funkcja $\varphi : X \to Y$ jest **zgrubna**, jeśli spełnia następujące dwa warunki:

- (*Bornologiczność*) Dla każdego $R > 0$ istnieje $S > 0$ takie, że

$$d(x_1, x_2) < R \Rightarrow d\left(\varphi(x_1), \varphi(x_2)\right) < S$$

- (*Właściwość*) Dla każdego $S > 0$ istnieje $R > 0$ takie, że

$$d\left(\varphi(x_1), \varphi(x_2)\right) < S \Rightarrow d(x_1, x_2) < R$$

Przykład 1.1.1. Zanurzenie $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ jest zgrubne. Każde przekształcenie liniowe $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \to an+b$ jest zgrubne. Przekształcenie $\mathbb{Z} \ni n \to n^2 \in \mathbb{Z}$ nie jest zgrubne, bo nie jest bornologiczne ($d(n, n+1) = 1$, a $d(n^2, n^2 + 2n + 1) = |2n + 1|$ jest dowolnie duże).

Powiemy, że dwa przekształcenia $f_1, f_2 : X \to Y$ są blisko, jeśli istnieje $C > 0$ takie, że

$$d(f_1(x), f_2(x)) < C \text{ dla każdego } x \in X$$

Definicja 1.1.2. Powiemy, że przestrzenie X, Y są **zgrubnie równoważne**, jeśli istnieją przekształcenia zgrubne $\varphi : X \to Y$, $\psi : Y \to X$ takie, że $\varphi \circ \psi$ jest blisko id_Y, zaś $\psi \circ \varphi$ jest blisko id_X.

Definicja 1.1.3. Niech $r > 0$. Powiemy, że zbiór $A \subset X$ jest r-gęsty, jeśli dla każdego $x \in X$ istnieje element $a \in A$ taki, że $d(x, a) < r$. Zbiór A jest **zgrubnie gęsty**, jeśli jest r-gęsty dla pewnego $r > 0$.

Uwaga 1.1.1. Każda przestrzeń metryczna X zawiera dyskretny podzbiór zgrubnie gęsty.

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $\mathcal{D} = \{D \subset X : \forall_{x_1,x_2 \in D,\ x_1 \neq x_2}\ d(x_1, x_2) > \varepsilon\}$. Rodzina $\mathcal{D}$ jest niepusta oraz każdy łańcuch jest ograniczony z góry przez swoją sumę. Wobec lematu Kuratowskiego-Zorna istnieje więc maksymalny element $D_0 \in \mathcal{D}$. Jest on ε-gęstym podzbiorem X. Istotnie, załóżmy przeciwnie - istnieje $x \in X$ taki, że $d(x, D_0) > \varepsilon$. Wtedy zbiór $D_0 \cup \{x\}$ należy do rodziny $\mathcal{D}$ i zawiera w sobie D_0, co przeczy maksymalności D_0 □

Definicja 1.1.4. Przestrzeń dyskretna X ma **własność A**, jeśli dla każdego $R > 0$ oraz $\varepsilon > 0$ istnieje rodzina niepustych, skończonych zbiorów $A_x \subset X \times \mathbb{N}$ indeksowana $x \in X$ oraz stała $S > 0$ taka, że spełnione są następujące warunki:

1. Dla każdych dwóch $x, x' \in X$ zachodzi

$$d(x, x') < R \Rightarrow \frac{\#(A_x \Delta A_{x'})}{\#A_x} < \varepsilon$$

2. Dla dowolnego elementu $(x', n) \in A_x$ zachodzi

$$d(x, x') \leqslant S$$

Dowolna przestrzeń metryczna ma własność A, jeśli zawiera zgrubnie gęsty podzbiór o tej własności. Symbol # oznacza tu liczbę elementów zbioru, zaś symbol Δ - operację różnicy symetrycznej (a więc $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$)

Uwaga 1.1.2. Własność A jest niezmiennikiem zgrubnej równoważności przestrzeni dyskretnych. Dokładniej, jeśli przestrzenie dyskretne X, Y są zgrubnie równoważne, to X ma własność A wtedy i tylko wtedy, gdy Y ma własność A.

Uwaga ta jest bezpośrednią konsekwencją poniższego lematu:

Lemat 1.1.1. *Jeśli $\varphi : X \to Y$ jest przekształceniem zgrubnym przestrzeni dyskretnych oraz Y ma własność A, to X ma własność A.*

Dowód. Łatwo sprawdzić, że istnieje funkcja $\psi : Y \to X$ taka, że

$$d(y, \varphi(\psi(y))) \leqslant d(y, \varphi(X)) \text{ dla każdego } y \in Y$$

W tym celu wystarczy dla każdego $y \in Y$ wybrać $x \in X$ taki, że $\varphi(x)$ jest odpowiednio blisko y i ustalić $x = \psi(y)$.

Ustalmy teraz $R > 0,\ \varepsilon > 0$. Przekształcenie φ jest zgrubne, zatem istnieje R_0 takie, że

$$d(x, x') < R \Rightarrow d(\varphi(x), \varphi(x')) < R_0$$

Dla stałych R_0, ε istnieje rodzina $\{B_y \subset Y \times \mathbb{N}\}_{y \in Y}$ indeksowana $y \in Y$ oraz stała S' spełniająca warunki definicji własności A. Zdefiniujmy teraz

$$X \times \mathbb{N} \supset A_x = \{(x', n) :\ n \leqslant \#\{(y, m) \in B_{\varphi(x)} :\ \psi(y) = x'\}\}$$

Sprawdzimy, że rodzina ta spełnia warunki definicji 1.1.4. Jeśli $d(x,x') < R$, to $d(\varphi(x),\varphi(x')) < R'$, a więc

$$\frac{\#(A_x \Delta A_{x'})}{\#A_x} \leqslant \frac{\#B_{\varphi(x)}\Delta B_{\varphi(x')}}{\#B_{\varphi(x)}} < \varepsilon$$

Załóżmy wreszcie, że $(x',n) \in A_x$. Wówczas istnieje para $(y,m) \in B_{\varphi(x)}$ taka, że $\psi(y) = x'$. Wówczas $d(y,\varphi(x)) \leqslant S'$ oraz

$$d(\varphi(x),\varphi(x')) \leqslant d(\varphi(x),y) + d(y,\varphi(x')) = d(\varphi(x),y) + d(y,\varphi(\psi(y))) \leqslant 2S' + 1$$

Korzystając znów ze zgrubności φ, możemy znaleźć stałą S taką, aby

$$d(\varphi(x),\varphi(x')) < 2S' + 1 \Rightarrow d(x,x') < S$$

Otrzymujemy więc, że $d(x,x') < S$, co kończy dowód. □

W dalszych rozważaniach będziemy korzystać z następującej charakteryzacji własności A:

Stwierdzenie 1.1.1. Dyskretna przestrzeń metryczna X ma własność A wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg rodzin funkcji o skończonym nośniku $f_{n,x} : X \to \mathbb{N}\cup\{0\}$, indeksowany $x \in X$, oraz ciąg $S_n \in \mathbb{R}_+$ taki, że

1. Dla każdego n oraz x nośnikiem $f_{n,x}$ jest $B(S_n, x)$.
2. Dla każdego $R > 0$ ciąg
$$\frac{\|f_{n,x} - f_{n,x'}\|}{\|f_{n,x}\|}$$
zbiega jednostajnie do zera na zbiorze $\{(x,x') :\ d(x,x') \leqslant R\}$ przy $n \to \infty$. Norma $\|\cdot\|$ oznacza normę ℓ_1 na przestrzeni funkcji na o skończonym nośniku określonych na X.

Dowód. Powyższe warunki są równoważne z następującym: dla każdego $R > 0$, $\varepsilon > 0$ istnieje rodzina funkcji o skończonym nośniku $f_x : X \to \mathbb{N}\cup\{0\}$, indeksowana $x \in X$, oraz $S > 0$ takie, że $\mathrm{supp} f_x = B(S,x)$ oraz

$$d(x,x') \leqslant R \Rightarrow \frac{\|f_x - f_{x'}\|}{\|f_x\|} < \varepsilon$$

Konieczność tego warunku wynika stąd, że przekształcenie $f_x(y) = \#\left(A_x \cap (\{y\} \times \mathbb{N})\right)$ spełnia powyższe warunki, zaś dostateczność - stąd, iż $A_x = \{(y,n) \in X \times \mathbb{N} :\ 1 \leqslant n \leqslant f_x(y)\}$ spełnia warunki definicji 1.1.4. □

Uwaga 1.1.3. W przypadku kompleksów kostkowych wystarczy drugi warunek sprawdzać dla stałej $R = 1$.

