高等量子力学第十一次作业

董建宇 202328000807038

习题 5.7

证明全同单分量费米子系统接触势相互作用为 0.

Proof. 对于全同单分量费米子系统，接触势写成二次量子化形式如下:

$$
\begin{aligned}
V =&\sum_{i<j} V(\vec{r}_i,\vec{r}_j)\\
=&\sum_{i<j} g\delta(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\\
=&\frac{g}{2}\int d\vec{r}_1 d\vec{r}_1' d\vec{r}_2 d\vec{r}_2' \langle\vec{r}_1;\vec{r}_2|\,\delta(\hat{\vec{r}}_1-\hat{\vec{r}}_2)\,|\vec{r}_1';\vec{r}_2'\rangle\,\psi^\dagger(\vec{r}_1)\psi^\dagger(\vec{r}_2)\psi(\vec{r}_2)\psi(\vec{r}_1)\\
=&\frac{g}{2}\int d\vec{r}\psi^\dagger(\vec{r})\psi^\dagger(\vec{r})\psi(\vec{r})\psi(\vec{r})\\
=&\frac{g}{2}\int d\vec{r}\sum_{\vec{k}_1',\vec{k}_2',\vec{k}_1,\vec{k}_2}\frac{1}{V^2}e^{i(\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_1'-\vec{k}_2')\cdot\vec{r}}c^\dagger_{\vec{k}_1'}c^\dagger_{\vec{k}_2'}c_{\vec{k}_2}c_{\vec{k}_1}\\
=&\frac{g}{2V}\sum_{\vec{k}_1',\vec{k}_2',\vec{k}_1,\vec{k}_2}\delta_{\vec{k}_1'+\vec{k}_2',\vec{k}_1+\vec{k}_2}c^\dagger_{\vec{k}_1'}c^\dagger_{\vec{k}_2'}c_{\vec{k}_2}c_{\vec{k}_1}.
\end{aligned}
$$

此时体系的基态可以写作:

$$
|G\rangle=\prod_{k\le k_F}c_k^\dagger\,|0\rangle\,.
$$

基态下势能为:

$$
E_V=\langle G|\,\hat{V}\,|G\rangle=\frac{g}{2V}\sum_{\vec{k}_1',\vec{k}_2',\vec{k}_1,\vec{k}_2}\delta_{\vec{k}_1'+\vec{k}_2',\vec{k}_1+\vec{k}_2}\,\langle G|\,c^\dagger_{\vec{k}_1'}c^\dagger_{\vec{k}_2'}c_{\vec{k}_2}c_{\vec{k}_1}\,|G\rangle\,.
$$

其中 Hartree 能为:

$$
\begin{aligned}
E_{VH}=&\frac{g}{2V}\sum_{\vec{k}_1',\vec{k}_2',\vec{k}_1,\vec{k}_2}\delta_{\vec{k}_1'+\vec{k}_2',\vec{k}_1+\vec{k}_2}\,\langle G|\,c^\dagger_{\vec{k}_1'}c_{\vec{k}_1}\,|G\rangle\,\langle G|\,c^\dagger_{\vec{k}_2'}c_{\vec{k}_2}\,|G\rangle\\
=&\frac{g}{2V}\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2}n_{\vec{k}_1}n_{\vec{k}_2}\\
=&\frac{g}{2V}N^2.
\end{aligned}
$$

Fock 能，即交换能为:

$$
E_{VF}=-\frac{g}{2V}\sum_{\vec{k}_1',\vec{k}_2',\vec{k}_1,\vec{k}_2}\delta_{\vec{k}_1'+\vec{k}_2',\vec{k}_1+\vec{k}_2}\,\langle G|\,c^\dagger_{\vec{k}_1'}c_{\vec{k}_2}\,|G\rangle\,\langle G|\,c^\dagger_{\vec{k}_2'}c_{\vec{k}_1}\,|G\rangle
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{g}{2V}\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2} n_{\vec{k}_2} n_{\vec{k}_1} \\
&= -\frac{g}{2V}N^2.
\end{aligned}
$$

即接触势相互作用总能量为:

$$
E_V = E_{VH} + E_{VF} = 0.
$$

□

习题 5.8

交换能 E_{VF} 是否由单分量接触势引起，以致应该忽略？解释没有忽略它的原因。

Proof. 交换能 E_{VF} 是由于单分量接触势引起。但是由于 Hartree 能与自旋取向无关，即 Hartree 能与 Fock 能不能完全抵消，从而不能忽略交换能。 □

习题 5.9

在海森堡绘景求解算符 $a_{\vec{m}}$ 和 $a_{\vec{m}}^\dagger$ 的运动方程，并观察方程的特点。哈密顿量为:

$$
H = \epsilon_L \sum_{\vec{m}\neq 0}\left((\vec{m}^2 + \frac{2Na}{\pi L}) a_{\vec{m}}^\dagger a_{\vec{m}} + \frac{Na}{\pi L}(a_{\vec{m}}^\dagger a_{-\vec{m}}^\dagger + a_{\vec{m}} a_{-\vec{m}}) \right)
$$

