

**Uniwersytet Warszawski**  
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

**Filip Binkiewicz**

Nr albumu: 332069

# **Własność A dla kompleksów kostkowych $CAT(0)$**

**Praca licencjacka  
na kierunku MATEMATYKA**

Praca wykonana pod kierunkiem  
**prof. dr hab. Sławomira Nowaka**  
Instytut Matematyki

Czerwiec 2015

## **Oświadczenie kierującego pracą**

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

## **Oświadczenie autora (autorów) pracy**

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów) pracy

## **Streszczenie**

Praca ta skupia się na dowodzie, iż kompleksy kostkowe  $CAT(0)$  mają własność A.

## **Słowa kluczowe**

Kompleks kostkowy  $CAT(0)$ , własność A

## **Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)**

11.0 Matematyka, Informatyka:

11.1 Matematyka

## **Klasyfikacja tematyczna**

14 Algebraic Geometry

## **Tytuł pracy w języku angielskim**

Property A for  $CAT(0)$  cube complexes



# Spis treści

<b>Motywacja</b> . . . . .	5
<b>1. Wprowadzenie</b> . . . . .	7
1.1. Własność A . . . . .	7
1.2. Przestrzenie CAT(0) . . . . .	10
1.3. Kompleksy kostkowe CAT(0) . . . . .	11
1.4. Kombinacje . . . . .	16
<b>2. Kompleksy kostkowe CAT(0) a własność A</b> . . . . .	19
2.1. Własność A dla przestrzeni euklidesowych . . . . .	19
2.2. Własność A dla skończone wymiarowych kompleksów kostkowych CAT(0) . .	22
<b>Bibliografia</b> . . . . .	27



# Motywacja

Kompleksy kostkowe są pewnym naturalnym uogólnieniem pojęcia grafu na większą liczbę wymiarów - zaś własność  $CAT(0)$  odpowiada za „brak cykli”, uogólniając analogicznie przypadek szczególny - drzewa. Nie jest więc zaskakujące pytanie o ich własności - poniższa praca wprowadza podstawowe pojęcia przestrzeni  $CAT(0)$  oraz kompleksów kostkowych. W poszukiwaniach głębszej literatury polecam zajrzeć do [1], [6] bądź też [5].

W swojej pracy skupiam się na dowodzie twierdzenia mówiącego, że każdy skończenie wymiarowy kompleks kostkowy ma własność  $A$ , opierając się na [3]. Własność  $A$ , po raz pierwszy zdefiniowana przez Yu (więcej informacji w [7] lub [2]) jest pewnym uogólnieniem pojęcia średniowalności, zdefiniowanym dla grup. Definicja nawet optycznie przypomina pewne kryterium średniowalności, a więc istnienie ciągu Følnera. Istotne jest to, iż własność  $A$  jest niezmiennikiem relacji zgrubnej równoważności, coraz częściej pojawiającej się w literaturze (więcej informacji o geometrii zgrubnej można znaleźć w [4]).

Dowód głównego twierdzenia poparty będzie przykładem, w którym udowodnimy w niestandardowy sposób własność  $A$  dla konkretnego kompleksu kostkowego  $CAT(0)$ , przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}^d$ . Dalsze postępowanie okaże się równoległe, choć nieco bardziej skomplikowane technicznie.

Jako główny wkład własny w treść pracy traktuję nie treść dowodu głównego twierdzenia, zawartego już w [3], a w który ingerowałem jedynie sporadycznie, przedstawiając odrobinę różniące się dowody poszczególnych lematów, lecz rozdział ten dowód poprzedzający. Zawarłem w nim zebrane z różnych źródeł definicje, lematy i przykłady dotyczące pojęć związanych blisko z tematem mojej pracy, w szczególności własności  $A$ , geometrii zgrubnej, przestrzeni  $CAT(\kappa)$  w przypadku szczególnym  $\kappa = 0$  oraz kompleksów kostkowych.

Dla zainteresowanych starałem się w odpowiednich miejscach pozostawić odnośniki do głębszej literatury dotyczącej każdego z tych tematów.





# Rozdział 1

## Wprowadzenie

Pierwszy rozdział tej pracy poświęcę przypomnieniu podstawowych definicji, twierdzeń i przykładów dotyczących jej tematu. Aby zachować ciągłość pracy, postaram się unikać przytaczania rozległych dowodów. Dla zainteresowanych w odpowiednich miejscach znajdą się odsyłacze do literatury.

### 1.1. Własność A

Własność A jest pewnym przeniesieniem pojęcia średniowalności na przestrzenie metryczne. Przed właściwym wprowadzeniem tego pojęcia przypomnę kilka podstawowych definicji dotyczących geometrii zgrubnej.

Przez  $X, Y$  będziemy oznaczać przestrzenie metryczne,  $d$  będzie oznaczać metrykę pochodzącą z przestrzeni, z której pochodzą jej argumenty. Jeśli będzie to konieczne, przez  $d_X, d_Y$  będziemy dla ścisłości oznaczać metryki pochodzące odpowiednio z  $X$  i  $Y$ .

**Definicja 1.1.1.** Powiemy, że funkcja  $\varphi : X \rightarrow Y$  jest **zgrubna**, jeśli spełnia następujące dwa warunki:

- (*Bornologiczność*) Dla każdego  $R > 0$  istnieje  $S > 0$  takie, że

$$d(x_1, x_2) < R \Rightarrow d(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) < S$$

- (*Właściwość*) Dla każdego  $S > 0$  istnieje  $R > 0$  takie, że

$$d(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) < S \Rightarrow d(x_1, x_2) < R$$

**Przykład 1.1.1.** Zanurzenie  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$  jest zgrubne. Każde przekształcenie liniowe  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $n \rightarrow an + b$  jest zgrubne. Przekształcenie  $\mathbb{Z} \ni n \rightarrow n^2 \in \mathbb{Z}$  nie jest zgrubne, bo nie jest bornologiczne ( $d(n, n+1) = 1$ , a  $d(n^2, n^2 + 2n + 1) = |2n + 1|$  jest dowolnie duże).

Powiemy, że dwa przekształcenia  $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$  są blisko, jeśli istnieje  $C > 0$  takie, że

$$d(f_1(x), f_2(x)) < C \text{ dla każdego } x \in X$$

**Definicja 1.1.2.** Powiemy, że przestrzenie  $X, Y$  są **zgrubnie równoważne**, jeśli istnieją przekształcenia zgrubne  $\varphi : X \rightarrow Y$ ,  $\psi : Y \rightarrow X$  takie, że  $\varphi \circ \psi$  jest blisko  $\text{id}_Y$ , zaś  $\psi \circ \varphi$  jest blisko  $\text{id}_X$ .

**Definicja 1.1.3.** Niech  $r > 0$ . Powiemy, że zbiór  $A \subset X$  jest  $r$ -gęsty, jeśli dla każdego  $x \in X$  istnieje element  $a \in A$  taki, że  $d(x, a) < r$ . Zbiór  $A$  jest **zgrubnie gęsty**, jeśli jest  $r$ -gęsty dla pewnego  $r > 0$ .

**Uwaga 1.1.1.** Każda przestrzeń metryczna  $X$  zawiera dyskretny podzbiór zgrubnie gęsty.

*Dowód.* Ustalmy  $\varepsilon > 0$ . Niech  $\mathcal{D} = \{D \subset X : \forall_{x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2} d(x_1, x_2) > \varepsilon\}$ . Rodzina  $\mathcal{D}$  jest niepusta oraz każdy łańcuch jest ograniczony z góry przez swoją sumę. Wobec lematu Kuratowskiego-Zorna istnieje więc maksymalny element  $D_0 \in \mathcal{D}$ . Jest on  $\varepsilon$ -gęstym podzbiorem  $X$ . Istotnie, założmy przeciwnie - istnieje  $x \in X$  taki, że  $d(x, D_0) > \varepsilon$ . Wtedy zbiór  $D_0 \cup \{x\}$  należy do rodziny  $\mathcal{D}$  i zawiera w sobie  $D_0$ , co przeczy maksymalności  $D_0$   $\square$

**Definicja 1.1.4.** Przestrzeń dyskretna  $X$  ma **własność A**, jeśli dla każdego  $R > 0$  oraz  $\varepsilon > 0$  istnieje rodzina niepustych, skończonych zbiorów  $A_x \subset X \times \mathbb{N}$  indeksowana  $x \in X$  oraz stała  $S > 0$  taka, że spełnione są następujące warunki:

1. Dla każdych dwóch  $x, x' \in X$  zachodzi

$$d(x, x') < R \Rightarrow \frac{\#(A_x \Delta A_{x'})}{\#A_x} < \varepsilon$$

2. Dla dowolnego elementu  $(x', n) \in A_x$  zachodzi

$$d(x, x') \leq S$$

Dowolna przestrzeń metryczna ma własność A, jeśli zawiera zgrubnie gęsty podzbiór o tej własności. Symbol  $\#$  oznacza tu liczbę elementów zbioru, zaś symbol  $\Delta$  - operację różnicy symetrycznej (a więc  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ )

**Uwaga 1.1.2.** Własność A jest niezmiennikiem zgrubnej równoważności przestrzeni dyskretnych. Dokładniej, jeśli przestrzenie dyskretne  $X, Y$  są zgrubnie równoważne, to  $X$  ma własność A wtedy i tylko wtedy, gdy  $Y$  ma własność A.

