高等量子力学第二次作业

董建宇 202328000807038

习题 1.9

计算角动量分量之间的对易关系，并证明

$$[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_z] = 0.$$

利用基本对易关系 $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$。则有:

$$\begin{aligned}
[\hat{L}_x, \hat{L}_y] =&[\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z] = i\hbar(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x) = i\hbar\hat{L}_z,\\
[\hat{L}_y, \hat{L}_z] =&[\hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z, \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x] = i\hbar(\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y) = i\hbar\hat{L}_x,\\
[\hat{L}_z, \hat{L}_x] =&[\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x, \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y] = i\hbar(\hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z) = i\hbar\hat{L}_y.
\end{aligned}$$

利用 $\hat{\vec{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$，可以计算:

$$[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_z] = [\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2, \hat{L}_z] = -i\hbar(\hat{L}_x\hat{L}_y + \hat{L}_y\hat{L}_x) + i\hbar(\hat{L}_y\hat{L}_x + \hat{L}_x\hat{L}_y) = 0.$$

习题 1.10

用 Schwartz 不等式证明不确定关系。

令 $\hat{A}' = \hat{A} - \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$，$\hat{B}' = \hat{B} - \langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle$，则 $\hat{A}'$ 和 $\hat{B}'$ 为厄米算符，根据 Schwartz 不等式，有:

$\langle\psi|\hat{A}'^2|\psi\rangle\langle\psi|\hat{B}'^2|\psi\rangle = (\langle\psi|\hat{A}'^\dagger)(\hat{A}'|\psi\rangle)(|\psi\rangle\hat{B}'^\dagger)(\hat{B}'|\psi\rangle) \geq \left|\langle\psi|\hat{A}'^\dagger\hat{B}'|\psi\rangle\right|^2 = \left|\langle\psi|\hat{A}'\hat{B}'|\psi\rangle\right|^2$

记 $\langle\psi|\hat{A}'\hat{B}'|\psi\rangle = a + ib$，其中 a, b 为实数。则有:

$\left|\langle\psi|\hat{A}'\hat{B}'|\psi\rangle\right|^2 = a^2+b^2 = \frac{1}{4}\left(\left|\langle\psi|[\hat{A}', \hat{B}']|\psi\rangle\right|^2 + \left|\langle\psi|\{\hat{A}', \hat{B}'\}|\psi\rangle\right|^2\right) \geq \frac{1}{4}\left|\langle\psi|[\hat{A}', \hat{B}']|\psi\rangle\right|^2.$

则有:

$$\langle\psi|\hat{A}'^2|\psi\rangle\langle\psi|\hat{B}'^2|\psi\rangle \geq \frac{1}{4}\left|\langle\psi|[\hat{A}', \hat{B}']|\psi\rangle\right|^2.$$

带入 $\hat{A}' = \hat{A} - \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$，$\hat{B}' = \hat{B} - \langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle$，可得:

$$\langle\psi|\hat{A}'^2|\psi\rangle\langle\psi|\hat{B}'^2|\psi\rangle = (\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4}\left|\langle\psi|[\hat{A}', \hat{B}']|\psi\rangle\right|^2 = \frac{1}{4}\left|\langle\psi|i[\hat{A}', \hat{B}']|\psi\rangle\right|^2.$$

两侧开平方可得不确定关系。

习题 1.11

一个 $\frac{1}{2}$ 自旋的希尔伯特空间的基矢记为 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$，其上定义的两个厄米算符为:

$$\hat{\sigma}_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

$$\hat{\sigma}_x = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$$

对于两个 $\frac{1}{2}$ 自旋，其希尔伯特空间的基矢为 $\{|0\rangle \otimes |0\rangle, |0\rangle \otimes |1\rangle, |1\rangle \otimes |0\rangle, |1\rangle \otimes |1\rangle\}$。在此希尔伯特空间上试证明

$$\{\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x\}$$

构成该希尔伯特空间上的厄米算符完备组。

在该基矢表象下，俩个算符的矩阵表示为:

$$\sigma_z \otimes \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma_x \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

显然有：$[\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x] = 0$。
易知，$\sigma_z \otimes \sigma_z$ 具有两个本征值 $1, -1$。
对应本征值为 1 的本征向量分别为:

$$u_1 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T,\ u_2 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^T.$$