Dowód. Niech $R > 0$ oraz niech dwa wierzchołki kompleksu x oraz x' spełniają $d(x,x') < R$. Istnieje więc $\mathbb{N} \ni r < R$ oraz ciąg wierzchołków $x = x_0, \ldots, x_r = x'$, kolejno sąsiednich, stanowiących ścieżkę łączącą x z x'. Wystarczy wtedy skorzystać z nierówności trojkąta:

$$\frac{\|f_{n,x} - f_{n,x'}\|}{\|f_{n,x}\|} \leqslant \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\|f_{n,x_i} - f_{n,x_{i+1}}\|}{\|f_{n,x}\|} = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\|f_{n,x_i} - f_{n,x_{i+1}}\|}{\|f_{n,x_i}\|} \cdot \frac{\|f_{n,x_i}\|}{\|f_{n,x}\|}$$

Jeśli więc zbieżność ma miejsce na zbiorze sąsiednich wierzchołków, to składnik po prawej stronie również dąży do zera, ponieważ $\frac{\|f_{n,x}\|}{\|f_{n,x_i}\|} \to 1$, co wynika stąd, że $d(x,x_i) < R$ oraz z warunku drugiego. □

1.2. Przestrzenie CAT(0)

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Odcinkiem geodezyjnym nazywamy przekształcenie izometryczne $\mathbb{R} \supset I \xrightarrow{\rho} X$, gdzie $I = [a, b]$ jest odcinkiem. Przestrzeń X nazwiemy (jednoznacznie) geodezyjną, jeśli każde dwa punkty można połączyć (jednoznacznie wyznaczonym) odcinkiem geodezyjnym.

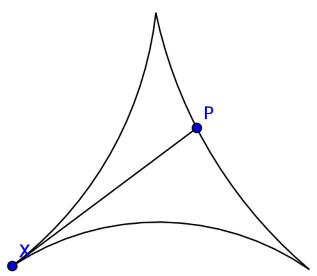
Przykład 1.2.1. Każda przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^n$ jest jednoznacznie geodezyjna, jak również każdy jej wypukły podzbiór. Sfera S^2 jest geodezyjna, ale nie jednoznacznie - dwa bieguny można połączyć ścieżką geodezyjną na nieskończenie wiele sposobów. Każdy spójny graf metryczny jest przestrzenią geodezyjną.

Dalej będziemy rozważać przestrzenie geodezyjne. Dla wygody przez $[x, y]$ będziemy oznaczać (dowolny) odcinek geodezyjny łączący $x \in X$ z $y \in X$ (a dokładniej obraz tego odcinka).

Zwróćmy uwagę, że jeśli X jest przestrzenią geodezyjną, to dla każdej trójki $(x, y, z) \in X^3$ istnieje trójka $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in (\mathbb{R}^2)^3$ taka, że $d(x, y) = d_{\mathbb{R}^2}(\overline{x}, \overline{y})$, $d(x, z) = d_{\mathbb{R}^2}(\overline{x}, \overline{z})$, $d(y, z) = d_{\mathbb{R}^2}(\overline{y}, \overline{z})$. Innymi słowy, każdemu trójkątowi z X można przypisać trójkąt z przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$ o bokach takiej samej długości. Taki trójkąt jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izometrii przestrzeni $\mathbb{R}^2$ i nazwiemy go trójkątem porównania (x, y, z).

Definicja 1.2.1. Powiemy, że przestrzeń geodezyjna X jest **CAT(0)**, jeśli dla każdej trójki $(x, y, z) \in X^3$ oraz punktu $p \in [y, z]$ oraz odpowiadającym im trójkątowi porównania $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in (\mathbb{R}^2)^3$ i punktowi $\overline{p} \in [\overline{y}, \overline{z}]$ zachodzi nierówność:

$$d(x, p) \leqslant d_{\mathbb{R}^2}(\overline{x}, \overline{p})$$



Rysunek 1.1: Intuicyjnie, trójkąty w przestrzeniach CAT(0) są „szczuplejsze” niż w przestrzeni euklidesowej.

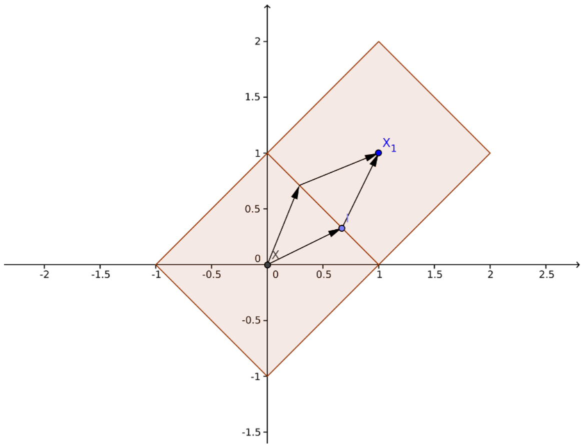
Przykład 1.2.2. Nietrudno jest o kilka przykładów takich przestrzeni:

- Każda przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^n$ jest CAT(0). Wówczas wymieniona nierówność jest po prostu równością.
- Graf metryczny jest przestrzenią CAT(0) wtedy i tylko wtedy, gdy jest drzewem.

Uwaga 1.2.1. Każda przestrzeń CAT(0) jest jednoznacznie geodezyjna.

Dowód. Przypuśćmy przeciwnie i niech $x, y \in X$ łączą dwa różne odcinki geodezyjne, powiedzmy $[x, y], \overline{[x, y]}$. Wówczas istnieją $[x, y] \ni p \neq \overline{p} \in \overline{[x, y]}$ takie, że $d(x, p) = d(x, \overline{p})$ oraz $d(y, p) = d(y, \overline{p})$. Wówczas trójkątowi $(x, y, \overline{p})$ w $\mathbb{R}^2$ odpowiada trójkąt zdegenerowany, zaś $d(p, \overline{p}) > 0$, co przeczy nierówności CAT(0) $\square$

Wniosek 1.2.1. Sfera S^2 nie jest przestrzenią CAT(0). Płaszczyzna $\mathbb{R}^2$ wyposażona w metrykę pochodzącą od normy ℓ_1 nie jest przestrzenią CAT(0)



Rysunek 1.2: Na rysunku zaznaczono dwa odcinki geodezyjne łączące punkty $x = (0,0)$ i $x_1 = (1,1)$ na płaszyźnie z metryką pochodzącą od normy ℓ_1

1.3. Kompleksy kostkowe CAT(0)

Niech $K = [0,1]^n$ będzie n-wymiarową kostką. Będzie to podstawowy „budulec” interesujących nas przestrzeni. Przez ścianę o kowymiarze równym 1 będziemy rozumieć zbiór

$$F_{i,\varepsilon} = \{x \in K : \ x_i = \varepsilon\}, \quad \text{dla } i = 1 \dots n \text{ oraz } \varepsilon \in \{0,1\}$$

Wszystkie ściany o niższym kowymiarze (o wyższym wymiarze) można otrzymać jako przecięcie ścian o wyższym kowymiarze.

Definicja 1.3.1. Niech K, K' będą dwiema kostkami oraz $F \subset K,\ F' \subset K'$ będą ich ścianami. **Sklejeniem** (lub **przyłączeniem**) K z K' nazwiemy izometrię $\varphi : F \to F'$.

Definicja 1.3.2. Przypuśćmy, że $\mathcal{K}$ jest zbiorem kostek (dla każdego $K \in \mathcal{K}$ istnieje $n(K) \in \mathbb{N}$ takie, że $K \simeq [0,1]^{n(K)}$), zaś $\mathcal{S}$ - zbiorem sklejeń elementów $\mathcal{K}$ (każdemu $\varphi \in \mathcal{S}$ odpowiadają kostki $K = K(\varphi), K' = K'(\varphi) \in \mathcal{K}$ oraz ściany $F \subset K, F' \subset K'$. Załóżmy wreszcie, że taka para $(\mathcal{K}, \mathcal{S})$ spełnia następujące warunki:

1. Żadna kostka nie jest sklejona sama ze sobą.