Uwaga ta jest bezpośrednią konsekwencją poniższego lematu:

**Lemat 1.1.1.** Jeśli  $\varphi : X \rightarrow Y$  jest przekształceniem zgrubnym przestrzeni dyskretnych oraz  $Y$  ma własność A, to  $X$  ma własność A.

*Dowód.* Łatwo sprawdzić, że istnieje funkcja  $\psi : Y \rightarrow X$  taka, że

$$d(y, \varphi(\psi(y))) \leq d(y, \varphi(X)) \text{ dla każdego } y \in Y$$

W tym celu wystarczy dla każdego  $y \in Y$  wybrać  $x \in X$  taki, że  $\varphi(x)$  jest odpowiednio blisko  $y$  i ustalić  $x = \psi(y)$ .

Ustalmy teraz  $R > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ . Przekształcenie  $\varphi$  jest zgrubne, zatem istnieje  $R_0$  takie, że

$$d(x, x') < R \Rightarrow d(\varphi(x), \varphi(x')) < R_0$$

Dla stałych  $R_0, \varepsilon$  istnieje rodzina  $\{B_y \subset Y \times \mathbb{N}\}_{y \in Y}$  indeksowana  $y \in Y$  oraz stała  $S'$  spełniająca warunki definicji własności A. Zdefiniujmy teraz

$$X \times \mathbb{N} \supset A_x = \{(x', n) : n \leq \#\{(y, m) \in B_{\varphi(x)} : \psi(y) = x'\}\}$$

Sprawdzimy, że rodzina ta spełnia warunki definicji 1.1.4. Jeśli  $d(x, x') < R$ , to  $d(\varphi(x), \varphi(x')) < R'$ , a więc

$$\frac{\#(A_x \Delta A_{x'})}{\#A_x} \leq \frac{\#B_{\varphi(x)} \Delta B_{\varphi(x')}}{\#B_{\varphi(x)}} < \varepsilon$$

Założmy wreszcie, że  $(x', n) \in A_x$ . Wówczas istnieje para  $(y, m) \in B_{\varphi(x)}$  taka, że  $\psi(y) = x'$ . Wówczas  $d(y, \varphi(x)) \leq S'$  oraz

$$d(\varphi(x), \varphi(x')) \leq d(\varphi(x), y) + d(y, \varphi(x')) = d(\varphi(x), y) + d(y, \varphi(\psi(y))) \leq 2S' + 1$$

Korzystając znów ze zgrubności  $\varphi$ , możemy znaleźć stałą  $S$  taką, aby

$$d(\varphi(x), \varphi(x')) < 2S' + 1 \Rightarrow d(x, x') < S$$

Otrzymujemy więc, że  $d(x, x') < S$ , co kończy dowód.  $\square$

W dalszych rozważaniach będziemy korzystać z następującej charakteryzacji własności A:

**Stwierdzenie 1.1.1.** Dyskretna przestrzeń metryczna  $X$  ma własność A wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg rodzin funkcji o skończonym nośniku  $f_{n,x} : X \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ , indeksowany  $x \in X$ , oraz ciąg  $S_n \in \mathbb{R}_+$  taki, że

1. Dla każdego  $n$  oraz  $x$  nośnikiem  $f_{n,x}$  jest  $B(S_n, x)$ .
2. Dla każdego  $R > 0$  ciąg

$$\frac{\|f_{n,x} - f_{n,x'}\|}{\|f_{n,x}\|}$$

zbiega jednostajnie do zera na zbiorze  $\{(x, x') : d(x, x') \leq R\}$  przy  $n \rightarrow \infty$ . Norma  $\|\cdot\|$  oznacza normę  $\ell_1$  na przestrzeni funkcji na o skończonym nośniku określonych na  $X$ .

*Dowód.* Powyższe warunki są równoważne z następującym: dla każdego  $R > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  istnieje rodzina funkcji o skończonym nośniku  $f_x : X \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ , indeksowana  $x \in X$ , oraz  $S > 0$  takie, że  $\text{supp } f_x = B(S, x)$  oraz

$$d(x, x') \leq R \Rightarrow \frac{\|f_x - f_{x'}\|}{\|f_x\|} < \varepsilon$$

Konieczność tego warunku wynika stąd, że przekształcenie  $f_x(y) = \#(A_x \cap (\{y\} \times \mathbb{N}))$  spełnia powyższe warunki, zaś dostateczność - stąd, iż  $A_x = \{(y, n) \in X \times \mathbb{N} : 1 \leq n \leq f_x(y)\}$  spełnia warunki definicji 1.1.4.  $\square$

**Uwaga 1.1.3.** Korzystając z powyższej charakteryzacji w przypadku zbioru wierzchołków kompleksu kostkowego, rozpatrywanego z metryką długości krawędziowej, będziemy sprawdzać warunek drugi jedynie dla stałej  $R = 1$ .

*Dowód.* Niech  $R > 0$  oraz niech dwa wierzchołki kompleksu  $x$  oraz  $x'$  spełniają  $d(x, x') < R$ . Istnieje więc  $\mathbb{N} \ni r < R$  oraz ciąg wierzchołków  $x = x_0, \dots, x_r = x'$ , kolejno sąsiednich, stanowiących ścieżkę łączącą  $x$  z  $x'$ . Wystarczy wtedy skorzystać z nierówności trójkąta:

$$\frac{\|f_{n,x} - f_{n,x'}\|}{\|f_{n,x}\|} \leq \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\|f_{n,x_i} - f_{n,x_{i+1}}\|}{\|f_{n,x}\|} = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\|f_{n,x_i} - f_{n,x_{i+1}}\|}{\|f_{n,x_i}\|} \cdot \frac{\|f_{n,x_i}\|}{\|f_{n,x}\|}$$

Jeśli więc zbieżność ma miejsce na zbiorze sąsiednich wierzchołków, to składnik po prawej stronie również dąży do zera, ponieważ  $\frac{\|f_{n,x_i}\|}{\|f_{n,x}\|} \rightarrow 1$ , co wynika stąd, że  $d(x, x_i) < R$  oraz z warunku drugiego.  $\square$

## 1.2. Przestrzenie CAT(0)

Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną. Odcinkiem geodezyjnym nazywamy przekształcenie izometryczne  $\mathbb{R} \supset I \xrightarrow{\rho} X$ , gdzie  $I = [a, b]$  jest odcinkiem. Przestrzeń  $X$  nazwiemy (jednoznacznie) geodezyjną, jeśli każde dwa punkty można połączyć (jednoznacznie wyznaczonym) odcinkiem geodezyjnym.

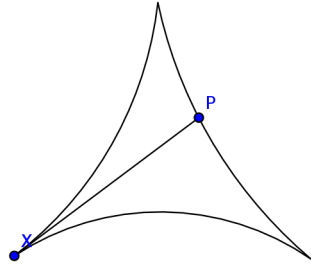
**Przykład 1.2.1.** Każda przestrzeń euklidesowa  $\mathbb{R}^n$  jest jednoznacznie geodezyjna, jak również każdy jej wypukły podzbiór. Sfera  $S^2$  jest geodezyjna, ale nie jednoznacznie - dwa bieguny można połączyć ścieżką geodezyjną na nieskończenie wiele sposobów. Każdy spójny graf metryczny jest przestrzenią geodezyjną.

Dalej będziemy rozważać przestrzenie geodezyjne. Dla wygody przez  $[x, y]$  będziemy oznaczać (dowolny) odcinek geodezyjny łączący  $x \in X$  z  $y \in X$  (a dokładniej obraz tego odcinka).

Zwróćmy uwagę, że jeśli  $X$  jest przestrzenią geodezyjną, to dla każdej trójki  $(x, y, z) \in X^3$  istnieje trójka  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in (\mathbb{R}^2)^3$  taka, że  $d(x, y) = d_{\mathbb{R}^2}(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $d(x, z) = d_{\mathbb{R}^2}(\bar{x}, \bar{z})$ ,  $d(y, z) = d_{\mathbb{R}^2}(\bar{y}, \bar{z})$ . Innymi słowy, każdemu trójkątowi z  $X$  można przypisać trójkąt z przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}^2$  o bokach takiej samej długości. Taki trójkąt jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izometrii przestrzeni  $\mathbb{R}^2$  i nazwiemy go trójkątem porównania  $(x, y, z)$ .

**Definicja 1.2.1.** Powiemy, że przestrzeń geodezyjna  $X$  jest **CAT(0)**, jeśli dla każdej trójki  $(x, y, z) \in X^3$  oraz punktu  $p \in [y, z]$  oraz odpowiadającym im trójkątom porównania  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in (\mathbb{R}^2)^3$  i punktowi  $\bar{p} \in [\bar{y}, \bar{z}]$  zachodzi nierówność:

$$d(x, p) \leq d_{\mathbb{R}^2}(\bar{x}, \bar{p})$$



Rysunek 1.1: Intuicyjnie, trójkąty w przestrzeniach CAT(0) są „szczuplejsze” niż w przestrzeni euklidesowej.