构造两组线性无关向量 u_1', u_2' 为:

$$u_1' = \frac{u_1 + u_2}{\sqrt{2}} = (\tfrac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad 0 \quad \tfrac{1}{\sqrt{2}})^T,\ u_2' = \frac{u_1 - u_2}{\sqrt{2}} = (\tfrac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad 0 \quad -\tfrac{1}{\sqrt{2}})^T.$$

可以计算:

$$\sigma_x \otimes \sigma_x u_1' = u_1',\ \sigma_x \otimes \sigma_x u_2' = -u_2'.$$

即 u_1' 为 $\sigma_x \otimes \sigma_x$ 本征值为 1 的本征向量，u_2' 为 $\sigma_x \otimes \sigma_x$ 本征值为 -1 的本征向量。
对应本征值为 -1 的本征向量分别为:

$$v_1 = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)^T,\ v_2 = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)^T.$$

同样地，构造两组线性无关向量 v_1', v_2' 为:

$$v_1' = \frac{v_1 + v_2}{\sqrt{2}} = (0 \quad \tfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \tfrac{1}{\sqrt{2}} \quad 0)^T,\ v_2' = \frac{v_1 - v_2}{\sqrt{2}} = (0 \quad \tfrac{1}{\sqrt{2}} \quad -\tfrac{1}{\sqrt{2}} \quad 0)^T.$$

可以计算:

$$\sigma_x \otimes \sigma_x v_1' = v_1',\ \sigma_x \otimes \sigma_x v_2' = -v_2'.$$

即 v_1' 为 $\sigma_x \otimes \sigma_x$ 本征值为 1 的本征向量，v_2' 为 $\sigma_x \otimes \sigma_x$ 本征值为 -1 的本征向量。
综上所述，$\{\hat{\sigma}_z \otimes \hat{\sigma}_z,\ \hat{\sigma}_x \otimes \hat{\sigma}_x\}$ 构成该希尔伯特空间上的厄米算符完备组。

习题 **1.12**

试证明：希尔伯特空间上的线性算符 $\hat{O}$ 满足 $\hat{O}^\dagger \hat{O} = \hat{O}\hat{O}^\dagger$ 当且仅当算符 $\hat{O}$ 可以分解成 $\hat{O} = \hat{A} + i\hat{B}$，其中算符 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 是互相对易的厄米算符。

当算符 $\hat{O}$ 可以被分解成 $\hat{O}=\hat{A}+i\hat{B}$，且 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 是对易的厄米算符，则有:

$$[\hat{O},\hat{O}^\dagger]=[\hat{A}+i\hat{B},\hat{A}-i\hat{B}]=0.$$

即 $\hat{O}^\dagger\hat{O}=\hat{O}\hat{O}^\dagger$。

任意一个线性算符 $\hat{O}$ 都可以分解为 $\hat{O}=\hat{A}+i\hat{B}$，其中 $\hat{A}$, $\hat{B}$ 为厄米算符。当算符 $\hat{O}$ 满足 $\hat{O}^\dagger\hat{O}=\hat{O}\hat{O}^\dagger$ 时，有:

$$[\hat{O},\hat{O}^\dagger]=[\hat{A}+i\hat{B},\hat{A}-i\hat{B}]=-i[\hat{A},\hat{B}]+i[\hat{B},\hat{A}]=-2i[\hat{A},\hat{B}]=0.$$

即 $[\hat{A},\hat{B}]=0$。

综上所述，希尔伯特空间上的线性算符 $\hat{O}$ 满足 $\hat{O}^\dagger\hat{O}=\hat{O}\hat{O}^\dagger$ 当且仅当算符 $\hat{O}$ 可以分解成 $\hat{O}=\hat{A}+i\hat{B}$，其中算符 $\hat{A}$ 和 $\hat{B}$ 是互相对易的厄米算符。

习题 1.13

利用幺正变换重新推导

$$\langle b|\hat{O}|b'\rangle=\sum_{a,a'}\langle b|a\rangle\langle a|\hat{O}|a'\rangle\langle a'|b'\rangle.$$