2. Dla każdych dwóch kostek $K \neq K'$ istnieje co najwyżej jedno sklejenie K z K'.

Wówczas w następujący sposób można zdefiniować **kompleks kostkowy**:

$$X = \left(\bigsqcup_{K \in \mathcal{K}} C \right) \Big/ \sim$$

gdzie $\sim$ dla każdego $\varphi \in \mathcal{S}$ utożsamia dziedzinę φ z jego obrazem, to znaczy:

$$\{x \sim \varphi(x) \mid \varphi \in \mathcal{S},\ x \in \mathrm{dom}(\varphi)\}$$

Jeśli istnieje stała $M > 0$ taka, że dla każdego $K \simeq [0,1]^{n(K)} \in \mathcal{K}$ zachodzi $n(K) < M$, to kompleks kostkowy X jest **skończenie wymiarowy**. Wtedy **wymiarem** tego kompleksu nazwiemy liczbę

$$\dim X = \max_{K \in \mathcal{K}} n(K)$$

Uwaga 1.3.1. W ten sposób zdefiniowany kompleks kostkowy jest przestrzenią metryczną, przy czym metryka długości indukowana jest z metryki euklidesowej na $[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$. Odległość punktów x, y mierzona w metryce długości jest to infinum długości krzywych $\gamma : [a,b] \to X$ łączących x z y. Długość krzywej definiujemy następująco:

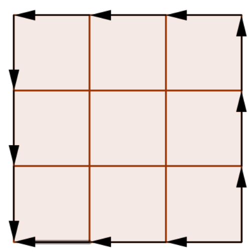
$$l(\gamma) = \sup_{a=t_0 \leqslant \cdots \leqslant t_n = b} \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$$

Stwierdzenie 1.3.1. Z powyższej definicji łatwo wynikają następujące fakty:

- Obcięcie rzutowania $p : \bigsqcup_{K \in \mathcal{K}} K \to X$ do jednej kostki $K \in \mathcal{K}$ jest iniekcją.
- Niepuste przecięcie dwóch kostek jest ścianą obydwu.

Przykład 1.3.1. Łatwo o kilka prostych przykładów kompleksów kostkowych:

- Rozważmy graf metryczny bez wierzchołków izolowanych, w którym każda krawędź ma długość 1. Każda krawędź jest izometryczna z $[0,1]$, zaś sklejenia to po prostu izometrie punktów.
- Torus można interpretować jako kompleks kostkowy. Rozważmy zbiór $[0,3] \times [0,3] \subset \mathbb{R}^2$, w którym można wprowadzić podział na dziewięć części izometrycznych z $[0,1]^2$. Wtedy odpowiednie izometrie prowadzą do konstrukcji torusa (rysunek).



Rysunek 1.3: Klasyczna konstrukcja torusa jako przykład kompleksu kostkowego. Strzałki wyznaczają izometrie odpowiednich krawędzi

Uwaga 1.3.2. Na zbiorze wierzchołków kompleksu kostkowego można wprowadzić metrykę długości krawędziowej, według której odległość dwóch wierzchołków to minimum długości łączących ich ścieżek złożonych z krawędzi kompleksu (przez krawędź rozumiemy ścianę o wymiarze 1). Z naszego punktu widzenia możemy utożsamić te metryki, z uwagi na następujący fakt:

Stwierdzenie 1.3.2. Niech X będzie skończenie wymiarowym kompleksem kostkowym CAT(0). Metryka długości na zbiorze wierzchołków X jest zgrubnie równoważna z metryką długości krawędziowej. Jeśli X jest skończenie wymiarowy, to zbiór wierzchołków z pierwszą bądź drugą z tych metryk jest sobie zgrubnie równoważny.

Dowód. Identyczność jest zgrubną równoważnością. Rzeczywiście, przez X oznaczmy zbiór wierzchołków skończenie wymiarowego kompleksu kostkowego, przez d_1 metrykę długości, zaś przed d_2-metrykę długości krawędziowej. Wówczas oczywiste jest, że dla każdych dwóch $x, y \in X$ mamy

$$d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y)$$

. Przekształcenie id : $(X, d_1) \to (X, d_2)$ jest więc bornologiczne.

Niech teraz $n = \dim(X)$. Wówczas oczywiście dla dwóch wierzchołków x, y należących do jednej kostki zachodzi $d_1(x,y) \leqslant \sqrt{n}$. Wiemy też, że liczba krawędzi w n-kostce wynosi $n * 2^{n-1}$[1], możemy więc, niezbyt oszczędnie, oszacować, że dla dwóch wierzchołków x, y należących do jednej kostki mamy $d_2(x,y) \leqslant n * 2^{n-1}$.

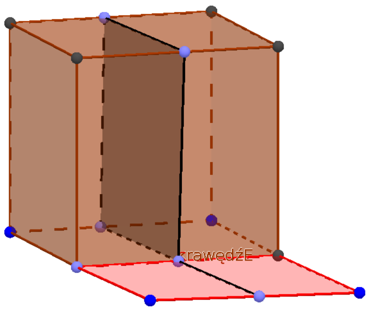
O ile więc □

Definicja 1.3.3. Niech $K \simeq [0,1]^n$ będzie kostką. Wówczas **śródkostką** K nazwiemy zbiór

$$M_i = \{x \in K : x_i = 1/2\} \text{ dla } i = 1, \ldots, n$$

Wprowadźmy na chwilę następującą relację równoważności: dwie krawędzie w kompleksie kostkowym są sobie **kwadratowo równoważne** (piszemy: $e \sim e'$), jeśli są sobie naprzeciwległe w pewnym kwadracie w tym kompleksie. Taką relację rozszerzamy do relacji równoważności.

Definicja 1.3.4. **Hiperpłaszczyzną** dualną do klasy równoważności $[e]$ (lub po prostu do krawędzi e) nazwiemy sumę śródkostek przecinających elementy klasy $[e]$.



Rysunek 1.4: Przykład hiperpłaszczyzny w kompleksie kostkowym. Ciemniejszym kolorem zaznaczono hiperpłaszczyznę dualną do krawędzi E

Zwróćmy uwagę, że hiperpłaszczyzna wyznacza podział zbioru wierzchołków na dwa podzbiory, które będziemy dalej nazywać **półpłaszczyznami**. Będzie to miało kluczowe znaczenie kombinatoryczne. Dwie hiperpłaszczyzny tworzą podział kompleksu na cztery przecięcia półpłaszczyzn. Jeśli wszystkie są niepuste, to hiperpłaszczyzny **przecinają się**. Dwa wierzchołki x, y są **oddzielone** przez hiperpłaszczyznę H, jeśli należą do różnych wyznaczonych przez nią półprzestrzeni.

Uwaga 1.3.3. Zgodnie z definicją 1.1.4 przestrzeń metryczna ma własność A, jeśli zawiera dyskretną podprzestrzeń, która ma tę własność. Oczywiście w przypadku kompleksów kostkowych szukaną podprzestrzenią jest przestrzeń wierzchołków. Dlatego też w dalszej części pracy przez X będziemy oznaczać zbiór wierzchołków kompleksu kostkowego, zaś przez x, x', y, z - wierzchołki. **Kompleksem kostkowym CAT(0)** nazwiemy oczywiście kompleks kostkowy, który jest dodatkowo CAT(0).

Zbiór hiperpłaszczyzn oddzielających x od y będziemy oznaczać przez $\mathfrak{H}(x,y)$. **Odcinkiem** łączącym x oraz y nazwiemy przecięcie wszystkich półprzestrzeni zawierających obydwa te punkty i oznaczymy $[x,y]$. Zbiór wierzchołków V nazwiemy **wypukłym**, jeśli dla każdych $x, y \in V$ również $[x,y] \subset V$.