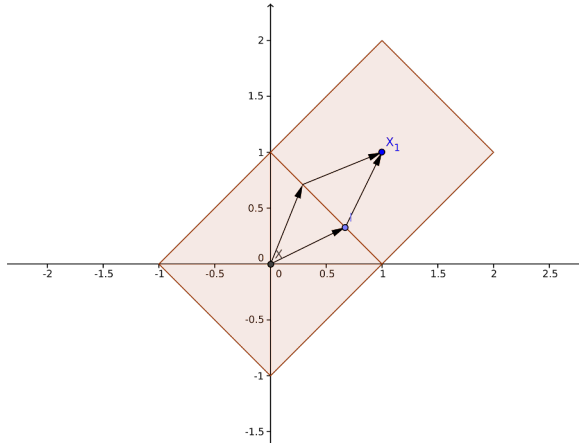
**Przykład 1.2.2.** Nietrudno jest o kilka przykładów takich przestrzeni:

- Każda przestrzeń euklidesowa  $\mathbb{R}^n$  jest CAT(0). Wówczas wymieniona nierówność jest po prostu równością.
- Graf metryczny jest przestrzenią CAT(0) wtedy i tylko wtedy, gdy jest drzewem.

**Uwaga 1.2.1.** Każda przestrzeń CAT(0) jest jednoznacznie geodezyjna.

*Dowód.* Przypuśćmy przeciwnie i niech  $x, y \in X$  łączą dwa różne odcinki geodezyjne, powiedzmy  $[x, y]$ ,  $[\bar{x}, \bar{y}]$ . Wówczas istnieją  $[x, y] \ni p \neq \bar{p} \in [\bar{x}, \bar{y}]$  takie, że  $d(x, p) = d(x, \bar{p})$  oraz  $d(y, p) = d(y, \bar{p})$ . Wówczas trójkątowi  $(x, y, \bar{p})$  w  $\mathbb{R}^2$  odpowiada trójkąt zdegenerowany, zaś  $d(p, \bar{p}) > 0$ , co przeczy nierówności CAT(0)  $\square$

**Wniosek 1.2.1.** Sfera  $S^2$  nie jest przestrzenią CAT(0). Płaszczyzna  $\mathbb{R}^2$  wyposażona w metrykę pochodzącą od normy  $\ell_1$  nie jest przestrzenią CAT(0)



Rysunek 1.2: Na rysunku zaznaczono dwa odcinki geodezyjne łączące punkty  $x = (0, 0)$  i  $x_1 = (1, 1)$  na płaszczyźnie z metryką pochodzącą od normy  $\ell_1$

### 1.3. Kompleksy kostkowe CAT(0)

Niech  $K = [0, 1]^n$  będzie  $n$ -wymiarową kostką. Będzie to podstawowy „budulec” interesujących nas przestrzeni. Przez ścianę o kowymiarze równym 1 będziemy rozumieć zbiór

$$F_{i,\varepsilon} = \{x \in K : x_i = \varepsilon\}, \text{ dla } i = 1 \dots n \text{ oraz } \varepsilon \in \{0, 1\}$$

Wszystkie ściany o niższym kowymiarze (o wyższym wymiarze) można otrzymać jako przecięcie ścian o wyższym kowymiarze.

**Definicja 1.3.1.** Niech  $K, K'$  będą dwiema kostkami oraz  $F \subset K$ ,  $F' \subset K'$  będą ich ścianami. **Sklejeniem** (lub **przyłączeniem**)  $K$  z  $K'$  nazwiemy izometrię  $\varphi : F \rightarrow F'$ .

**Definicja 1.3.2.** Przypuśćmy, że  $\mathcal{K}$  jest zbiorem kostek (dla każdego  $K \in \mathcal{K}$  istnieje  $n(K) \in \mathbb{N}$  takie, że  $K \simeq [0, 1]^{n(K)}$ ), zaś  $\mathcal{S}$  - zbiorem sklejeń elementów  $\mathcal{K}$  (każdemu  $\varphi \in \mathcal{S}$  odpowiadają kostki  $K = K(\varphi)$ ,  $K' = K'(\varphi) \in \mathcal{K}$  oraz ściany  $F \subset K$ ,  $F' \subset K'$ . Założmy wreszcie, że taka para  $(\mathcal{K}, \mathcal{S})$  spełnia następujące warunki:

1. Żadna kostka nie jest sklejona sama ze sobą.
2. Dla każdych dwóch kostek  $K \neq K'$  istnieje co najwyżej jedno sklejenie  $K$  z  $K'$ .

Wówczas w następujący sposób można zdefiniować **kompleks kostkowy**:

$$X = \left( \bigsqcup_{K \in \mathcal{K}} C \right) / \sim$$

gdzie  $\sim$  dla każdego  $\varphi \in \mathcal{S}$  utożsamia dziedzinę  $\varphi$  z jego obrazem, to znaczy:

$$\{x \sim \varphi(x) \mid \varphi \in \mathcal{S}, x \in \text{dom}(\varphi)\}$$

Jeśli istnieje stała  $M > 0$  taka, że dla każdego  $K \simeq [0, 1]^{n(K)} \in \mathcal{K}$  zachodzi  $n(K) < M$ , to kompleks kostkowy  $X$  jest **skończenie wymiarowy**. Wtedy **wymiarem** tego kompleksu nazwiemy liczbę

$$\dim X = \max_{K \in \mathcal{K}} n(K)$$

**Uwaga 1.3.1.** W ten sposób zdefiniowany kompleks kostkowy jest przestrzenią metryczną, przy czym metryka długości indukowana jest z metryki euklidesowej na  $[0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ . Odległość punktów  $x, y$  mierzona w metryce długości jest to infimum długości krzywych  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  łączących  $x$  z  $y$ . Długość krzywej definiujemy następująco:

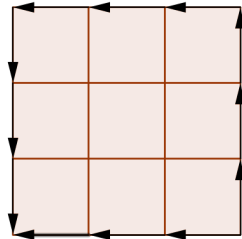
$$l(\gamma) = \sup_{a=t_0 \leq \dots \leq t_n=b} \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$$

**Stwierdzenie 1.3.1.** Z powyższej definicji łatwo wynikają następujące fakty:

- Obcięcie rzutowania  $p : \bigsqcup_{K \in \mathcal{K}} K \rightarrow X$  do jednej kostki  $K \in \mathcal{K}$  jest iniekcją.
- Niepuste przecięcie dwóch kostek jest ścianą obydwu.

**Przykład 1.3.1.** Łatwo o kilka prostych przykładów kompleksów kostkowych:

- Rozważmy graf metryczny bez wierzchołków izolowanych, w którym każda krawędź ma długość 1. Każda krawędź jest izometryczna z  $[0, 1]$ , zaś sklejenia to po prostu izometrie punktów.
- Torus można interpretować jako kompleks kostkowy. Rozważmy zbiór  $[0, 3] \times [0, 3] \subset \mathbb{R}^2$ , w którym można wprowadzić podział na dziewięć części izometrycznych z  $[0, 1]^2$ . Wtedy odpowiednie izometrie prowadzą do konstrukcji torusa (rysunek).



Rysunek 1.3:  
Klasyczna konstrukcja torusa jako przykład kompleksu kostkowego. Strzałki wyznaczają izometrie odpowiednich krawędzi

**Uwaga 1.3.2.** Na zbiorze wierzchołków kompleksu kostkowego można wprowadzić metrykę długości krawędziowej, według której odległość dwóch wierzchołków to minimum długości łączących ich ścieżek złożonych z krawędzi kompleksu (przez krawędź rozumiemy ścianę o wymiarze 1). Z naszego punktu widzenia możemy utożsamiać te metryki, z uwagi na następujący fakt:

**Stwierdzenie 1.3.2.** Niech  $X$  będzie kompleksem kostkowym CAT(0). Metryka długości na zbiorze wierzchołków  $X$  jest zgrubnie równoważna z metryką długości krawędziowej. Jeśli  $X$  jest skończenie wymiarowy, to zbiór wierzchołków z pierwszą bądź drugą z tych metryk jest sobie zgrubnie równoważny.

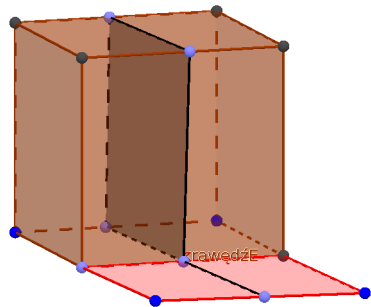
*Dowód.* Identyczność jest zgrubną równoważnością. □

**Definicja 1.3.3.** Niech  $K \simeq [0, 1]^n$  będzie kostką. Wówczas **śródkostką**  $K$  nazwiemy zbiór

$$M_i = \{x \in K : x_i = 1/2\} \text{ dla } i = 1, \dots, n$$

Wprowadźmy na chwilę następującą relację równoważności: dwie krawędzie w kompleksie kostkowym są sobie **kwadratowo równoważne** (piszemy:  $e \sim e'$ ), jeśli są sobie naprzeciwległe w pewnym kwadracie w tym kompleksie. Taką relację rozszerzamy do relacji równoważności.