利用幺正变换

$$|b\rangle=\hat{U}|a\rangle\,,\ \hat{U}=\sum|b\rangle\langle a|\,.$$

可以计算:

$$\begin{aligned}\langle b|\hat{O}|b'\rangle&=\langle b|\hat{U}^\dagger\hat{U}\hat{O}\hat{U}^\dagger\hat{U}|b\rangle\\&=\sum_{nmlk}\langle b|a_n\rangle\langle b_n|b_m\rangle\langle a_m|\hat{O}|a_l\rangle\langle b_l|b_k\rangle\langle a_k|a\rangle\\&=\sum_{nl}\langle b|a_n\rangle\langle a_n|\hat{O}|a_l\rangle\langle a_l|b'\rangle\end{aligned}$$

习题 1.14

$\hat{A}$ 是厄米算符，幺正变换对其作用可写为

$$\hat{A}'=\hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger$$

证明 $\hat{A}'$ 也为厄米算符，且它和 $\hat{A}$ 有相同的本征值。

因为 $\hat{A}$ 为厄米算符，则有

$$\hat{A}^\dagger=\hat{A}.$$

则可以计算:

$$\hat{A}'^\dagger=(\hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger)^\dagger=\hat{U}\hat{A}^\dagger\hat{U}^\dagger=\hat{U}\hat{A}\hat{U}^\dagger=\hat{A}'.$$

对于 $\hat{A}$ 的任意本征态 $|a\rangle$，满足本征值方程

$$\hat{A}|a\rangle=a|a\rangle\,.$$

都可以选取 $|a'\rangle = \hat{U}|a\rangle$，可以计算:

$$\hat{A}'|a'\rangle = \hat{U}\hat{A}\hat{U}^{\dagger}\hat{U}|a\rangle = \hat{U}\hat{A}|a\rangle = a\hat{U}|a\rangle = a|a'\rangle.$$

即 $\hat{A}'$ 与 $\hat{A}$ 具有相同本征值。

习题 1.15

证明 $\hat{U} = \sum_n e^{i\theta_n}|c_n\rangle\langle c_n| = e^{i\sum_n \theta_n|c_n\rangle\langle c_n|} = e^{i\hat{A}}$。

令 $\hat{A} = \sum_n \theta_n |c_n\rangle\langle c_n|$，则有:

$$\hat{A}^2 = \sum_{n,n'} \theta_n\theta'_n |c_n\rangle\langle c_n|c'_n\rangle\langle c'_n| = \sum_n \theta_n^2 |c_n\rangle\langle c_n|.$$

即

$$\hat{A}^n = \sum_m \theta_m^n |c_m\rangle\langle c_m|.$$

则有:

$$\begin{aligned} f(\hat{A}) =& e^{i\hat{A}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}i^n\hat{A}^n \\ =& \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\sum_m \theta_m^n |c_m\rangle\langle c_m| \\ =& \sum_m |c_m\rangle\langle c_m| \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta_m)^n}{n!} \\ =& \sum_m e^{i\theta_m}|c_m\rangle\langle c_m| \\ =& \sum_n e^{i\theta_n}|c_n\rangle\langle c_n|. \end{aligned}$$

习题 1.16

计算 $\hat{\sigma}_y$ 表象下 Pauli 矩阵的表示。

Pauli 矩阵在 $\hat{\sigma}_z$ 算符本征基矢下的表示分别为:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

将 σ_y 对角化，可以计算其本征值满足方程为:

$$\mathbf{det}(\sigma_y - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0.$$

即两个本征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$。

对应本征值 $\lambda_1 = 1$ 的本征态矢量为: $u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T$;

对应本征值 $\lambda_2 = -1$ 的本征态矢量为: $u_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T$。

即幺正矩阵 $U = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ 满足:

$$UU^\dagger = 1;\ U^\dagger \sigma_y U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

同样的，可以计算:

$$U^\dagger \sigma_x U = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},\ U^\dagger \sigma_z U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

综上所述，在 $\hat{\sigma}_y$ 表象下，Pauli 矩阵的表示为:

$$(\sigma_x)_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},\ (\sigma_y)_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ (\sigma_z)_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