[1]Na potrzeby tego dowodu dokładna liczba nie jest istotna - wystarczy, że jest skończona

Dla trzech wierzchołków w, x, y możemy wyróżnić ich **medianę**, zdefiniowaną jako jedyny wierzchołek należący do $[w, x] \cap [x, y] \cap [w, y]$

Dla kompleksu kostkowego CAT(0) X możemy wprowadzić brzeg kombinatoryczny. Niech funkcja σ przypisuje hiperpłaszczyźnie X jedną z wyznaczonych przez nią półprzestrzeni, przy czym dla każdych dwóch hiperpłaszczyzn H_1, H_2 zachodzi $\sigma(H_1) \cap \sigma(H_2) \neq \emptyset$. Taką funkcję nazwiemy **ultrafiltrem**.

Wierzchołek x definiuje takie przekształcenie: dla hiperpłaszczyzny H wyznacza półprzestrzeń H_x zawierającą x (rzeczywiście, dla każdych dwóch hiperpłaszczyzn H, K mamy $x \in H \cap K$). Jeśli więc oznaczymy przez $\mathfrak{U}$ zbiór wszystkich ultrafiltrów na X to wskazaliśmy iniekcję

$$\iota : X \to \mathfrak{U}$$

Wówczas elementy zbioru

$$\partial X = \mathfrak{U} \setminus \iota(X)$$

nazwiemy **krawędziami w nieskończoności**. Utożsamiając z wierzchołkiem x ultrafiltr $\iota(x)$, możemy więc zdefiniować

$$\overline{X} = X \cup \partial X$$

Powyższy zbiór nazwiemy **dopełnieniem w nieskończoności** kompleksu X.

Możemy przenieść podstawowe kombinatoryczne własności kompleksu kostkowego CAT(0) na jego dopełnienie w nieskończoności. Jeśli $z, w \in \overline{X}$, to dla hiperpłaszczyzny H przez H_z, H_w będziemy oznaczać obraz z, w (jako ultrafiltrów) na H, a więc odpowiednią półprzestrzeń (wtedy powiemy, że H_z zawiera z. Hiperpłaszczyzna H **oddziela** x od w, jeśli $H_z \neq H_w$. Można więc na $\overline{X}$ uogólnić definicję zbioru $\mathfrak{H}(x, w)$. Podobnie możemy zdefiniować odcinek $[x, w]$ jako

$$[x, w] = \bigcap H_{x,w} \quad x, w \in H_{x,w}, \; H_{x,w} - \text{ półprzestrzeń}$$

Zwróćmy uwagę, że każdy odcinek $[x, w]$ jest wypukły. Wynika to stąd, że przecięcie zbiorów wypukłych takie jest. Oczywiste jest również następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie 1.3.3. Niech $x, y, w \in X$ oraz $x \in \overline{X}$. Jeśli $w \in [x, z]$ oraz $y \in [y, w]$, to $\mathfrak{H}(y, w) \subset \mathfrak{H}(y, z)$

Uwaga 1.3.4. Na zbiorze $\overline{X}$ trudno wprowadzić metrykę, można natomiast w naturalny sposób zrobić z niego przestrzeń topologiczną. Powiemy, że ciąg wierzchołków $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset X$ zbiega do wierzchołka $x \in \overline{X}$, jeśli dla każdej hiperpłaszczyzny H zachodzi $H \in \mathfrak{H}(x_j, x)$ jedynie dla skończenie wielu j. Piszemy wówczas, że

$$x_j \xrightarrow{j \to \infty} x$$

Sekcję tę zakończymy serią lematów i twierdzeniem łączącym kompleks kostkowy z przestrzenią euklidesową.

Lemat 1.3.1. *Niech $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset X, x \in \overline{x}$ oraz niech $x_j \to x$ przy $j \to \infty$. Hiperpłaszczyzna H oddziela y od x wtedy i tylko wtedy, gdy oddziela y od prawie wszystkich[2] x_j. Inaczej:*

$$\mathfrak{H}(y, x) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} \mathfrak{H}(y, x_j)$$

[2] wszystkich, oprócz skończenie wielu

Dowód. Wystarczy wspomnieć definicję: H oddziela y od x wtedy i tylko wtedy, gdy $H_y \neq H_z$, a więc wtedy i tylko wtedy, gdy $H_y \neq H_{x_j}$ dla prawie wszystkich $j \in \mathbb{N}$. □

Lemat 1.3.2. *Niech $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset X, x \in \overline{X}$ oraz niech $x_j \to x$ przy $j \to \infty$. Ponadto niech $y, z \in X$. Wówczas jeden i tylko jeden z poniższych warunków jest prawdziwy.*

- *$y \in [z, x_j]$ dla prawie wszystkich $j \in \mathbb{N}$ (wtedy $y \in [z, x]$).*
- *$y \notin [z, x_j]$ dla prawie wszystkich $j \in \mathbb{N}$ (wtedy $y \notin [z, x]$).*

Dowód. Negacją warunku pierwszego jest warunek: $y \notin [z, x_j]$ dla nieskończenie wielu $j \in \mathbb{N}$. Wynika on łatwo z drugiego warunku. Pokażemy, że warunek drugi jest mu równoważny.

Jeśl $y \notin [z, x_j]$, to istnieje $H \in \mathfrak{H}(y, z)$ taka, że $H_z = H_{x_j}$. Jeśli jest tak dla nieskończenie wielu j, to ze skończoności zbioru $\mathfrak{H}(y, z)$ wynika, że istnieje hiperpłaszczyzna $H \in \mathfrak{H}(y, z)$ taka, że $H_z = H_{x_j}$ dla nieskończenie wielu $j \in \mathbb{N}$. Zatem $H_z = H_x = H_{x_j}$ dla prawie wszystkich $j \in \mathbb{N}$. W szczególności $y \notin [z, x_j]$ dla niemal wszystkich j, a więc $y \notin [z, x]$.

Pozostaje wykazać, że pierwszy warunek pociąga za sobą, że $y \in [z, x]$. Załóżmy że $y \notin [z, x]$. Istnieje więc hiperpłaszczyzna $H \in \mathfrak{H}(y, z)$ taka, że $H_x = H_z$, a więc $H_{x_j} = H_z$ dla niemal wszystkich $j \in \mathbb{N}$. A więc $y \notin [z, x_j]$ dla prawie wszystkich $j \in \mathbb{N}$ i otrzymujemy sprzeczność. □

Lemat 1.3.3. *Niech $x, y \in X$ oraz $z \in \overline{X}$. Wówczas przecięcie odcinków $[x, y], [x, z], [y, z]$ składa się z pojedynczego wierzchołka z X.*

Dowód. Najpierw wykażemy, że przecięcie to jest niepuste, następnie - że ma tylko jeden element.

Niech $\{z_j\}_{j=1}^{\infty} \subset X$ będzie ciągiem wierzchołków zbieżnym do z. Odcinek $[x, y]$ jest skończony i zawiera mediany $m_j = m(x, y, z_j)$. Istnieje więc $m \in [x, y]$ taki, że $m = m_j \in [x, z_j]$ dla nieskończenie wielu $j \in \mathbb{N}$. Z poprzedniego lematu wynika więc, że $m \in [x, z_j]$ dla niemal wszystkich $j \in \mathbb{N}$ oraz $m \in [x, z]$. Podobnie $m \in [y, z]$.

Załóżmy teraz, że $m \neq m'$ należą do $[x, y] \cap [x, z] \cap [y, z]$ i niech $H \in \mathfrak{H}(m, m')$. Któreś dwie z półprzestrzenie H_x, H_y, H_z są sobie równe; dla ustalenia uwagi niech $H_x = H_y$. Skoro $H_m \neq H_{m'}$, tylko jedno z nich może być równe H_x, zatem znowu dla ustalenia uwagi niech $H_m \neq H_x$. Wtedy $m \notin [x, z]$, co daje sprzeczność. □

Uwaga 1.3.5. W powyższym dowodzie skorzystaliśmy z faktu, że mamy ciąg $X \ni z_j \to z \in \overline{X}$. Istnienie takiego ciągu nie jest zupełnie oczywiste - aby je uzasadnić, należy rozważyć zbiór wszystkich hiperpłaszczyzn $H_1, H_2, \ldots$ (jest on przeliczalny) oraz dla każdego $j \in \mathbb{N}$ wybrać z_j należące do zbioru

$$\bigcap_{i=1}^{j} (H_i)_z$$

Aby uzasadnić, że powyższy zbiór jest niepusty, wystarczy skorzystać z twierdzenia Helly'ego mówiącego o przecięciach zbiorów wypukłych (patrz [1]).