**Definicja 1.3.4.** **Hiperpłaszczyzną** dualną do klasy równoważności  $[e]$  (lub po prostu do krawędzi  $e$ ) nazwiemy sumę śródkostek przecinających elementy klasy  $[e]$ .



Rysunek 1.4: Przykład hiperpłaszczyzny w kompleksie kostkowym. Ciemniejszym kolorem zaznaczono hiperpłaszczyznę dualną do krawędzi  $E$

Zwróćmy uwagę, że hiperpłaszczyzna wyznacza podział zbioru wierzchołków na dwa podzbiory, które będziemy dalej nazywać **półpłaszczyznami**. Będzie to miało kluczowe znaczenie kombinatoryczne. Dwie hiperpłaszczyzny tworzą podział kompleksu na cztery przecięcia półpłaszczyzn. Jeśli wszystkie są niepuste, to hiperpłaszczyzny **przecinają się**. Dwa wierzchołki  $x, y$  są **oddzielone** przez hiperpłaszczyznę  $H$ , jeśli należą do różnych wyznaczonych przez nią półprzestrzeni.

**Uwaga 1.3.3.** Zgodnie z definicją 1.1.4 przestrzeń metryczna ma własność  $A$ , jeśli zawiera dyskretną podprzestrzeń, która ma tę własność. Oczywiście w przypadku kompleksów kostkowych szukaną podprzestrzenią jest przestrzeń wierzchołków. Dlatego też w dalszej części pracy przez  $X$  będziemy oznaczać zbiór wierzchołków kompleksu kostkowego, zaś przez  $x, x', y, z$  - wierzchołki. **Kompleksem kostkowym CAT(0)** nazwiemy oczywiście kompleks kostkowy, który jest dodatkowo CAT(0).

Zbiór hiperpłaszczyzn oddzielających  $x$  od  $y$  będziemy oznaczać przez  $\mathfrak{H}(x, y)$ . **Odcinkiem** łączącym  $x$  oraz  $y$  nazwiemy przecięcie wszystkich półprzestrzeni zawierających obydwa te punkty i oznaczymy  $[x, y]$ . Zbiór wierzchołków  $V$  nazwiemy **wypukłym**, jeśli dla każdych  $x, y \in V$  również  $[x, y] \subset V$ .

Dla trzech wierzchołków  $w, x, y$  możemy wyróżnić ich **medianę**, zdefiniowaną jako jedyny wierzchołek należący do  $[w, x] \cap [x, y] \cap [w, y]$

Dla kompleksu kostkowego CAT(0)  $X$  możemy wprowadzić brzeg kombinatoryczny. Niech funkcja  $\sigma$  przypisuje hiperpłaszczyźnie  $X$  jedną z wyznaczonych przez nią półprzestrzeni, przy czym dla każdych dwóch hiperpłaszczyzn  $H_1, H_2$  zachodzi  $\sigma(H_1) \cap \sigma(H_2) \neq \emptyset$ . Taką funkcję nazwiemy **ultrafiltrem**.

Wierzchołek  $x$  definiuje takie przekształcenie: dla hiperpłaszczyzny  $H$  wyznacza półprzestrzeń  $H_x$  zawierającą  $x$  (rzeczywiście, dla każdych dwóch hiperpłaszczyzn  $H, K$  mamy  $x \in H \cap K$ ). Jeśli więc oznaczymy przez  $\mathfrak{U}$  zbiór wszystkich ultrafiltrów na  $X$  to wskazaliśmy iniekcję

$$\iota : X \rightarrow \mathfrak{U}$$

Wówczas elementy zbioru

$$\partial X = \mathfrak{U} \setminus \iota(X)$$

nazwiemy **krawędziami w nieskończoności**. Utożsamiając z wierzchołkiem  $x$  ultrafiltr  $\iota(x)$ , możemy więc zdefiniować

$$\overline{X} = X \cup \partial X$$

Powyższy zbiór nazwiemy **dopełnieniem w nieskończoności** kompleksu  $X$ .

Możemy przenieść podstawowe kombinatoryczne własności kompleksu kostkowego CAT(0) na jego dopełnienie w nieskończoności. Jeśli  $z, w \in \overline{X}$ , to dla hiperpłaszczyzny  $H$  przez  $H_z, H_w$  będziemy oznaczać obraz  $z, w$  (jako ultrafiltrów) na  $H$ , a więc odpowiednią półprzestrzeń (wtedy powiemy, że  $H_z$  zawiera  $z$ . Hiperpłaszczyzna  $H$  **oddziela**  $x$  od  $w$ , jeśli  $H_z \neq H_w$ . Można więc na  $\overline{X}$  uogólnić definicję zbioru  $\mathfrak{H}(x, w)$ . Podobnie możemy zdefiniować odcinek  $[x, w]$  jako

$$[x, w] = \bigcap H_{x,w} \quad x, w \in H_{x,w}, \quad H_{x,w} - \text{półprzestrzeń}$$

Zwróćmy uwagę, że każdy odcinek  $[x, w]$  jest wypukły. Wynika to stąd, że przecięcie zbiorów wypukłych takie jest. Oczywiście jest również następujące stwierdzenie:

**Stwierdzenie 1.3.3.** Niech  $x, y, w \in X$  oraz  $x \in \overline{X}$ . Jeśli  $w \in [x, z]$  oraz  $y \in [y, w]$ , to  $\mathfrak{H}(y, w) \subset \mathfrak{H}(y, z)$

**Uwaga 1.3.4.** Na zbiorze  $\overline{X}$  trudno wprowadzić metrykę, można natomiast w naturalny sposób zrobić z niego przestrzeń topologiczną. Powiemy, że ciąg wierzchołków  $\{x_j\}_{j=1}^\infty \subset X$  zbiega do wierzchołka  $x \in \overline{X}$ , jeśli dla każdej hiperpłaszczyzny  $H$  zachodzi  $H \in \mathfrak{H}(x_j, x)$  jedynie dla skończenie wielu  $j$ . Piszemy wówczas, że

$$x_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x$$

Sekcję tę zakończymy serią lematów i twierdzeniem łączącym kompleks kostkowy z przestrzenią euklidesową.

**Lemat 1.3.1.** Niech  $\{x_j\}_{j=1}^\infty \subset X, x \in \overline{X}$  oraz niech  $x_j \rightarrow x$  przy  $j \rightarrow \infty$ . Hiperpłaszczyzna  $H$  oddziela  $y$  od  $x$  wtedy i tylko wtedy, gdy oddziela  $y$  od prawie wszystkich<sup>1</sup>  $x_j$ . Inaczej:

$$\mathfrak{H}(y, x) = \bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{j=k}^\infty \mathfrak{H}(y, x_j)$$

*Dowód.* Wystarczy wspomnieć definicję:  $H$  oddziela  $y$  od  $x$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $H_y \neq H_x$ , a więc wtedy i tylko wtedy, gdy  $H_y \neq H_{x_j}$  dla prawie wszystkich  $j \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Lemat 1.3.2.** Niech  $\{x_j\}_{j=1}^\infty \subset X, x \in \overline{X}$  oraz niech  $x_j \rightarrow x$  przy  $j \rightarrow \infty$ . Ponadto niech  $y, z \in X$ . Wówczas jeden i tylko jeden z poniższych warunków jest prawdziwy.

- $y \in [z, x_j]$  dla prawie wszystkich  $j \in \mathbb{N}$  (wtedy  $y \in [z, x]$ ).
- $y \notin [z, x_j]$  dla prawie wszystkich  $j \in \mathbb{N}$  (wtedy  $y \notin [z, x]$ ).

*Dowód.* Negacją warunku pierwszego jest warunek:  $y \notin [z, x_j]$  dla nieskończenie wielu  $j \in \mathbb{N}$ . Wynika on łatwo z drugiego warunku. Pokażemy, że warunek drugi jest mu równoważny.

Jeśli  $y \notin [z, x_j]$ , to istnieje  $H \in \mathfrak{H}(y, z)$  taka, że  $H_z = H_{x_j}$ . Jeśli jest tak dla nieskończenie wielu  $j$ , to ze skończoności zbioru  $\mathfrak{H}(y, z)$  wynika, że istnieje hiperpłaszczyzna  $H \in \mathfrak{H}(y, z)$  taka, że  $H_z = H_{x_j}$  dla nieskończenie wielu  $j \in \mathbb{N}$ . Zatem  $H_z = H_x = H_{x_j}$  dla prawie wszystkich  $j \in \mathbb{N}$ . W szczególności  $y \notin [z, x_j]$  dla niemal wszystkich  $j$ , a więc  $y \notin [z, x]$ .

