高等量子力学第五周作业

董建宇 202328000807038

习题 1:

取 $L_1 = \sigma_z$, $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_{\alpha \geq 2} = 0$, $H = 0$, 求解 Lindblad 方程。

$$\dot{\rho}(t) = \gamma \left(\sigma_z \rho \sigma_z - \frac{1}{2}\{\sigma_z \sigma_z, \rho\} \right)$$

讨论其稳态性质。

二能级系统密度矩阵总可以写作如下形式:

$$\rho = \frac{\mathbf{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}}{2}.$$

则对时间求导可得:

$$\dot{\rho} = \frac{1}{2}\vec{v} \cdot \vec{\sigma}.$$

可以计算:

$$\sigma_z \rho = \frac{\sigma_z + ix\sigma_y - iy\sigma_x + z\mathbf{I}}{2}.$$

$$\sigma_z \rho \sigma_z = \frac{\mathbf{I} - x\sigma_x - y\sigma_y + z\sigma_z}{2}.$$

$$\{\sigma_z \sigma_z, \rho\} = \{\mathbf{I}, \rho\} = 2\rho.$$

$$\sigma_z \rho \sigma_z - \frac{1}{2}\{\sigma_z \sigma_z, \rho\} = -(x\sigma_x + y\sigma_y).$$

则 Lindblad 方程为:

$$\dot{\rho} = \frac{1}{2}(v_x \sigma_x + v_y \sigma_y + v_z \sigma_z) = -\gamma(x\sigma_x + y\sigma_y).$$

其中 $v_i = \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$，其中 $i = x, y, z$。则有如下常微分方程:

$$\frac{dx}{dt} = -2\gamma x;$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\gamma y;$$

$$\frac{dz}{dt} = 0.$$

则有:

$$x(t) = x_0 e^{-2\gamma t}; \quad y(t) = y_0 e^{-2\gamma t}; \quad z(t) = z_0.$$

当 $t \to \infty$ 时，有:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0; \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0; \quad \lim_{t\to\infty} z(t) = z_0.$$

即当时间趋向于无穷时，体系状态处于 Bloch 球 z 轴上，且具体位置取决于体系初始状态。

习题 2:

证明算符 $\hat{A}=a\hat{L}+b\hat{S}$ 满足角动量算符对易关系，当且仅当 $a=b=1$ 或 $a=1,b=0$ 或 $a=0,b=1$。

可以计算:

$$\begin{aligned}[\hat{A}_\alpha,\hat{A}_\beta] =&[a\hat{L}_\alpha+b\hat{S}_\alpha,a\hat{L}_\beta+b\hat{S}_\beta]\\ =&a^2[\hat{L}_\alpha,\hat{L}_\beta]+b^2[\hat{S}_\alpha,\hat{S}_\beta]\\ =&a^2i\hbar\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{L}_\gamma+b^2i\hbar\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{S}_\gamma\\ =&i\hbar\epsilon_{\alpha\beta\gamma}(a^2\hat{L}_\gamma+b^2\hat{S}_\gamma)\\ =&i\hbar\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{A}_\gamma\\ =&i\hbar\epsilon_{\alpha\beta\gamma}(a\hat{L}_\gamma+b\hat{S}_\gamma).\end{aligned}$$

则有:

$$a^2=a,\quad b^2=b.$$

即 a 和 b 的取值为 0 或 1。当 $a=b=0$ 时，算符为 0 没有意义，因此当算符 $\hat{A}=a\hat{L}+b\hat{S}$ 满足角动量对易关系，当且仅当 $a=b=1$ 或 $a=1,b=0$ 或 $a=0,b=1$。

习题 3:

写出自旋 3/2 算符 S_α，$(\alpha=x,y,z)$ 的矩阵表示。

选取 $\hat{S}^2$ 和 $\hat{S}_z$ 的共同本征基矢，则有:

$$\begin{aligned}\langle l'm'|\,\hat{S}_z\,|lm\rangle =&m\hbar\delta_{ll'}\delta_{mm'};\\ \langle l'm'|\,\hat{S}_x\,|lm\rangle =&\frac{1}{2}\,\langle l'm'|\,(\hat{S}_++\hat{S}_-)\,|lm\rangle\\ =&\frac{\hbar}{2}(\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\delta_{ll'}\delta_{m',m+1}+\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\delta_{ll'}\delta_{m',m-1});\\ \langle l'm'|\,\hat{S}_y\,|lm\rangle =&\frac{1}{2i}\,\langle l'm'|\,(\hat{S}_+-\hat{S}_-)\,|lm\rangle\\ =&\frac{\hbar}{2i}(\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\delta_{ll'}\delta_{m',m+1}-\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\delta_{ll'}\delta_{m',m-1}).\end{aligned}$$

则矩阵表示为:

$$\begin{aligned}S_z =&\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix};\\ S_x =&\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&\sqrt{3}&0&0\\\sqrt{3}&0&2&0\\0&2&0&\sqrt{3}\\0&0&\sqrt{3}&0\end{pmatrix};\end{aligned}$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3}i & 0 & 0 \\ \sqrt{3}i & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -\sqrt{3}i \\ 0 & 0 & \sqrt{3}i & 0 \end{pmatrix}.$$