Dla $x \in X, z \in \overline{X}$ przez $\mathfrak{R}_z(x)$ oznaczymy podzbiór $\mathfrak{H}(x, z)$ złożony z tych hiperpłaszczyzn, które oddzielają x od z oraz pewnego sąsiada x.

Lemat 1.3.4. *Niech X będzie kompleksem kostkowym CAT(0) oraz $\dim X < \infty$. Ponadto niech $x \in X, z \in \overline{X}$. Wówczas $\#\mathfrak{R}_z(x) \leqslant \dim X$*

Dowód. Dowód można znaleźć w [4], lemat 1.13 □

W następnym twierdzeniu uzasadnimy, że odcinki łączące wierzchołki (być może w nieskończoności) zanurzają się w odpowiednio dużą przestrzeń euklidesową. W oczywisty sposób $\mathbb{R}^d$ możemy postrzegać jako kompleks kostkowy (patrz przykład 1.3.1). Zbiorem wierzchołków jest krata $\mathbb{Z}^d$. Odcinkami są prostopadłościany - dokładniej, jeśli $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_d), \overline{y} = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{Z}^d$, to odcinkiem $[\overline{x}, \overline{y}]$ jest powłoka wypukła podzbioru $\mathbb{Z}^d$ złożonego z tych liczb, których i-ta współrzędna jest z przedziału $[x_i, y_i]$ lub $[y_i, x_i]$. Żeby włączyć do naszych rozważań wierzchołki w nieskończoności, dopuszczamy możliwość, że x_i lub $y_i = \pm\infty$ dla pewnego $i = 1 \ldots d$.

Twierdzenie 1.3.1. *Niech X będzie skończenie wymiarowym kompleksem kostkowym CAT(0), $\dim X = d$ oraz niech $x, y \in \overline{X}$. Wówczas odcinek $[x, y]$ zanurza się izometrycznie w kompleksie kostkowym $\mathbb{R}^d$.*

Wprowadźmy na zbiorze $\mathfrak{H}(x, y)$ częściowy porządek w następujący sposób:

$$H \preceq K \iff H_x \subset K_x$$

Lemat 1.3.5. *Dwie płaszczyzny $H, K \in \mathfrak{H}(x, y)$ nie są porównywalne w tym porządku wtedy i tylko wtedy, gdy się przecinają.*

Dowód. Oczywiste jest, że $H_x \cap K_x \neq \emptyset \neq H_y \cap K_y$. Dalej, $H_x \cap K_y = \emptyset \iff H_x \subset K_x \wedge H_y \cap K_x = \emptyset \iff K_x \subset H_x$. H oraz K są więc nieporównywalne przez $\preceq$ wtedy i tylko wtedy, gdy $K_x \not\subset H_x$ oraz $H_x \not\subset K_x$, a więc wtedy, gdy wszystkie cztery przecięcia są niepuste. □

Lemat 1.3.6 (Dilworth)**.** *Niech $(S, \preceq)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Łańcuchem nazwiemy podzbiór S, którego elementy są parami porównywalne, antyłańcuchem - podzbiór S nieposiadający dwóch różnych elementów porównywalnych. Jeśli zbiór S nie zawiera antyłańcucha o mocy $m + 1$, to S jest sumą rozłączną m łańcuchów.*

Dowód. Dowód lematu Dilwortha zawarty jest w [6]. □

Wniosek 1.3.1. Zbiór częściowo uporządkowany $(\mathfrak{H}(x, y), \preceq)$ jest sumą rozłączną d łańcuchów.

Dowód. Wystarczy skorzystać z twierdzenia Helly'ego, lematu Dilwortha oraz lematu 1.3.5 □

Dowód twierdzenia 1.3.1. Dowód tego twierdzenia przeprowadzimy tylko dla przypadku, gdy x jest wierzchołkiem X. Weźmy rozkład zbioru $\mathfrak{H}(x, y)$ na łańcuchy, którego istnienia dostarcza poprzedni lemat

$$\mathfrak{H}(x, y) = \bigsqcup_{i=1}^{d} \mathfrak{B}_i$$

Niech teraz

$$X \supset [x, y] \ni z \to \overline{z} = (\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_d}) \in \mathbb{Z}^d,\ \overline{z_i} = \#\{H \in \mathfrak{B}_i :\ z \in H_y\}$$

Wówczas $\overline{x} = 0$, zaś $\overline{y} = (\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_d})$, gdzie $\overline{y_i} = \#\mathfrak{B}_i, i = 1 \ldots d$. Dla każdego $z \in [x, y]$ współrzędne $\overline{z}$ są skończone oraz $\overline{z} \in [\overline{x}, \overline{y}]$.

Funkcja $z \to \overline{z}$ zanurzeniem izometrycznym. Żeby to sprawdzić, wystarczy obliczyć:

$$d(\overline{v}, \overline{w}) = \sum_{i=1}^{d} \#\{H \in \mathfrak{B}_i :\ H \in \mathfrak{H}(v, w)\} = \#\mathfrak{H}(v, w) = d(v, w)$$

□

1.4. Kombinacje

Funkcje, spełniające warunki stwierdzenia 1.1.1 będziemy konstruować przy użyciu dwumianu Newtona, a więc funkcji $\binom{n}{k}$. Kombinatorycznie funkcja ta oznacza *liczbę k-podzbiorów n-zbioru*, w szczególności jej definicja jest poprawna dla całkowitych $n \geqslant k \geqslant 0$. Przy użyciu łatwej interpretacji kombinatorycznej można udowodnić relację rekurencyjną:

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ dla $n \geqslant 0$.
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Można łatwo uogólnić tę funkcję dla wszystkich $n, k \in \mathbb{Z}$ poprzez relację:

- $\binom{n}{0} = 1$ dla $n \geqslant 0$ oraz $\binom{n}{n} = 1$ dla $n \in \mathbb{Z}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ dla wszystkich $n, k \in \mathbb{Z}$

Z powyższej definicji łatwo udowodnić kilka własności:

- $\binom{n}{k} = 0$ dla $k < 0 \leqslant n$
- $\binom{n}{k} = (-1)^{n+k}\binom{-1-r}{-1-n}$

Szczególnie przydatna okaże się druga własność, dla $k = -1$. Przyjmuje wtedy ona formę

$$\binom{n}{-1} = (-1)^{n-1}\binom{0}{-1-n}$$

Rozdział 2

Kompleksy kostkowe CAT(0) a własność A

W tym rozdziale skupimy się na dowodzie twierdzenia łączącego kompleksy kostkowe CAT(0) z własnością A. Zaczniemy od przykładu motywującego dowód głównego twierdzenia. O funkcjach $f_{n,x}$ wymienionych w stwierdzeniu 1.1.1 będziemy mówić jako o *funkcjach wagowych*. Również z warunków podanych w tym stwierdzeniu korzystać będziemy zamiast definicji własności A.

Ustalmy również pewien wymiar $\mathbb{N} \ni N \geqslant d$.

Uwaga 2.0.1. W standardowym dowodzie własności A dla przestrzeni euklidesowych jako funkcji wagowych $f_{n,x}$ używa się funkcji charakterystycznych kul o promieniu n i środku w punkcie x. W naszym dowodzie, łatwo uogólniającym się dla dowolnych kompleksów kostkowych CAT(0) o skończonym wymiarze, wprowadzimy kilka zmian, z których każda jest istotna dla rzeczonego uogólnienia. Po pierwsze, jako nośnik funkcji wagowej wybierzemy szczególny podzbiór kuli o promieniu n i środku w x. Dodatkowo, zamiast definiować, przy ustalonym n, funkcję $f_{n,x}$ tak samo, uzależnimy ten wybór od poszczególnych x.

Pierwsza sekcja tego rozdziału nie jest więc celem samym w sobie; ma za zadanie raczej przedstawić Czytelnikowi proces, który prowadził do otrzymania ostatecznego wyniku zawartego w [4]. Pominięcie jej prowadziłoby raczej nie do uniknięcia kłopotliwych obliczeń i zbędnych wyników, lecz do dodatkowej dezorientacji Czytelnika.

