高等量子力学第七次作业

董建宇 202328000807038

习题 4.4

求最低级 Born 近似 (n=0) 下微分散射截面的表达式。

Proof. 在最低级 Born 近似下，$n=0$，即有:

$$T\left|k\right\rangle = V\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{E_k - H_0 + i\varepsilon}V\right)^n \left|k\right\rangle = V\left|k\right\rangle.$$

则有:

$$f(k\vec{e}_r, k\vec{e}_z) = -(2\pi)^2 M \left\langle k\vec{e}_r\right| T \left|k\vec{e}_z\right\rangle = -(2\pi)^2 M \left\langle k\vec{e}_r\right| V \left|k\vec{e}_z\right\rangle.$$

从而微分散射截面可以写为:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(k\vec{e}_r, k\vec{e}_z)|^2 = M^2(2\pi)^4 |\left\langle k\vec{e}_r\right| V \left|k\vec{e}_z\right\rangle|^2.$$

□

习题 4.5

验证方程

$$\left\langle E_p\vec{e}_p \right| Elm\rangle = \delta(E_p - E)\left\langle \vec{e}_p \right| lm\rangle.$$

等价于等式

$$e^{ikz} = \sum_l i^l(2l+1)j_l(kr)P_l(\cos\theta).$$

Proof. 注意到:

$$\left|E_p\vec{e}_p\right\rangle = \sqrt{Mp}\left|\vec{p}\right\rangle.$$

可以计算:

$$\begin{aligned}\left\langle E_p\vec{e}_p \right| Elm\rangle =& \sqrt{Mp}\left\langle \vec{p}\right| Elm\rangle \\ =& \sqrt{Mp}\int d\vec{r}\left\langle \vec{p}\right| \vec{r}\rangle \left\langle \vec{r}\right| Elm\rangle \\ =& \frac{\sqrt{Mp}}{(2\pi)^{3/2}}\int d\vec{r} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}}\left\langle \theta\phi\right| lm\rangle R_{kl}(r).\end{aligned}$$

注意到，可以计算:

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{Mp}}{(2\pi)^{3/2}}\int r^2 dr d\Omega_r\left(\sum_{l'}(-i)^{l'}(2l'+1)j_{l'}(pr)P_{l'}(\cos\theta)\right) i^l\sqrt{\frac{2Mk}{\pi}}j_l(kr)\left\langle \vec{e}_r\right| lm\rangle \\ =& \frac{\sqrt{Mp}}{(2\pi)^{3/2}}\int r^2 dr d\Omega_r\sum_{l'}(-i)^{l'}j_{l'}(pr)4\pi\sum_{m'}\left\langle \vec{e}_p\right| l'm'\rangle \left\langle l'm'\right| \vec{e}_r\rangle i^l\sqrt{\frac{2Mk}{\pi}}j_l(kr)\left\langle \vec{e}_r\right| lm\rangle.\end{aligned}$$

其中，利用完备性关系与正交性关系

$$\int d\Omega_r \left|\vec{e}_r\right\rangle \left\langle\vec{e}_r\right| = 1; \quad \langle l'm'|\, lm\rangle = \delta_{ll'}\delta_{mm'}.$$

上式可以简化为:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{Mp}}{(2\pi)^{3/2}}\int r^2 drd\Omega_r \sum_{l'}(-i)^{l'}j_{l'}(pr)4\pi\sum_{m'}\langle\vec{e}_p|\, l'm'\rangle\,\langle l'm'|\,\vec{e}_r\rangle i^l\sqrt{\frac{2Mk}{\pi}}j_l(kr)\,\langle\vec{e}_r|\, lm\rangle \\
=&\frac{\sqrt{Mp}}{(2\pi)^{3/2}}\sqrt{\frac{2Mk}{\pi}}4\pi\int drr^2 j_l(pr)k_l(kr)\,\langle\vec{e}_p|\, lm\rangle \\
=&\frac{2M\sqrt{pk}}{\pi}\frac{\pi}{2k^2}\delta(p-k)\,\langle\vec{e}_p|\, lm\rangle \\
=&\frac{M}{k}\delta(p-k)\,\langle\vec{e}_p|\, lm\rangle \\
=&\delta(E_p-E)\,\langle\vec{e}_p|\, lm\rangle.
\end{aligned}$$

其中 $E_p = \frac{p^2}{2M}, E = \frac{k^2}{2M}$，取自然单位制 $\hbar = 1$，则有:

$$\delta(E_p - E) = \delta(\frac{1}{2M}(p^2 - k^2)) = \frac{M}{p}\delta(p-k).$$

若有:

$$\langle E_p\vec{e}_p|\, Elm\rangle = \delta(E_p - E)\,\langle\vec{e}_p|\, lm\rangle.$$