---

<sup>1</sup>wszystkich, oprócz skończenie wielu



Pozostaje wykazać, że pierwszy warunek pociąga za sobą, że  $y \in [z, x]$ . Załóżmy że  $y \notin [z, x]$ . Istnieje więc hiperpłaszczyzna  $H \in \mathfrak{H}(y, z)$  taka, że  $H_x = H_z$ , a więc  $H_{x_j} = H_z$  dla niemal wszystkich  $j \in \mathbb{N}$ . A więc  $y \notin [z, x_j]$  dla prawie wszystkich  $j \in \mathbb{N}$  i otrzymujemy sprzeczność.  $\square$

**Lemat 1.3.3.** *Niech  $x, y \in X$  oraz  $z \in \overline{X}$ . Wówczas przecięcie odcinków  $[x, y], [x, z], [y, z]$  składa się z pojedynczego wierzchołka z  $X$ .*

*Dowód.* Najpierw wykażemy, że przecięcie to jest niepuste, następnie - że ma tylko jeden element.

Niech  $\{z_j\}_{j=1}^\infty \subset X$  będzie ciągiem wierzchołków zbieżnym do  $z$ . Odcinek  $[x, y]$  jest skończony i zawiera mediany  $m_j = m(x, y, z_j)$ . Istnieje więc  $m \in [x, y]$  taki, że  $m = m_j \in [x, z_j]$  dla nieskończenie wielu  $j \in \mathbb{N}$ . Z poprzedniego lematu wynika więc, że  $m \in [x, z_j]$  dla niemal wszystkich  $j \in \mathbb{N}$  oraz  $m \in [x, z]$ . Podobnie  $m \in [y, z]$ .

Założmy teraz, że  $m \neq m'$  należą do  $[x, y] \cap [x, z] \cap [y, z]$  i niech  $H \in \mathfrak{H}(m, m')$ . Któreś dwie z półprzestrzeni  $H_x, H_y, H_z$  są sobie równe; dla ustalenia uwagi niech  $H_x = H_y$ . Skoro  $H_m \neq H_{m'}$ , tylko jedno z nich może być równe  $H_x$ , zatem znowu dla ustalenia uwagi niech  $H_m \neq H_x$ . Wtedy  $m \notin [x, z]$ , co daje sprzeczność.  $\square$

**Uwaga 1.3.5.** W powyższym dowodzie skorzystaliśmy z faktu, że mamy ciąg  $X \ni z_j \rightarrow z \in \overline{X}$ . Istnienie takiego ciągu nie jest zupełnie oczywiste - aby je uzasadnić, należy rozważyć zbiór wszystkich hiperpłaszczyzn  $H_1, H_2, \dots$  (jest on przeliczalny) oraz dla każdego  $j \in \mathbb{N}$  wybrać  $z_j$  należące do zbioru

$$\bigcap_{i=1}^j (H_i)_z$$

Aby uzasadnić, że powyższy zbiór jest niepusty, wystarczy skorzystać z twierdzenia Helly'ego mówiącego o przecięciach zbiorów wypukłych (patrz [?]).

Dla  $x \in X, z \in \overline{X}$  przez  $\mathfrak{R}_z(x)$  oznaczmy podzbiór  $\mathfrak{H}(x, z)$  złożony z tych hiperpłaszczyzn, które oddzielają  $x$  od  $z$  oraz pewnego sąsiada  $x$ .

**Lemat 1.3.4.** *Niech  $X$  będzie kompleksem kostkowym  $CAT(0)$  oraz  $\dim X < \infty$ . Ponadto niech  $x \in X, z \in \overline{X}$ . Wówczas  $\#\mathfrak{R}_z(x) \leq \dim X$*

*Dowód.* Dowód można znaleźć w [3], lemat 1.13  $\square$

W następnym twierdzeniu uzasadnimy, że odcinki łączące wierzchołki (być może w nieskończoności) zanurzają się w odpowiednio dużą przestrzeń euklidesową. W oczywisty sposób  $\mathbb{R}^d$  możemy postrzegać jako kompleks kostkowy (patrz przykład 1.3.1). Zbiorem wierzchołków jest krata  $\mathbb{Z}^d$ . Odcinkami są prostopadłościany - dokładniej, jeśli  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_d), \bar{y} = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{Z}^d$ , to odcinkiem  $[\bar{x}, \bar{y}]$  jest powłoka wypukła podzbioru  $\mathbb{Z}^d$  złożonego z tych liczb, których  $i$ -ta współrzędna jest z przedziału  $[x_i, y_i]$  lub  $[y_i, x_i]$ . Żeby włączyć do naszych rozważań wierzchołki w nieskończoności, dopuszczamy możliwość, że  $x_i$  lub  $y_i = \pm\infty$  dla pewnego  $i = 1 \dots d$ .

**Twierdzenie 1.3.1.** *Niech  $X$  będzie skończenie wymiarowym kompleksem kostkowym  $CAT(0)$ ,  $\dim X = d$  oraz niech  $x, y \in \overline{X}$ . Wówczas odcinek  $[x, y]$  zanurza się izometrycznie w kompleksie kostkowym  $\mathbb{R}^d$ .*

Wprowadźmy na zbiorze  $\mathfrak{H}(x, y)$  częściowy porządek w następujący sposób:

$$H \preceq K \iff H_x \subset K_x$$

**Lemat 1.3.5.** Dwie płaszczyzny  $H, K \in \mathfrak{H}(x, y)$  nie są porównywalne w tym porządku wtedy i tylko wtedy, gdy się przecinają.

*Dowód.* Oczywiście jest, że  $H_x \cap K_x \neq \emptyset \neq H_y \cap K_y$ . Dalej,  $H_x \cap K_y = \emptyset \iff H_x \subset K_x \wedge H_y \cap K_x = \emptyset \iff K_x \subset H_x$ .  $H$  oraz  $K$  są więc nieporównywalne przez  $\preceq$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $K_x \not\subset H_x$  oraz  $H_x \not\subset K_x$ , a więc wtedy, gdy wszystkie cztery przecięcia są niepuste.  $\square$

**Lemat 1.3.6** (Dilworth). Niech  $(S, \preceq)$  będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Łańcuchem nazwiemy podzbiór  $S$ , którego elementy są parami porównywalne, antylańcuchem - podzbiór  $S$  nieposiadający dwóch różnych elementów porównywalnych. Jeśli zbiór  $S$  nie zawiera antylańcucha o mocy  $m + 1$ , to  $S$  jest sumą rozłączną  $m$  łańcuchów.

*Dowód.* Można znaleźć w (Dilworth, a decomposition theorem for partially ordered sets).  $\square$

**Wniosek 1.3.1.** Zbiór częściowo uporządkowany  $(\mathfrak{H}(x, y), \preceq)$  jest sumą rozłączną  $d$  łańcuchów.

*Dowód.* Wystarczy skorzystać z twierdzenia Helly'ego, lematu Dilwortha oraz lematu 1.3.5  $\square$

*Dowód twierdzenia 1.3.1.* Dowód tego twierdzenia przeprowadzimy tylko dla przypadku, gdy  $x$  jest wierzchołkiem  $X$ . Weźmy rozkład zbioru  $\mathfrak{H}(x, y)$  na łańcuchy, którego istnienia dostarcza poprzedni lemat

$$\mathfrak{H}(x, y) = \bigsqcup_{i=1}^d \mathfrak{B}_i$$

Niech teraz

$$X \supset [x, y] \ni z \rightarrow \bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_d) \in \mathbb{Z}^d, \bar{z}_i = \#\{H \in \mathfrak{B}_i : z \in H_y\}$$

Wówczas  $\bar{x} = 0$ , zaś  $\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_d)$ , gdzie  $\bar{y}_i = \#\mathfrak{B}_i, i = 1 \dots d$ . Dla każdego  $z \in [x, y]$  współrzędne  $\bar{z}$  są skończone oraz  $\bar{z} \in [\bar{x}, \bar{y}]$ .