2.1. Własność A dla przestrzeni euklidesowych

Przykład 2.1.1. Niech T będzie $\mathbb{R}$-drzewem, a więc spójnym grafem niezawierającym cykli. Aby pokazać, że T ma własność A, ustalmy korzeń K. Dla każdego wierzchołka $x \in X$ oraz $n \in \mathbb{N}$ definiujemy funkcję wagową

$$\tilde{f}_{n,x}(y) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } y \neq K \\ n - d(x,y) & \text{jeśli } y = K \end{cases}$$

Wówczas ciąg rodzin funkcji $f_{n,x}(y) = \tilde{f}_{n,x}(y) \cdot \mathbb{1}_{B(x,n)}(y)$ spełnia warunki stwierdzenia 1.1.1

Pewna intuicja stojąca za tym przykładem jest następująca: przy n dążącym do nieskończoności rozkładamy wagę równomiernie na kuli $B(x,n)$, nadmiar zrzucając na ustalony korzeń. W pewien sposób intuicja ta okaże się użyteczna w przypadku wielowymiarowym, być może przy więcej niż jednym punkcie rozkładu nadmiaru.

Będziemy dalej oznaczać $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$.

Definicja 2.1.1. **Niedostatkiem** punktu kratowego $(y_1, \ldots, y_d) = y \in \mathbb{Z}^d$ nazwiemy liczbę

$$\delta(y) = N - \#\{1 \leqslant j \leqslant d : \ y_j \neq 0\}$$

Definicja 2.1.2. Dla wierzchołka $x \in \mathbb{Z}^d$ możemy zdefiniować ciąg rodzin funkcji wagowych następująco:

$$f_{n,x}(y) = \binom{n - d(x,y) + \delta(y)}{\delta(y)} \cdot \mathbb{1}_{[\mathbf{0},x]}(y)$$

Nietrudno zauważyć kilka własności tego ciągu. Przy założeniu, iż $N \geqslant d-1$ mamy $\delta(y) \geqslant (-1)$, a więc funkcja $f_{n,x}$ przyjmuje nieujemne wartości całkowite dla każdego $x \in \mathbb{Z}^d$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Funkcje te zależą również od niewymienionego *explicite* we wzorze N. Ponadto

$$\#\mathrm{supp} f_{x,n} = \#[\mathbf{0}, x] < \infty$$

Przy tak zdefiniowanych wagach można pokazać, iż przestrzeń $\mathbb{Z}^d$ ma własność A. Przez normę $\|f(y)\|$ na przestrzeni funkcji o skończonym nośniku będziemy rozumieć

$$\|f\| = \|f\|_{\ell_1} = \sum_{x \in \mathrm{dom}(f)} |f(x)|$$

Lemat 2.1.1. *Niech $N \geqslant d-1$ oraz $x \in \mathbb{Z}^d$. Wówczas dla tak zdefiniowanych funkcji mamy*

$$\|f_{n,x}\| = \binom{n+N}{N}$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy przez indukcję ze względu na d, dla wygody oznaczeń napiszemy więc $f_{n,x} \equiv f^d_{n,x}$. Przypadek $d = 0$ jest trywialny, gdyż $\delta(y) = N$. Załóżmy więc, że $d > 0$. Skorzystamy z rzutowania $\mathbb{Z}^d \ni (z_1, \ldots, z_d) = z \to \hat{z} = (z_2, \ldots, z_d) \in \mathbb{Z}^{d-1}$. Niech $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$.Wówczas odcinek $[\mathbf{0}, x]$ można utożsamić z $[0, x_1] \times [\mathbf{0}, \hat{x}]$, tym samym otrzymując dla każdego $\hat{y} \in [\mathbf{0}, \hat{x}]$ ciąg $y^0, y^1, \ldots, y^{|x_1|}$ (w wypadku, gdyby $x_1 < 0$, rozważamy na odcinku $[0, x_1]$ porządek $0 < 1 < 2 \cdots < x_1$

Pokażemy, że dla każdego $\hat{y} \in [\mathbf{0}, \hat{x}]$ zachodzi

$$\sum_{j=0}^{|x_1|} f^d_{n,x}(y^j) = f^{d-1}_{n,\hat{x}}(\hat{y}) \tag{2.1}$$

Załóżmy jednak na moment, że to prawda. Możemy wtedy obliczyć normę $f^d_{n,x}$:

$$\begin{aligned}
\|f^d_{n,x}\| &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} f^d_{n,x}(z) = \sum_{z \in [\mathbf{0},x]} f^d_{n,x}(z) \\
&= \sum_{\hat{y} \in [\mathbf{0},\hat{x}]} \sum_{j=0}^{|x_1|} f^d_{n,x}(z)(y^j) \overset{2.1}{=} \sum_{\hat{y} \in [\mathbf{0},\hat{x}]} f^{d-1}_{x,n}(\hat{y}) \\
&= \sum_{\hat{y} \in \mathbb{Z}^{d-1}} f^{d-1}_{n,x}(\hat{y}) = \binom{n+N}{n}
\end{aligned}$$

Aby udowodnić 2.1, należy zauważyć, iż $\delta(y^{i+1}) = \delta(\hat{y}) - 1$ dla $i \geqslant 0$ oraz iż $d(x, y^i) = d(x, y^{i+1}) + 1$, a następnie skorzystać z indukcji względem $i = |x_1|$. Dokładnie obliczenia zostawiam czytelnikowi. $\square$

Uwaga 2.1.1. Z powyższego lematu wynika dość zaskakujący, ale przydatny fakt - norma $f_{n,x}$ nie zależy od wyboru d ani x, jedynie n oraz N.

W celu udowodnienia własności A dla przestrzeni euklidesowych $\mathbb{R}^n$ należy znaleźć pewne oszacowanie normy $f_{n,x} - f_{n,x'}$ dla $x, x' \in \mathbb{Z}^n$ w rozsądnej odległości od siebie. Odpowiada za to poniższy lemat:

Lemat 2.1.2. *Dla każdego $N \geqslant d$ i sąsiednich wierzchołków $x, x' \in \mathbb{Z}^d$ mamy*

$$\|f_{n,x} - f_{n,x'}\| = 2\binom{n+N-1}{N-1}$$

Dowód. Będziemy rozróżniać funkcje wagowe dla różnych N, na potrzeby dowodu wprowadzimy więc oznaczenie $f_{n,x} \equiv f_{n,x}^N$. Mamy dla $n, k \in \mathbb{Z}$ tożsamość $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, a więc

$$\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1} \tag{2.2}$$

Niech x, x' będą sąsiednimi krawędziami i bez utraty ogólności możemy założyć, że x' jest bliżej $\mathbf{0}$ niż x. Wówczas $[\mathbf{0}, x'] \subset [\mathbf{0}, x]$ i dla każdego $y \in [\mathbf{0}, x']$ mamy $x' \in [y, x]$. Wówczas również $d(x, y) = d(x', y) + 1$. Wybierając takie y, możemy napisać:

$$\begin{aligned}
f_{n,x'}^N - f_{n,x}^N &= \binom{n - d(x',y) + \delta(y)}{\delta(y)} - \binom{n - d(x,y) + \delta(y)}{\delta(y)} \\
&= \binom{n - d(x',y) + \delta(y)}{\delta(y)} - \binom{n - d(x',y) + \delta(y) - 1}{\delta(y)} \\
&\overset{2.2}{=} \binom{n - d(x',y) + \delta(y) - 1}{\delta(y) - 1} \\
&= f_{n,x'}^{N-1}(y)
\end{aligned}$$

Z poprzedniego lematu wynika zatem, że $\sum_{y \in [\mathbf{0}, x']} \left| f_{n,x'}^N - f_{n,x}^N \right| = \|f_{n,x'}^{N-1}\| = \binom{n+N-1}{N-1}$. Do obliczenia normy $f_{n,x'}^N - f_{n,x}^N$ brakuje więc tylko ogona $\sum_{y \in [\mathbf{0},x] \setminus [\mathbf{0},x']} f_{n,x'}^N(y) - f_{n,x}^N(y)$. Łatwo go obliczyć, zauważywszy, że z lematu 2.1.1. wynika, iż

$$\sum_{y \in [\mathbf{0},x]} f_{n,x'}^N = \sum_{y \in [\mathbf{0},x]} f_{n,x}^N$$

Jest tak, gdyż obie strony są równe normie, która przecież jest niezależna od x.