习题 1.17

试求在动量 $\hat{p}$ 表象下算符 $\hat{x}$ 和 $\hat{p}$ 的表示。

在动量表象下，动量算符的表示为:

$$\langle p|\hat{p}|p'\rangle = p\delta(p-p').$$

在动量表象下，坐标算符的表示为:

$$\begin{aligned}\langle p|\hat{x}|p'\rangle &= \int dx x \langle p|x\rangle \langle x|p'\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int dx x e^{ix(p'-p)/\hbar} \\ &= \frac{i}{2\pi}\int dx \frac{\partial}{\partial p} e^{ix(p'-p)/\hbar} \\ &= \frac{i}{2\pi}\frac{\partial}{\partial p}\int dx e^{ix(p'-p)/\hbar} \\ &= i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\delta(p'-p).\end{aligned}$$

习题 1.18

证明 $\langle n|m\rangle = \delta_{mn}$。

由 $|n\rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle$，可以计算:

$$\langle n|m\rangle = \langle 0|\frac{\hat{a}^n \hat{a}^{\dagger m}}{\sqrt{n!m!}}|0\rangle.$$

可以计算:

$$\begin{aligned}\hat{a}\hat{a}^\dagger =&\hat{n}+1;\\ \hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger =&\hat{a}(\hat{n}+1)\hat{a}^\dagger\\ =&(\hat{n}+1)\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}\hat{a}^\dagger\\ =&(\hat{n}+2)\hat{a}\hat{a}^\dagger\\ =&(\hat{n}+2)(\hat{n}+1)\end{aligned}$$

假设当 $n=k$ 时，有:

$$\hat{a}^k\hat{a}^{\dagger k}=\prod_{i=1}^{k}(\hat{n}+i).$$

可以验证，当 $n=k+1$ 时，有:

$$\begin{aligned}\hat{a}^{k+1}\hat{a}^{\dagger(k+1)} =&\hat{a}\hat{a}^k\hat{a}^{\dagger k}\hat{a}^\dagger\\ =&\hat{a}\prod_{i=1}^{k}(\hat{n}+i)\hat{a}^\dagger\\ =&\prod_{i=1}^{k}(\hat{n}+1+i)\hat{a}\hat{a}^\dagger\\ =&\prod_{i=2}^{k+1}(\hat{n}+i)(\hat{n}+1)\\ =&\prod_{i=1}^{k+1}(\hat{n}+i).\end{aligned}$$

则容易得到，当 $n=m$ 时，有:

$$\langle n|n\rangle=\langle 0|\,\frac{\prod_{i=1}^{n}(\hat{n}+1)}{n!}\,|0\rangle=\frac{n!}{n!}\,\langle 0|\,0\rangle=1.$$

当 $n\neq m$ 时，不妨取 $n<m$，令 $l=m-n>0$。则有:

$$\langle n|\,m\rangle=\langle 0|\,\frac{\hat{a}^n\hat{a}^{\dagger(n+l)}}{\sqrt{n!m!}}\,|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!m!}}\,\langle 0|\prod_{i=1}^{n}(\hat{n}+i)\hat{a}^{\dagger l}\,|0\rangle=\sqrt{\frac{n!}{m!}}\,\langle 0|\,\hat{a}^{\dagger l}\,|0\rangle=0.$$

其中利用了 $\langle 0|\,\hat{a}^\dagger=0$.

同样的，当 $n>m$ 时，令 $s=n-m$。则有:

$$\langle n|\,m\rangle=\langle 0|\,\frac{\hat{a}^{s+m}\hat{a}^{\dagger m}}{\sqrt{n!m!}}\,|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!m!}}\,\langle 0|\,\hat{a}^s\prod_{i=1}^{m}(\hat{n}+i)\,|0\rangle=\sqrt{\frac{m!}{n!}}\,\langle 0|\,\hat{a}^s\,|0\rangle=0.$$

其中利用了 $\hat{a}\,|0\rangle=0$.