则不难发现，有:

$$e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} = \sum_l (-i)^l(2l+1)j_l(pr)P_l(\cos\theta).$$

两侧取共轭，得:

$$e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} = \sum_l i^l(2l+1)j_l(pr)P_l(\cos\theta).$$

其中 $\theta = \langle\vec{p}, \vec{r}\rangle$，即 $\vec{p}$ 与 $\vec{r}$ 的夹角。 □

习题 4.6

在低能散射中通常只考虑较低的几个分波，如 s 波和 p 波等。试分析其中的道理，给出只需要考虑 s 波的条件。

Proof. 对于自由球面波 $\varphi^{(0)}_{k,l,m}(\vec{r})$，围绕 (θ_0, ϕ_0) 方向取无限小立体角 $d\Omega_0$，在 r 到 $r + dr$ 间隔内找到粒子的概率正比于

$$r^2 j_l^2(kr)|Y_l^m(\theta_0, \phi_0)|^2 drd\Omega_0.$$

对于趋向零的 ρ 而言，有:

$$j_l(\rho) \sim \frac{\rho^l}{(2l+1)!!}.$$

则上式中概率在原点附近的行为和 r^{2l+2} 的行为相同，因而 l 越大，概率增加越缓慢。$\rho^2 j_l^2(\rho)$ 只要

$$\rho < \sqrt{l(l+1)},$$

函数就将保持在很小的数值。因此，如果

$$r < \frac{1}{k}\sqrt{l(l+1)}$$

我们可以认为概率表达式实际上等于零，即处在 $|\varphi_{k,l,m}^{(0)}\rangle$ 态的一个粒子对于以 O 为圆心，以

$$b_l(k) = \frac{1}{k}\sqrt{l(l+1)}$$

为半径的球内发生的过程毫无反应。

对于任意中心势 $V(r)$，分波 $\varphi_{k,l,m}(\vec{r})$ 都具有如下形式:

$$\varphi_{k,l,m}(\vec{r}) = R_{k,l}(r)Y_l^m(\theta,\phi) = \frac{1}{r}u_{k,l}(r)Y_l^m(\theta,\phi).$$

其中，$u_{k,l}$ 满足:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r)\right]u_{k,l}(r) = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}u_{k,l}(r).$$

且在原点处满足:

$$u_{k,l}(0) = 0.$$

当 $r \to \infty$ 时，有:

$$u_{k,l} \sim C\sin\left(kr - l\frac{\pi}{2} + \delta_l\right).$$

则分波 $\phi_{k,l,m}(\vec{r})$ 可以写作:

$$\varphi_{k,l,m}(\vec{r}) \sim -CY_l^m(\theta,\phi)\frac{e^{-ikr}e^{i\left(l\frac{\pi}{2}-\delta_l\right)} - e^{ikr}e^{-i\left(l\frac{\pi}{2}-\delta_l\right)}}{2ir}$$

即一个向内波和一个向外波的叠加。可以重新定义一个分波 $\bar{\varphi}_{k,l,m}(\vec{r}) = \varphi_{k,l,m}(\vec{r})e^{i\delta_l}$，并选择常数 C，使得:

$$\bar{\varphi}_{k,l,m}(\vec{r}) \sim -Y_l^m(\theta,\varphi)\frac{e^{-ikr}e^{il\pi/2} - e^{ikr}e^{-il\pi/2}e^{2i\delta_l}}{2ikr}.$$

即相移 $2\delta_l$ 的相位因子 $e^{2i\delta_l}$ 纳入了势场对角动量量子数为 l 的粒子的全部影响。则考虑有限射程为 r_0 的势场 $V(r)$，即

$$V(r) = 0, \quad r > r_0.$$

则类似自由球面波，对于满足 $b_l(k) >> r$ 的那些波，实际上感受不到势场的作用，因为对应的内向波在到达势场作用范围前就已经反向传播了。于是，对能量的每一个值都存在着一个角动量临界量子数 l_M，近似满足:

$$\sqrt{l_M(l_M+1)} \sim kr_0.$$

当 $l \le l_M$ 时，相移 δ_l 才有显著的影响。即当入射能量较低，势场射程较短时，l_M 较小，即此时只需考虑较低的几个分波，如 s 波和 p 波等。当只需考虑 s 波时，有:

$$0 \le l_M < 1.$$

即近似的有:

$$kr_0 < \sqrt{2}.$$

□