Funkcja  $z \rightarrow \bar{z}$  zanurzeniem izometrycznym. Żeby to sprawdzić, wystarczy obliczyć:

$$d(\bar{v}, \bar{w}) = \sum_{i=1}^d \#\{H \in \mathfrak{B}_i : H \in \mathfrak{H}(v, w)\} = \#\mathfrak{H}(v, w) = d(v, w)$$

$\square$

## 1.4. Kombinacje

Funkcje, spełniające warunki Stwierdzenia 1.1.1. będziemy konstruować przy użyciu dwumianu Newtona, a więc funkcji  $\binom{n}{k}$ . Kombinatorycznie funkcja ta oznacza liczbę  $k$ -podzbiorów  $n$ -zbioru, w szczególności jej definicja jest poprawna dla całkowitych  $n \geq k \geq 0$ . Przy użyciu łatwej interpretacji kombinatorycznej można udowodnić relację rekurencyjną:

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$  dla  $n \geq 0$ .
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Można łatwo uogólnić tę funkcję dla wszystkich  $n, k \in \mathbb{Z}$  poprzez relację:

- $\binom{n}{0} = 1$  dla  $n \geq 0$  oraz  $\binom{n}{n} = 1$  dla  $n \in \mathbb{Z}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$  dla wszystkich  $n, k \in \mathbb{Z}$

Z powyższej definicji łatwo udowodnić kilka własności:

- $\binom{n}{k} = 0$  dla  $k < 0 \leq n$
- $\binom{n}{k} = (-1)^{n+k} \binom{-1-k}{-1-n}$

Sz szczególnie przydatna okaże się druga własność, dla  $k = -1$ . Przyjmuje wtedy ona formę

$$\binom{n}{-1} = (-1)^{n-1} \binom{0}{-1-n}$$



## Rozdział 2

# Kompleksy kostkowe CAT(0) a własność A

W tym rozdziale skupimy się na dowodzie twierdzenia łączącego kompleksy kostkowe CAT(0) z własnością A. Zaczniemy od przykładu motywującego dowód głównego twierdzenia. O funkcjach  $f_{n,x}$  wymienionych w Stwierdzeniu 1.1.1. będziemy mówić jako o *funkcjach wagowych*. Również z warunków podanych w tym stwierdzeniu korzystać będziemy zamiast definicji własności A.

Ustalmy również pewien wymiar  $\mathbb{N} \ni N \geq d$ . Niektóre lematy prawdziwe będą również dla przypadku  $N = d - 1$  - zostanie to odpowiednio podkreślone.

### 2.1. Własność A dla przestrzeni euklidesowych

**Przykład 2.1.1.** Niech  $T$  będzie  $\mathbb{R}$ -drzewem, a więc spójnym grafem niezawierającym cykli. Aby pokazać, że  $T$  ma własność A, ustalmy korzeń  $K$ . Dla każdego wierzchołka  $x \in X$  oraz  $n \in \mathbb{N}$  definiujemy funkcję wagową

$$\tilde{f}_{n,x}(y) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } y \neq K \\ n - d(x, y) & \text{jeśli } y = K \end{cases}$$

Wówczas ciąg rodzin funkcji  $f_{n,x}(y) = \tilde{f}_{n,x}(y) \cdot \mathbb{1}_{B(x,n)}(y)$  spełnia warunki Stwierdzenia 1.1.1

Pewna intuicja stojąca za tym przykładem jest następująca: przy  $n$  dążącym do nieskończoności rozkładamy wagę równomiernie na kuli  $B(x, n)$ , nadmiar zrzucając na ustalony korzeń. W pewien sposób intuicja ta okaże się użyteczna w przypadku wielowymiarowym, być może przy więcej niż jednym punkcie rozkładu nadmiaru.

Będziemy dalej oznaczać  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$ .

**Definicja 2.1.1.** Niedostatkiem punktu kratowego  $(y_1, \dots, y_d) = y \in \mathbb{Z}^d$  nazwiemy liczbę

$$\delta(y) = N - \#\{1 \leq j \leq d : y_j \neq 0\}$$

**Definicja 2.1.2.** Dla wierzchołka  $x \in \mathbb{Z}^d$  możemy zdefiniować ciąg rodzin funkcji wagowych następująco:

$$f_{n,x}(y) = \binom{n - d(x, y) + \delta(y)}{\delta(y)} \cdot \mathbb{1}_{[\mathbf{0}, x]}(y)$$

Nietrudno zauważyć kilka własności tego ciągu. Przy założeniu, iż  $N \geq d - 1$  mamy  $\delta(y) \geq (-1)$ , a więc funkcja  $f_{n,x}$  przyjmuje nieujemne wartości całkowite dla każdego  $x \in \mathbb{Z}^d$  oraz  $n \in \mathbb{N}$ . Funkcje te zależą również od niewymienionego *explicite* we wzorze  $N$ . Ponadto

$$\#\text{supp} f_{x,n} = \#[\mathbf{0}, x] < \infty$$

Przy tak zdefiniowanych wagach można pokazać, iż przestrzeń  $\mathbb{Z}^d$  ma własność  $A$ . Przez normę  $\|f(y)\|$  na przestrzeni funkcji o skończonym nośniku będziemy rozumieć

$$\|f\| = \|f\|_{\ell_1} = \sum_{x \in \text{dom}(f)} |f(x)|$$

**Lemat 2.1.1.** *Niech  $N \geq d - 1$  oraz  $x \in \mathbb{Z}^d$ . Wówczas dla tak zdefiniowanych funkcji mamy*

$$\|f_{n,x}\| = \binom{n+N}{N}$$

*Dowód.* Dowód przeprowadzimy przez indukcję ze względu na  $d$ , dla wygody oznaczeń napiszemy więc  $f_{n,x} \equiv f_{n,x}^d$ . Przypadek  $d = 0$  jest trywialny, gdyż  $\delta(y) = N$ . Załóżmy więc, że  $d > 0$ . Skorzystamy z rzutowania  $\mathbb{Z}^d \ni (z_1, \dots, z_d) = z \rightarrow \hat{z} = (z_2, \dots, z_d) \in \mathbb{Z}^{d-1}$ . Niech  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$ . Wówczas odcinek  $[\mathbf{0}, x]$  można utożsamić z  $[0, x_1] \times [\mathbf{0}, \hat{x}]$ , tym samym otrzymując dla każdego  $\hat{y} \in [\mathbf{0}, \hat{x}]$  ciąg  $y^0, y^1, \dots, y^{|x_1|}$  (w wypadku, gdyby  $x_1 < 0$ , rozważamy na odcinku  $[0, x_1]$  porządek  $0 < 1 < 2 \dots < x_1$ )

Pokażemy, że dla każdego  $\hat{y} \in [\mathbf{0}, \hat{x}]$  zachodzi

$$\sum_{j=0}^{|x_1|} f_{n,x}^d(y^j) = f_{n,\hat{x}}^{d-1}(\hat{y}) \quad (2.1)$$

Założmy jednak na moment, że to prawda. Możemy wtedy obliczyć normę  $f_{n,x}^d$ :

$$\begin{aligned} \|f_{n,x}^d\| &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} f_{n,x}^d(z) = \sum_{z \in [\mathbf{0}, x]} f_{n,x}^d(z) \\ &= \sum_{\hat{y} \in [\mathbf{0}, \hat{x}]} \sum_{j=0}^{|x_1|} f_{n,x}^d(z)(y^j) \stackrel{2.1}{=} \sum_{\hat{y} \in [\mathbf{0}, \hat{x}]} f_{n,\hat{x}}^{d-1}(\hat{y}) \\ &= \sum_{\hat{y} \in \mathbb{Z}^{d-1}} f_{n,\hat{x}}^{d-1}(\hat{y}) = \binom{n+N}{n} \end{aligned}$$

Aby udowodnić 2.1, należy zauważyć, iż  $\delta(y^{i+1}) = \delta(\hat{y}) - 1$  dla  $i \geq 0$  oraz iż  $d(x, y^i) = d(x, y^{i+1}) + 1$ , a następnie skorzystać z indukcji względem  $i = |x_1|$ . Dokładnie obliczenia zostawiam czytelnikowi.  $\square$

**Uwaga 2.1.1.** Z powyższego lematu wynika dość zaskakujący, ale przydatny fakt - norma  $f_{n,x}$  nie zależy od wyboru  $d$  ani  $x$ , jedynie  $n$  oraz  $N$ .

W celu udowodnienia własności  $A$  dla przestrzeni euklidesowych  $\mathbb{R}^n$  należy znaleźć pewne oszacowanie normy  $f_{n,x} - f_{n,x'}$  dla  $x, x' \in \mathbb{Z}^n$  w rozsądnej odległości od siebie. Odpowiada za to poniższy lemat:

**Lemat 2.1.2.** Dla każdego  $N \geq d$  i sąsiednich wierzchołków  $x, x' \in \mathbb{Z}^d$  mamy

$$\|f_{n,x} - f_{n,x'}\| = 2 \binom{n+N-1}{N-1}$$

*Dowód.* Będziemy rozróżniać funkcje wagowe dla różnych  $N$ , na potrzeby dowodu wprowadzimy więc oznaczenie  $f_{n,x} \equiv f_{n,x}^N$ . Mamy dla  $n, k \in \mathbb{Z}$  tożsamość  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ , a więc

$$\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1} \quad (2.2)$$

Niech  $x, x'$  będą sąsiednimi krawędziami i bez utraty ogólności możemy założyć, że  $x'$  jest bliżej  $\mathbf{0}$  niż  $x$ . Wówczas  $[\mathbf{0}, x'] \subset [\mathbf{0}, x]$  i dla każdego  $y \in [\mathbf{0}, x']$  mamy  $x' \in [y, x]$ . Wówczas również  $d(x, y) = d(x', y) + 1$ . Wybierając takie  $y$ , możemy napisać:

$$\begin{aligned} f_{n,x'}^N - f_{n,x}^N &= \binom{n-d(x',y)+\delta(y)}{\delta(y)} - \binom{n-d(x,y)+\delta(y)}{\delta(y)} \\ &= \binom{n-d(x',y)+\delta(y)}{\delta(y)} - \binom{n-d(x',y)+\delta(y)-1}{\delta(y)} \\ &\stackrel{2.2}{=} \binom{n-d(x',y)+\delta(y)-1}{\delta(y)-1} \\ &= f_{n,x'}^{N-1}(y) \end{aligned}$$

Z poprzedniego lematu wynika zatem, że  $\sum_{y \in [\mathbf{0}, x']} |f_{n,x'}^N - f_{n,x}^N| = \|f_{n,x'}^{N-1}\| = \binom{n+N-1}{N-1}$ . Do obliczenia normy  $f_{n,x'}^N - f_{n,x}^N$  brakuje więc tylko ogona  $\sum_{y \in [\mathbf{0}, x] \setminus [\mathbf{0}, x']} f_{n,x'}^N(y) - f_{n,x}^N(y)$ . Łatwo go obliczyć, zauważywszy, że z lematu 2.1.1. wynika, iż

$$\sum_{y \in [\mathbf{0}, x]} f_{n,x'}^N = \sum_{y \in [\mathbf{0}, x]} f_{n,x}^N$$

Jest tak, gdyż obie strony są równe normie, która przecież jest niezależna od  $x$ .