Lewą stronę można rozpisać jako $\sum_{y \in [\mathbf{0},x']} f_{n,x'}^N + \sum_{y \in [\mathbf{0},x] \setminus [\mathbf{0},x']} f_{n,x'}^N$, podobnie prawą. Otrzymujemy wtedy:

$$\sum_{y \in [\mathbf{0},x']} f_{n,x'}^N - f_{n,x}^N = \sum_{y \in [\mathbf{0},x] \setminus [\mathbf{0},x']} f_{n,x'}^N - f_{n,x}^N$$

Teza lematu jest już jasna:

$$\begin{aligned}
\|f_{n,x'} - f_{n,x}\| &= \sum_{y \in [\mathbf{0},x]} f_{n,x'}(y) - f_{n,x}(y) \\
&= \sum_{y \in [\mathbf{0},x']} f_{n,x'}(y) - f_{n,x}(y) + \sum_{y \in [\mathbf{0},x] \setminus [\mathbf{0},x']} f_{n,x'}(y) - f_{n,x}(y) \\
&= 2 \sum_{y \in [\mathbf{0},x']} f_{n,x'}(y) - f_{n,x}(y) = 2\binom{n+N-1}{N-1}
\end{aligned}$$

$\square$

Powyższe wyniki prowadzą już do następującego twierdzenia:

Twierdzenie 2.1.1. *Przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^d$ ma własność A.*

Dowód. Korzystamy ze stwierdzenia 1.1.1. Odpowiedni ciąg stałych to $S_n = n$. Fakt, że nośnikiem kolejnych funkcji $f_{n,x}$ jest $B(x,n)$, wynika stąd, że wyrażenie $\binom{n-d(x,y)+\delta(y)}{\delta(y)}$ znika dla $n - d(x,y) + \delta(y) < \delta(y)$. Zbieżność wynika z ostatnich dwóch lematów, a dokładniej:

$$\frac{\|f_{n,x'} - f_{n,x}\|}{\|f_{n,x}\|} = 2\frac{\binom{n+N-1}{N-1}}{\binom{n+N}{N}} = 2\frac{N}{n+N} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

przy czym zbieżność jest jednostajna na zbiorze $\{(x,x') : \ d(x,x') \leqslant 1\}$ □

Przedstawiony właśnie dowód własności A dla przestrzeni $\mathbb{R}^d$ będzie motywacją. Dokładniej, wprowadzimy funkcje wagowe o dokładnie tych samych własnościach dotyczących normy. Do tego potrzebne będą nam odpowiednie włókna przy rzutowaniu, a także zmodyfikowana definicja niedostatku.

2.2. Własność A dla skończenie wymiarowych kompleksów kostkowych CAT(0)

Niech X będzie kompleksem kostkowym CAT(0) oraz $d = \dim X < \infty$. Tak jak w poprzednim przypadku punktem bazowym (korzeniem) było $\mathbf{0} = (0,\ldots,0) \in \mathbb{Z}^d$, tak teraz ustalmy dowolny korzeń $O \in X$. Ustalmy ponadto pewien wymiar otoczki $N \geqslant d-1$. Wtedy:

Definicja 2.2.1. Niedostatkiem wierzchołka $y \in X$ nazwiemy liczbę

$$\delta(y) = N - \#\mathfrak{R}_O(y)$$

Tu $\mathfrak{R}_O(y)$, tak jak w poprzednim rozdziale, oznacza liczbę hiperpłaszczyzn sąsiadujących z y oraz oddzielających ten wierzchołek od korzenia.

Powyższa definicja pokrywa się z definicją niedostatku w przypadku, gdy $X = \mathbb{R}^d$, ponieważ wówczas liczba $\#\mathfrak{R}_{\mathbf{0}}(y)$ równa się liczbie niezerowych współrzędnych y.
Naśladując poprzedni rozmiar definiujemy wiec funkcje wagowe

Definicja 2.2.2. Niech $x \in X$ będzie krawędzią. Możemy wówczas ciąg rodzin funkcji wagowych zdefiniować następująco:

$$f_{n,x}(y) = \binom{n - d(x,y) + \delta(y)}{\delta(y)} \cdot \mathbb{1}_{[O,x]}(y)$$

Wykorzystamy teraz twierdzenie 1.3.1., mówiące, iż każdy odcinek $[0,x]$ zanurza się izometrycznie w przestrzeń Euklidesową $\mathbb{R}^d$. Nazwijmy to zanurzenie σ, dla uproszczenia notacji będziemy jednak pisać $\sigma(y) = \hat{y} \in \mathbb{Z}^d$ Nie tracąc na ogólności, możemy założyć, że obraz O przy tym zanurzeniu to $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$.

Definicja 2.2.3. Niech $y \in [O,x]$, przy czym $\sigma(y) = \hat{y} = (\hat{y}_1,\ldots,\hat{y}_d) \in \mathbb{Z}^d$. Wówczas i (lub i-ta współrzędna) jest y**-związane**, jeśli wierzchołek $(\hat{y}_1,\ldots,\hat{y}_i - 1,\ldots,\hat{y}_d) \in \mathbb{Z}^d$ jest w obrazie $\sigma(X)$. W przeciwnym przypadku i jest y**-wolne**.

Definicja 2.2.4. Niech $y \in [0,x]$. **Włóknem** odcinka $I = [\hat{O},\hat{x}]$ nad $\hat{y}$ nazwiemy zbiór krawędzi $\mathfrak{F}_y \subset \mathbb{Z}^d$, taki, że dla każdego $a \in \mathfrak{F}_y$ spełnione są następujące warunki:

- jeśli i jest y-związany, to $a_i = \hat{y}_i$
- jeśli i jest y-wolny, to $0 \leqslant a_i \leqslant \hat{y}_i$

Należy zwrócić uwagę, że włókno $\mathfrak{F}_y$ jest odcinkiem łączącym punkt $O_y = (O_{y,1}, \ldots, O_{y,d}),\ O_{y,i} = \hat{y}_i[i \text{ jest } y\text{-związany}])$ z punktem $\hat{y}$. W szczególności dla każdego $y \in [O, x]$ zachodzi $\hat{y} \in \mathfrak{F}_y$

Stwierdzenie 2.2.1. Odcinek $I = [\hat{O}, \hat{x}]$ jest sumą rozłączną włókien wierzchołków odcinka $[O, x]$, dokładniej:

$$I = \bigsqcup_{y \in [O,x]} \mathfrak{F}_y$$

Dodatkowo każde włókno przecina się z odcinkiem $J = \sigma([O, x])$ w dokładnie jednym punkcie.

Jest to konsekwencja poniższych dwóch lematów:

Lemat 2.2.1. *Dla każdego $y \neq z,\ y, z \in [O, x]$ przecięcie włókien $\mathfrak{F}_y, \mathfrak{F}_z$ jest puste.*

Dowód. □

Lemat 2.2.2. *Dla każdego $a \in I = [\hat{O}, \hat{x}]$ istnieje $y \in [O, x]$ taki, że $a \in \mathfrak{F}_y$*

Dowód. Niech $\hat{y} \in [a, \hat{x}]$, przy czym wybierzmy $\hat{y}$ tak, aby odległość a od $[a, \hat{x}] \cap J$ była najmniejsza. Oczywiście $\hat{y}_i \geqslant a_i$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, d$. Ale każda y-związana współrzędna i mamy $\hat{y}_i \leqslant a_i$, bo gdyby było inaczej, to $(\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_i - 1, \hat{y}_d) \in [a, \hat{x}] \cap J$, co przeczy doborowi $\hat{y}$. Zatem $a \in \mathfrak{F}_y$. □

W dalszej części rozważań przyjmiemy konwencję notacyjną, dla $x \in [z, y]$ pisząc

$$n_z(x) \stackrel{\text{def}}{=} \#\mathfrak{R}_z(x)$$

Zwróćmy uwagę, że dla $a \in \mathbb{Z}^d$ liczba $n_{\mathbf{0}}(a)$ równa jest liczbie niezerowych współrzędnych a, zaś gdy $y \in [O, x]$ jest jedynym takim wierzchołkiem, iż $a \in \mathfrak{F}_y = [O_y, \hat{x}]$, to $n_{O_y}(a)$ równa się liczbie niezerowych, y-wolnych współrzędnych a.