Proof. 由 Hessiberg 运动方程可以计算:

$$
\begin{aligned}
i\hbar \frac{da_{\vec{m}}}{dt} =&[a_{\vec{m}}, H] = \epsilon_L \left((\vec{m}^2 + \frac{2Na}{\pi L}) a_{\vec{m}} + \frac{2Na}{\pi L} a_{-\vec{m}}^\dagger \right); \\
i\hbar \frac{da_{\vec{m}}^\dagger}{dt} =&[a_{\vec{m}}^\dagger, H] = \epsilon_L \left(-(\vec{m}^2 + \frac{2Na}{\pi L}) a_{\vec{m}}^\dagger - \frac{2Na}{\pi L} a_{-\vec{m}} \right).
\end{aligned}
$$

从而可以得到:

$$
\begin{aligned}
i\hbar \frac{d(a_{\vec{m}} + a_{-\vec{m}}^\dagger)}{dt} &= \epsilon_L \left(\vec{m}^2 (a_{\vec{m}} - a_{-\vec{m}}^\dagger) \right); \\
i\hbar \frac{d(a_{\vec{m}} - a_{-\vec{m}}^\dagger)}{dt} &= \epsilon_L \left((\vec{m}^2 + \frac{4Na}{\pi L})(a_{\vec{m}} + a_{-\vec{m}}^\dagger) \right).
\end{aligned}
$$

从而有:

$$
\begin{aligned}
-\hbar^2 \frac{d^2(a_{\vec{m}} + a_{-\vec{m}}^\dagger)}{dt^2} &= \epsilon^2 \vec{m}^2 (\vec{m}^2 + \frac{4Na}{\pi L})(a_{\vec{m}} + a_{-\vec{m}}^\dagger); \\
-\hbar^2 \frac{d^2(a_{\vec{m}} - a_{-\vec{m}}^\dagger)}{dt^2} &= \epsilon^2 \vec{m}^2 (\vec{m}^2 + \frac{4Na}{\pi L})(a_{\vec{m}} - a_{-\vec{m}}^\dagger).
\end{aligned}
$$

可以解得:

$$
\begin{aligned}
a_{\vec{m}}(t) + a_{-\vec{m}}^\dagger(t) &= (a_{\vec{m}} + a_{-\vec{m}}^\dagger)\cos(\omega t) + \frac{\epsilon_L \vec{m}^2}{i\hbar\omega}(a_{\vec{m}} - a_{-\vec{m}}^\dagger)\sin(\omega t); \\
a_{\vec{m}}(t) - a_{-\vec{m}}^\dagger(t) &= (a_{\vec{m}} - a_{-\vec{m}}^\dagger)\cos(\omega t) + \frac{\epsilon_L}{i\hbar\omega}(\vec{m}^2 + \frac{4Na}{\pi L})(a_{\vec{m}} + a_{-\vec{m}}^\dagger)\sin(\omega t).
\end{aligned}
$$

其中

$$
\omega^2 = \frac{\epsilon_L^2 \vec{m}^2}{\hbar^2}(\vec{m}^2 + \frac{4Na}{\pi L}).
$$

其中，利用了对易关系：

$$[a_{\vec{m}}, a_{\vec{m}}^\dagger] = \delta_{\vec{m},\vec{m}'};\quad [a_{\vec{m}}^\dagger, a_{\vec{m}}^\dagger] = 0;\quad [a_{\vec{m}}, a_{\vec{m}}] = 0.$$

从方程中，不难发现，产生（湮灭）算符 $a_{\vec{m}}(a_{\vec{m}}^\dagger)$ 随时间的演化不仅与其自身相关，还与动量方向相反的湮灭（产生）算符耦合在一起。 □

习题 5.10

求解体系基态能量。其中，基态可以写作：

$$|G_{\vec{m}}\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{v_{\vec{m}}}{u_{\vec{m}}}\right)^i c_{0,0} |i, i\rangle .$$

Proof. 体系哈密顿量可以写作：

$$H_e = \sum_{\vec{m}\neq 0} \epsilon_m b_{\vec{m}}^\dagger b_{\vec{m}} + (A_m v_{\vec{m}}^2 - 2B u_{\vec{m}} v_{\vec{m}}).$$

注意到由于基态 $|G_{\vec{m}}\rangle$ 是 $b_{\vec{m}}$ 的本征态，本征值为 0，则有：

$$\langle G_{\vec{m}}| H_e |G_{\vec{m}}\rangle = A_m v_{\vec{m}}^2 - 2B u_{\vec{m}} v_{\vec{m}}.$$

考虑到初始哈密顿量

$$H_0 = \frac{a}{\pi L}\epsilon_L N^2 - 2N\frac{a}{\pi L}\epsilon_L \sum_{\vec{m}\neq 0} a_{\vec{m}}^\dagger a_{\vec{m}}.$$

保留常数项得到基态能量为：

$$\frac{a}{\pi L}\epsilon_L N^2 + A_m v_{\vec{m}}^2 - 2B u_{\vec{m}} v_{\vec{m}}.$$

此外，可以利用讲义中给出的模式 $\vec{m}$ 下的粒子数为：

$$n_{\vec{m}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-(2/((p/p_s)^2+2))^2}} - 1}{2}.$$

则基态能量为：

$$E = \int_0^\infty 4\pi k^2 n_k / k_L^3 dk = V(na)^{3/2} \frac{1}{m\sqrt{\pi}} \int_0^\infty k^4 \left(\frac{1}{\sqrt{1-(2/(k^2+2))^2}} - 1 \right) dk.$$

□