Lewą stronę można rozpisać jako  $\sum_{y \in [\mathbf{0}, x']} f_{n,x'}^N + \sum_{y \in [\mathbf{0}, x] \setminus [\mathbf{0}, x']} f_{n,x'}^N$ , podobnie prawą. Otrzymujemy wtedy:

$$\sum_{y \in [\mathbf{0}, x']} f_{n,x'}^N - f_{n,x}^N = \sum_{y \in [\mathbf{0}, x] \setminus [\mathbf{0}, x']} f_{n,x'}^N - f_{n,x}^N$$

Teza lematu jest już jasna:

$$\begin{aligned} \|f_{n,x'} - f_{n,x}\| &= \sum_{y \in [\mathbf{0}, x]} f_{n,x'}(y) - f_{n,x}(y) \\ &= \sum_{y \in [\mathbf{0}, x']} f_{n,x'}(y) - f_{n,x}(y) + \sum_{y \in [\mathbf{0}, x] \setminus [\mathbf{0}, x']} f_{n,x'}(y) - f_{n,x}(y) \\ &= 2 \sum_{y \in [\mathbf{0}, x']} f_{n,x'}(y) - f_{n,x}(y) = 2 \binom{n+N-1}{N-1} \end{aligned}$$

□

Powyższe wyniki prowadzą już do następującego twierdzenia:

**Twierdzenie 2.1.1.** *Przestrzeń euklidesowa  $\mathbb{R}^d$  ma własność A.*

*Dowód.* Korzystamy ze stwierdzenia 1.1.1. Odpowiedni ciąg stałych to  $S_n = n$ . Fakt, że nośnikiem kolejnych funkcji  $f_{n,x}$  jest  $B(x, n)$ , wynika stąd, że wyrażenie  $\binom{n-d(x,y)+\delta(y)}{\delta(y)}$  znika dla  $n - d(x, y) + \delta(y) < \delta(y)$ . Zbieżność wynika z ostatnich dwóch lematów, a dokładniej:

$$\frac{\|f_{n,x'} - f_{n,x}\|}{\|f_{n,x}\|} = 2 \frac{\binom{n+N-1}{N-1}}{\binom{n+N}{N}} = 2 \frac{N}{n+N} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

przy czym zbieżność jest jednostajna na zbiorze  $\{(x, x') : d(x, x') \leq 1\}$  □

Przedstawiony właśnie dowód własności A dla przestrzeni  $\mathbb{R}^d$  będzie motywacją. Dokładniej, wprowadzimy funkcje wagowe o dokładnie tych samych własnościach dotyczących normy. Do tego potrzebne będą nam odpowiednie włókna przy rzutowaniu, a także zmodyfikowana definicja niedostatku.

## 2.2. Własność A dla skończone wymiarowych kompleksów kostkowych CAT(0)

Niech  $X$  będzie kompleksem kostkowym CAT(0) oraz  $d = \dim X < \infty$ . Tak jak w poprzednim przypadku punktem bazowym (korzeniem) było  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^d$ , tak teraz ustalmy dowolny korzeń  $O \in X$ . Ustalmy ponadto pewien wymiar otoczki  $N \geq d - 1$ . Wtedy:

**Definicja 2.2.1.** Niedostatkiem wierzchołka  $y \in X$  nazwiemy liczbę

$$\delta(y) = N - \#\mathfrak{R}_O(y)$$

Tu  $\mathfrak{R}_O(y)$ , tak jak w poprzednim rozdziale, oznacza liczbę hiperpłaszczyzn sąsiadujących z  $y$  oraz oddzielających ten wierzchołek od korzenia.

Powyższa definicja pokrywa się z definicją niedostatku w przypadku, gdy  $X = \mathbb{R}^d$ , ponieważ wówczas liczba  $\#\mathfrak{R}_0(y)$  równa się liczbie niezerowych współrzędnych  $y$ .

Naśladując poprzedni rozmiar definiujemy więc funkcje wagowe

**Definicja 2.2.2.** Niech  $x \in X$  będzie krawędzią. Możemy wówczas ciąg rodzin funkcji wagowych zdefiniować następująco:

$$f_{n,x}(y) = \binom{n - d(x, y) + \delta(y)}{\delta(y)} \cdot \mathbb{1}_{[O,x]}(y)$$

Wykorzystamy teraz twierdzenie 1.3.1., mówiące, iż każdy odcinek  $[0, x]$  zanurza się izometrycznie w przestrzeń Euklidesową  $\mathbb{R}^d$ . Nazwijmy to zanurzenie  $\sigma$ , dla uproszczenia notacji będziemy jednak pisać  $\sigma(y) = \hat{y} \in \mathbb{Z}^d$ . Nie tracąc na ogólności, możemy założyć, że obraz  $O$  przy tym zanurzeniu to  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$ .

**Definicja 2.2.3.** Niech  $y \in [O, x]$ , przy czym  $\sigma(y) = \hat{y} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_d) \in \mathbb{Z}^d$ . Wówczas  $i$  (lub  $i$ -ta współrzędna) jest  **$y$ -związane**, jeśli wierzchołek  $(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_i - 1, \dots, \hat{y}_d) \in \mathbb{Z}^d$  jest w obrazie  $\sigma(X)$ . W przeciwnym przypadku  $i$  jest  **$y$ -wolne**.

**Definicja 2.2.4.** Niech  $y \in [0, x]$ . **Włóknom** odcinka  $I = [\hat{O}, \hat{x}]$  nad  $\hat{y}$  nazwiemy zbiór krawędzi  $\mathfrak{F}_y \subset \mathbb{Z}^d$ , taki, że dla każdego  $a \in \mathfrak{F}_y$  spełnione są następujące warunki:



- jeśli  $i$  jest  $y$ -związany, to  $a_i = \hat{y}_i$
- jeśli  $i$  jest  $y$ -wolny, to  $0 \leq a_i \leq \hat{y}_i$

Należy zwrócić uwagę, że włókno  $\mathfrak{F}_y$  jest odcinkiem łączącym punkt  $O_y = (O_{y,1}, \dots, O_{y,d})$ ,  $O_{y,i} = \hat{y}_i$  [ $i$  jest  $y$ -związany]) z punktem  $\hat{y}$ . W szczególności dla każdego  $y \in [O, x]$  zachodzi  $\hat{y} \in \mathfrak{F}_y$

**Stwierdzenie 2.2.1.** Odcinek  $I = [\hat{O}, \hat{x}]$  jest sumą rozłączną włókien wierzchołków odcinka  $[O, x]$ , dokładnie:

$$I = \bigsqcup_{y \in [O, x]} \mathfrak{F}_y$$

Dodatkowo każde włókno przecina się z odcinkiem  $J = \sigma([O, x])$  w dokładnie jednym punkcie.

Jest to konsekwencja poniższych dwóch lematów:

**Lemat 2.2.1.** Dla każdego  $y \neq z$ ,  $y, z \in [O, x]$  przecięcie włókien  $\mathfrak{F}_y, \mathfrak{F}_z$  jest puste.

*Dowód.* □

**Lemat 2.2.2.** Dla każdego  $a \in I = [\hat{O}, \hat{x}]$  istnieje  $y \in [O, x]$  taki, że  $a \in \mathfrak{F}_y$

*Dowód.* Niech  $\hat{y} \in [a, \hat{x}]$ , przy czym wybierzmy  $\hat{y}$  tak, aby odległość  $a$  od  $[a, \hat{x}] \cap J$  była najmniejsza. Oczywiście  $\hat{y}_i \geq a_i$  dla wszystkich  $i = 1, \dots, d$ . Ale każda  $y$ -związana współrzędna  $i$  mamy  $\hat{y}_i \leq a_i$ , bo gdyby było inaczej, to  $(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_i - 1, \hat{y}_d) \in [a, \hat{x}] \cap J$ , co przeczy doborowi  $\hat{y}$ . Zatem  $a \in \mathfrak{F}_y$ . □

W dalszej części rozważań przyjmiemy konwencję notacyjną, dla  $x \in [z, y]$  pisząc

$$n_z(x) \stackrel{\text{def}}{=} \#\mathfrak{R}_z(x)$$

Zwróćmy uwagę, że dla  $a \in \mathbb{Z}^d$  liczba  $n_{\mathbf{0}}(a)$  równa jest liczbie niezerowych współrzędnych  $a$ , zaś gdy  $y \in [O, x]$  jest jedynym takim wierzchołkiem, iż  $a \in \mathfrak{F}_y = [O_y, \hat{x}]$ , to  $n_{O_y}(a)$  równa się liczbie niezerowych,  $y$ -wolnych współrzędnych  $a$ .