Lemat 2.2.3. *Dla każdego wierzchołka $y \in [O, x]$ liczba y-związanych współrzędnych wynosi $n_O(y)$. Ponadto dla $a \in \mathfrak{F}_y$ zachodzi relacja:*

$$n_{\mathbf{0}}(a) = n_{O_y}(a) + n_O(y)$$

Dowód. Jeśli i-ta współrzędna jest y-związana, wybierzmy $z \in [O, x]$ tak, aby obrazy $\hat{y}$ oraz $\hat{z}$ różniły się tylko na i-tej współrzędnej, dla której $\hat{z}_i = \hat{y}_i - 1$. Wówczas oczywiście $d(y, z) = d(\hat{y}, \hat{z}) = 1$, a także $d(O, y) = d(O, z) + 1$. Zatem jedyna $H \in \mathfrak{H}(y, z)$ należy również do $\mathfrak{H}(O, y)$. Pokażemy, że przyporządkowanie $i \to H$ jest bijekcją. Różnowartościowość wynika z Wniosku 1.3.1., gdyż hiperpłaszczyzna H należy do i-tego łańcucha. Aby wykazać surjektywność, należy zauważyć, iż jeśli $H \in \mathfrak{R}_O(y)$, to $H \in \mathfrak{H}(O, x)$, a więc H jest obrazem i takiego, że $H \in \mathfrak{B}_i$. To dowodzi pierwszej części.

Aby uzyskać drugą część, wystarczy skorzystać z tego, że każda niezerowa współrzędna a jest albo y-związana, albo y-wolna, nigdy jednocześnie. Pierwszy składnik odpowiada za to drugie, zaś drugi - za to pierwsze. □

W końcu możemy przejść do dowodu twierdzenia zamykającego tę pracę:

Twierdzenie 2.2.1. *Niech X będzie kompleksem kostkowym CAT(0) oraz $d = \dim X < \infty$. Wówczas X ma własność A.*

Dowód przebiega bez zmian względem dowodu własności A dla przestrzeni euklidesowych, wykorzystując przy okazji następujące lematy:

Lemat 2.2.4. *Niech X będzie kompleksem kostkowym o wymiarze nie większym niż $d < \infty$. Przyjmijmy pewien wymiar otoczki $N \geqslant d - 1$. Niech wreszcie $x \in X$ będzie wierzchołkiem. Wówczas*

$$\|f_{n,x}\| = \binom{n+N}{n}$$

Dowód. Przyjmijmy, że $\sigma([O, x]) = J \subset I = [\mathbf{0}, \hat{x}]$ dla ustalonego $x \in X$.

Funkcje wagowe zależą od n, x, ale także od wymiaru otoczki N, a także kompleksu, na którym je rozpatrujemy, X. Zależność tę będziemy wykorzystywać w dowodzie, zatem przyjmiemy notację

$$f_{n,x} \equiv f_{n,x}^{N,X}$$

Podobnie będziemy oznaczać niedostatek: $\delta(y) \equiv \delta(y)^{N,X}(y)$. Elementy włókna mają dwa niedostatki, jeden względem $\hat{O} \in I$, drugi zaś względem punktu bazowego O_y takiego, że $\mathfrak{F}_y = [O_y, \hat{x}]$. Będziemy oznaczać je odpowiednio $\delta^{N,I}(a)$ oraz $\delta^{N,\mathfrak{F}_y}(a)$. Zachodzi wówczas wzór

$$\delta^{N,I}(a) = \delta^{N_y,\mathfrak{F}_\mathfrak{y}}(a), \quad N_y = N - n_O(y) \tag{2.3}$$

Dowód tej tożsamości jest dość prosty. Zgodnie z definicją mamy:

$$\delta^{N,I}(a) = N - n_{\hat{O}}(a), \quad \delta^{N,\mathfrak{F}_y}(a) = \Big(N - n_{O_y}(a), \quad \delta^{N,X} = N - n_O(y)\Big),$$

co razem z Lematem 2.2.3. daje 2.3

Nasz lemat jest łatwym zastosowaniem następującej równości:

$$f_{n,x}^{N,X}(y) = \sum_{a \in \mathfrak{F}_y} f_{n,\hat{x}}^{N,\mathbb{R}^d} \tag{2.4}$$

Rzeczywiście, załóżmy na moment, że to prawda. Wówczas, korzystając ze Stwierdzenia 2.2.1., mówiącego, iż odcinek I jest rozłączną sumą włókien, otrzymamy ciąg równości:

$$\begin{aligned}
\|f_{n,x}^{N,X}\| &= \sum_{y \in [O,x]} f_{n,x}^{N,X}(y) \\
&= \sum_{y \in [0,x]} \sum_{a \in \mathfrak{F}_y} f_{n,\hat{x}}^{N,\mathbb{R}^d}(a) = \sum_{a \in I} f_{n,\hat{x}}^{N,\mathbb{R}^d}(a) \\
&= \|f_{n,\hat{x}}^{N,\mathbb{R}^d}(a)\| \overset{\text{lemat 2.1.1.}}{=} \binom{n+N}{n}
\end{aligned}$$

Pozostaje udowodnić 2.4. W tym celu ustalmy $y \in [O, x]$. Możemy założyć $d(x, y) \leqslant n$, gdyż w przeciwnym wypadku obie strony znikają.

Wykorzystując więc 2.3, możemy otrzymać 2.4:

$$\begin{aligned}
f_{n,\hat{x}}^{N,\mathbb{R}^d}(a) &= \binom{n - d(\hat{x}, a) + \delta^{N,I}}{\delta^{N,I}(a)} \\
&= \binom{(n - d(\hat{x}, \hat{y})) - d(\hat{y}, a) + \delta^{N_y,\mathfrak{F}_y}(a)}{\delta^{N_y,\mathfrak{F}_y}(a)} \\
&= f_{n-d(\hat{x},\hat{y}),\hat{y}}^{N,\mathfrak{F}_y}(a)
\end{aligned}$$

Pamiętając, że $x \to \hat{x}$ jest izometrią, oraz sumując po $a \in \mathfrak{F}_y$, otrzymujemy:

$$\sum_{a \in \mathfrak{F}_y} f_{n,\hat{x}}^{N,\mathbb{R}^d}(a) = \|f_{n-d(x,y),\hat{y}}^{N_y,\mathfrak{F}_y}\|$$
$$= \binom{n - d(x,y) + N_y}{N_y} = \binom{n - d(x,y) + \delta^{N,X}(y)}{\delta^{N,X}(y)},$$

przy czym ostatnia równość wynika z 2.3. Wobec tego 2.4 zostało udowodnione, a więc i cały lemat. □

Lemat 2.2.5. *Niech X będzie kompleksem kostkowym CAT(0) o wymiarze $d = \dim X < \infty$. Dla każdej pary sąsiednich wierzchołków x, x' zachodzi:*

$$\|f_{n,x'} - f_{n,x}\| = 2\binom{n + N - 1}{N - 1}$$

Dowód, zarówno tego lematu, jak i całego twierdzenia, jest identyczny jak w przypadku euklidesowym.

Bibliografia

[1] Béla Bollobás. Problem 29, intersecting convex sets: Helly's theorem. *The Art of Mathematics: Coffee Time in Memphis*, 2006.

[2] Pierre Emmanuel Caprace. Lectures on proper cat(0) spaces and their isometry groups. 2012.

[3] Piotr Nowak oraz Guoliang Yu. What is... property a? *Notices of the American Mathematical Society 55 (2008), no. 4, 474–475.*, 2008.

[4] J. Brodzki S. J. Campbell E. Guentner G. A. Niblo oraz N. J. Wright. Property a and cat(0) cube complexes. *Journal of Functional Analysis.*

[5] John Roe. *Lectures on coarse geometry*, volume 31 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2003.

[6] R.P.Dilworth. A decomposition theorem for partially ordered sets. *Annals of Mathematics*, 1950.

[7] Michah Sageev. Cat(0) cube complexes and groups. *AS/Park City Mathematics Series.*

[8] Petra Schwer. Lecture notes on cat(0) cubical complexes. 2013.

[9] Rufus Willett. Some notes on property a, 2006.