高等量子力学第九次作业

董建宇 202328000807038

习题 4.7

求解球形方势阱中 $l=0$ 时的束缚态。

Proof. 由薛定谔方程，可得:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(r)\right)\varphi(\vec{r})=E\varphi(\vec{r}).$$

在球坐标系下，分离变量可得，方程的解可以写作:

$$\varphi_{l,m}(\vec{r})=\frac{1}{r}u_l(r)Y_l^m(\theta,\phi).$$

其中，$u_l(r)$ 满足:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}+V(r)\right)u_l(r)=Eu_l(r).$$

对于球形方势阱，可以选取低势能面为零势能面，则势能函数写作:

$$V(r)=\begin{cases}0, & 0<r<r_0;\\ V_0, & r>r_0.\end{cases}$$

对于束缚态有：$0<E<V_0$，当 $l=0$ 时，记 $u(r)=u_0(r)$，$0<r<r_0$ 范围内有:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}u(r)=Eu(r).$$

通解为:

$$u(r)=A\sin\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}r\right)+B\cos\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}r\right).$$

利用边界条件 $u(0)=0$，可得 $B=0$。

在 $r>r_0$ 范围内有:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}+V_0\right)u_l(r)=Eu_l(r).$$

通解为:

$$u(r)=C\exp\left(-\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}r\right)+D\exp\left(\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}r\right)$$

利用边界条件 $u(\infty)=0$，可得 $D=0$。

利用连续性条件

$$\lim_{r\to r_0^-}u(r)=\lim_{r\to r_0^+}u(r);\quad \left.\frac{du(r)}{dr}\right|_{r\to r_0^-}=\left.\frac{du(r)}{dr}\right|_{r\to r_0^+}.$$

可得:

$$A\sin\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}r_0\right)=C\exp\left(-\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}r_0\right);$$
$$A\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\cos\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}r_0\right)=-\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}C\exp\left(-\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}r_0\right).$$

若存在 A 和 C,则系数行列式为 0,记 $k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, k'=\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$ 即

$$\begin{vmatrix}\sin(kr_0) & -\exp(-k'r_0)\\ k\cos(kr_0) & k'\exp(-k'r_0)\end{vmatrix}=\exp(-k'r_0)(k'\sin(kr_0)+k\cos(kr_0))=0.$$

即 $l=0$ 时束缚态能量 E 满足如下方程:

$$\sqrt{\frac{E}{V_0-E}}=\tan\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}r_0\right).$$

波函数可以写作:

$$\varphi(r,\theta,\phi)=\frac{1}{r}u(r)Y_0^0(\theta,\phi).$$

可以将波函数归一化得到束缚态在坐标表象下的归一化的波函数。 □

习题 4.8

试求散射势

$$V(r)=\gamma\delta(r-a)$$

下的 s 波散射相移和散射截面,其中 $a>0$。

Proof. 与上题类似,薛定谔方程经分离变量可得:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+k^2-2m\gamma\delta(r-a)\right)u=0.$$

其中边界条件为:

$$u(0)=0;\quad u(\infty)\to\sin(kr+\delta_0).$$

当 $r\neq a$ 时,$V(r)=0$,则通解可以写为:

$$u(r)=\begin{cases}A\sin(kr)+B\cos(kr)=\sqrt{A^2+B^2}\sin(kr+\delta_0); & r>a\\ C\sin(kr); & r<a.\end{cases}$$

考虑连续性条件,有:

$$u(a+)=u(a-);\quad u'(a+)-u'(a-)=2m\gamma u(a).$$

即

$$C\sin(ka)=A\sin(ka)+B\cos(ka)$$
$$C(k\cos(ka)+2m\gamma\sin(ka))=Ak\cos(ka)-Bk\sin(ka)$$

从而可得:

$$\frac{B}{A} = -\frac{2m\gamma\sin^2(ka)}{k + m\gamma\sin(2ka)}$$

当 $ka << 1$ 时，s 波散射为主要贡献，相移为:

$$\delta_0 = \arctan\frac{B}{A} = -\arctan\left(\frac{2m\gamma\sin^2(ka)}{k + m\gamma\sin(2ka)}\right).$$

散射截面为:

$$\sigma_0 = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0 = \frac{4\pi}{k^2}\frac{\left(\frac{2m\gamma\sin^2(ka)}{k+m\gamma\sin(2ka)}\right)^2}{1+\left(\frac{2m\gamma\sin^2(ka)}{k+m\gamma\sin(2ka)}\right)^2} = \frac{4\pi}{k^2}\frac{\left(2m\gamma\sin^2(ka)\right)^2}{\left(2m\gamma\sin^2(ka)\right)^2 + (k+m\gamma\sin(2ka))^2}.$$

□

习题 5.1

2 个全同玻色粒子在 3 个单粒子模式情况下，写出该 Hilbert 空间的所有基矢。

Proof. 对于波色子体系，每个单粒子模式可以容纳任意多粒子，则该 Hilbert 空间的基矢为:

$$|2,0,0\rangle,\ |0,2,0\rangle,\ |0,0,2\rangle;\ |1,1,0\rangle,\ |1,0,1\rangle,\ |0,1,1\rangle.$$

□

习题 5.2

将上题中的玻色粒子换成费米粒子，写出 Hilbert 空间的全部基矢。

Proof. 对于费米子体系，每一个粒子模式只能有 0 或 1 个粒子占据，基矢可以写为:

$$|1,1,0\rangle,\ |1,0,1\rangle,\ |0,1,1\rangle.$$

□