**Lemat 2.2.3.** Dla każdego wierzchołka  $y \in [O, x]$  liczba  $y$ -związanych współrzędnych wynosi  $n_O(y)$ . Ponadto dla  $a \in \mathfrak{F}_y$  zachodzi relacja:

$$n_O(a) = n_{O_y}(a) + n_O(y)$$

*Dowód.* Jeśli  $i$ -ta współrzędna jest  $y$ -związana, wybierzmy  $z \in [O, x]$  tak, aby obrazy  $\hat{y}$  oraz  $\hat{z}$  różniły się tylko na  $i$ -tej współrzędnej, dla której  $\hat{z}_i = \hat{y}_i - 1$ . Wówczas oczywiście  $d(y, z) = d(\hat{y}, \hat{z}) = 1$ , a także  $d(O, y) = d(O, z) + 1$ . Zatem jedyna  $H \in \mathfrak{H}(y, z)$  należy również do  $\mathfrak{H}(O, y)$ . Pokażemy, że przyporządkowanie  $i \rightarrow H$  jest bijekcją. Różnowartościowość wynika z Wniosku 1.3.1., gdyż hiperpłaszczyzna  $H$  należy do  $i$ -tego łańcucha. Aby wykazać surjektywność, należy zauważyć, iż jeśli  $H \in \mathfrak{R}_O(y)$ , to  $H \in \mathfrak{H}(O, x)$ , a więc  $H$  jest obrazem  $i$  takiego, że  $H \in \mathfrak{B}_i$ . To dowodzi pierwszej części.

Aby uzyskać drugą część, wystarczy skorzystać z tego, że każda niezerowa współrzędna  $a$  jest albo  $y$ -związana, albo  $y$ -wolna, nigdy jednocześnie. Pierwszy składnik odpowiada za to drugie, zaś drugi - za to pierwsze. □

W końcu możemy przejść do dowodu twierdzenia zamykającego tę pracę:

**Twierdzenie 2.2.1.** *Niech  $X$  będzie kompleksem kostkowym  $CAT(0)$  oraz  $d = \dim X < \infty$ . Wówczas  $X$  ma własność  $A$ .*

Dowód przebiega bez zmian względem dowodu własności  $A$  dla przestrzeni euklidesowych, wykorzystując przy okazji następujące lematy:

**Lemat 2.2.4.** *Niech  $X$  będzie kompleksem kostkowym o wymiarze nie większym niż  $d < \infty$ . Przyjmijmy pewien wymiar otoczki  $N \geq d - 1$ . Niech wreszcie  $x \in X$  będzie wierzchołkiem. Wówczas*

$$\|f_{n,x}\| = \binom{n+N}{n}$$

*Dowód.* Przyjmijmy, że  $\sigma([O, x]) = J \subset I = [\mathbf{0}, \hat{x}]$  dla ustalonego  $x \in X$ .

Funkcje wagowe zależą od  $n, x$ , ale także od wymiaru otoczki  $N$ , a także kompleksu, na którym je rozpatrujemy,  $X$ . Zależność tę będziemy wykorzystywać w dowodzie, zatem przyjmijmy notację

$$f_{n,x} \equiv f_{n,x}^{N,X}$$

Podobnie będziemy oznaczać niedostatek:  $\delta(y) \equiv \delta(y)^{N,X}(y)$ . Elementy włókna mają dwa niedostatki, jeden względem  $\hat{O} \in I$ , drugi zaś względem punktu bazowego  $O_y$  takiego, że  $\mathfrak{F}_y = [O_y, \hat{x}]$ . Będziemy oznaczać je odpowiednio  $\delta^{N,I}(a)$  oraz  $\delta^{N,\mathfrak{F}_y}(a)$ . Zachodzi wówczas wzór

$$\delta^{N,I}(a) = \delta^{N_y, \mathfrak{F}_y}(a), \quad N_y = N - n_O(y) \quad (2.3)$$

Dowód tej tożsamości jest dość prosty. Zgodnie z definicją mamy:

$$\delta^{N,I}(a) = N - n_{\hat{O}}(a), \quad \delta^{N,\mathfrak{F}_y}(a) = (N - n_{O_y}(a)), \quad \delta^{N,X} = N - n_O(y),$$

co razem z Lematem 2.2.3. daje 2.3

Nasz lemat jest łatwym zastosowaniem następującej równości:

$$f_{n,x}^{N,X}(y) = \sum_{a \in \mathfrak{F}_y} f_{n,\hat{x}}^{N,\mathbb{R}^d} \quad (2.4)$$

Rzeczywiście, założmy na moment, że to prawda. Wówczas, korzystając ze Stwierdzenia 2.2.1., mówiącego, iż odcinek  $I$  jest rozłączną sumą włókien, otrzymamy ciąg równości:

$$\begin{aligned} \|f_{n,x}^{N,X}\| &= \sum_{y \in [O,x]} f_{n,x}^{N,X}(y) \\ &= \sum_{y \in [O,x]} \sum_{a \in \mathfrak{F}_y} f_{n,\hat{x}}^{N,\mathbb{R}^d}(a) = \sum_{a \in I} f_{n,\hat{x}}^{N,\mathbb{R}^d}(a) \\ &= \|f_{n,\hat{x}}^{N,\mathbb{R}^d}(a)\| \stackrel{\text{lemat 2.1.1.}}{=} \binom{n+N}{n} \end{aligned}$$

Pozostaje udowodnić 2.4. W tym celu ustalmy  $y \in [O, x]$ . Możemy założyć  $d(x, y) \leq n$ , gdyż w przeciwnym wypadku obie strony znikają.

Wykorzystując więc 2.3, możemy otrzymać 2.4:

$$\begin{aligned} f_{n,\hat{x}}^{N,\mathbb{R}^d}(a) &= \binom{n - d(\hat{x}, a) + \delta^{N,I}}{\delta^{N,I}(a)} \\ &= \binom{(n - d(\hat{x}, \hat{y})) - d(\hat{y}, a) + \delta^{N_y, \mathfrak{F}_y}(a)}{\delta^{N_y, \mathfrak{F}_y}(a)} \\ &= f_{n-d(\hat{x}, \hat{y}), \hat{y}}^{N_y, \mathfrak{F}_y}(a) \end{aligned}$$

Pamiętając, że  $x \rightarrow \hat{x}$  jest izometrią, oraz sumując po  $a \in \mathfrak{F}_y$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \mathfrak{F}_y} f_{n, \hat{x}}^{N, \mathbb{R}^d}(a) &= \|f_{n-d(x,y), \hat{y}}^{N_y, \mathfrak{F}_y}\| \\ &= \binom{n-d(x,y) + N_y}{N_y} = \binom{n-d(x,y) + \delta^{N,X}(y)}{\delta^{N,X}(y)}, \end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika z 2.3. Wobec tego 2.4 zostało udowodnione, a więc i cały lemat.  $\square$

**Lemat 2.2.5.** *Niech  $X$  będzie kompleksem kostkowym  $CAT(0)$  o wymiarze  $d = \dim X < \infty$ . Dla każdej pary sąsiednich wierzchołków  $x, x'$  zachodzi:*

$$\|f_{n, x'} - f_{n, x}\| = 2 \binom{n + N - 1}{N - 1}$$

Dowód, zarówno tego lematu, jak i całego twierdzenia, jest identyczny jak w przypadku euklidesowym.



# Bibliografia

- [1] Pierre Emmanuel Caprace. Lectures on proper  $\text{cat}(0)$  spaces and their isometry groups. 2012.
- [2] Piotr Nowak oraz Guoliang Yu. What is... property a? *Notices of the American Mathematical Society* 55 (2008), no. 4, 474–475., 2008.
- [3] J. Brodzki S. J. Campbell E. Guentner G. A. Niblo oraz N. J. Wright. Property a and  $\text{cat}(0)$  cube complexes. *Journal of Functional Analysis*.
- [4] John Roe. *Lectures on coarse geometry*, volume 31 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2003.
- [5] Michah Sageev.  $\text{Cat}(0)$  cube complexes and groups. *AS/Park City Mathematics Series*.
- [6] Petra Schwer. Lecture notes on  $\text{cat}(0)$  cubical complexes). 2013.
- [7] Rufus Willett. Some notes on property a. arXiv:math/0612492v2, 2006.