综上所述，$\langle n|\,m\rangle=\delta_{mn}$。

习题 1.19

求粒子数表象下 $\hat{a}$ 和 $\hat{a}^\dagger$ 的表示。

注意到对于 $\hat{a}$ 和 $\hat{a}^\dagger$ 有:

$$\hat{n}\hat{a}\left|n\right\rangle = (n-1)\hat{a}\left|n\right\rangle,\ \hat{n}\hat{a}^\dagger\left|n\right\rangle = (n+1)\hat{a}^\dagger\left|n\right\rangle,\ \hat{n}\left|n\right\rangle = n\left|n\right\rangle.$$

则有:

$$\hat{a}\left|n\right\rangle = \lambda_1\left|n-1\right\rangle;\ \hat{a}^\dagger\left|n\right\rangle = \lambda_2\left|n+1\right\rangle.$$

利用 $\hat{n}=\hat{a}^\dagger\hat{a}$, 可以计算:

$$\hat{n}\left|n\right\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}\left|n\right\rangle = \lambda_2\lambda_1\left|n\right\rangle$$

利用正交归一性, 则有:

$$\left\langle n\right|\hat{a}^\dagger\hat{a}\left|n\right\rangle = \left\langle n\right|\hat{n}\left|n\right\rangle = n = |\lambda_1|^2\left\langle n-1|n-1\right\rangle = |\lambda_1|^2$$

$$\left\langle n\right|\hat{a}\hat{a}^\dagger\left|n\right\rangle = \left\langle n\right|(\hat{n}+1)\left|n\right\rangle = n+1 = |\lambda_2|^2\left\langle n+1|n+1\right\rangle = |\lambda_2|^2$$

选取相位因子为 0, 则有:

$$\lambda_1=\sqrt{n},\ \lambda_2=\sqrt{n+1}.$$

即:

$$\hat{a}\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle;\ \hat{a}^\dagger\left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle.$$

则在粒子数表象下, $\hat{a}$ 和 $\hat{a}^\dagger$ 的表示分别可以写为:

$$\left\langle m\right|\hat{a}\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left\langle m|n-1\right\rangle = \sqrt{n}\delta_{m,n-1};$$

$$\left\langle m\right|\hat{a}^\dagger\left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left\langle m|n+1\right\rangle = \sqrt{n+1}\delta_{m,n+1}.$$

写成矩阵形式, 为:

$$a=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix};$$

$$a^\dagger=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

习题 1.20

求本征波函数 $\langle x|n\rangle$。

在粒子数表象下, 基矢 $\left|n\right\rangle$ 可以由 $\hat{a}^\dagger$ 不断作用在 $\left|0\right\rangle$ 上得到, 即:

$$\left|n\right\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\left|0\right\rangle.$$

利用 $\hat{a}\,|0\rangle = 0$，有:

$$\langle x|\,\hat{a}\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0} + \frac{\hbar}{p_0}\frac{\partial}{\partial x}\right)H_0(x) = 0.$$

其中 $\varphi_0(x) = \langle x|0\rangle$。可以解得:

$$\varphi_0(x) = Ce^{-\frac{M\omega}{2\hbar}x^2}.$$

其中 C 为归一化系数。利用归一性，可以计算系数 C:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_0(x)|^2\,dx = |C|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{M\omega}{\hbar}x^2}\,dx = |C|^2\sqrt{\frac{\pi\hbar}{M\omega}} = 1.$$

取相位因子为 0，则有:

$$\varphi_0(x) = \left(\frac{M\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{M\omega}{2\hbar}x^2}.$$

则本征波函数为:

$$\begin{aligned}\langle x|\,n\rangle =& \langle x|\,\frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{x}{x_0} - \frac{\hbar}{p_0}\frac{d}{dx}\right)^n \varphi_0(x)\\ =& \sqrt{\frac{\hbar^n}{(2M\omega)^n n!}}\left(\frac{M\omega}{\hbar}x - \frac{d}{dx}\right)^n \varphi_0(x).\end{aligned}$$

可以计算:

$$\varphi_1(x) = \left[\frac{4}{\pi}\left(\frac{M\omega}{\hbar}\right)^3\right]^{1/4} xe^{-\frac{M\omega}{2\hbar}x^2},\ \varphi_2(x) = \left(\frac{M\omega}{4\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(\frac{2M\omega}{\hbar}x^2 - 1\right)e^{-\frac{M\omega}{2\hbar}x^2}.$$