高等热力学与统计物理第十二次作业

董建宇

1. 考虑硬球势

   i) 证明两体散射的 s 波相移为

$$\delta_0(k) = -ka$$

   其中 a 为硬球直径。

   ii) 证明对于自旋为零的 Bose 气体

$$b_2 = \frac{1}{\lambda^3}\left[2^{-5/2} - \frac{2a}{\lambda} + \mathcal{O}\left(\frac{a^5}{\lambda^5}\right)\right]$$

提示：对于硬球散射，轨道角动量为 l 的相移的低能行为是

$$\delta_l(k) \sim (ka)^{2l+1}.$$

i) 硬球势为:

$$U(r) = \begin{cases} \infty, & r \le a; \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

体系 Hamiltonian 可以写为:

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(r).$$

令 $V(r) = \frac{2m}{\hbar^2}U(r)$，则 Schördinger 方程可以写为:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(r) - V(r)\psi(r) = 0.$$

利用分离变量法，可得:

$$\psi(r) = \sum_l R_l(r)Y_{ll}(\theta,\phi) = \sum_l \frac{u_l(r)}{r}Y_{lm}(\theta,\phi).$$

其中 $u_l(r)$ 满足的方程为:

$$-\frac{d^2}{dr^2}u_l(r) + \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + V(r) - k^2\right]u_l(r) = 0.$$

对于 s 波，有 $l=0$，在 $r>a$ 区域内，方程为:

$$\frac{d^2}{dr^2}u_0(r) + k^2u_0(r) = 0.$$

可以解得:

$$u_0(r) = A_0\sin(kr+\delta_0).$$

利用边界条件 $u_0(r=a)=0$ 可得:

$$\delta_0 = -ka.$$

ii) 对于自旋为零的 Bose 气体，根据 Beth-Uhlenbeck 公式

$$b_2^S = b_2^{S(0)} + \frac{2^{3/2}}{\lambda^3}\left[\sum_{\text{even } l} e^{-\beta\varepsilon_B} + \frac{1}{\pi}\sum_{\text{even } l}(2l+1)\int_0^\infty \mathrm{d}k\, e^{-\frac{\beta}{m}\hbar^2k^2}\frac{\mathrm{d}\delta_l}{\mathrm{d}k}\right],$$

其中

$$b_2^{S(0)} = \frac{1}{2^{5/2}\lambda^3},$$

由于气体原子的势能是硬球势，所以不存在束缚态，中括号中第一个求和式

$$\sum_{\text{even } l} e^{-\beta\varepsilon_B} = 0,$$

中括号中第二个求和式

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\sum_{\text{even } l}(2l+1)\int_0^\infty \mathrm{d}k\, e^{-\beta\hbar^2k^2}\frac{\mathrm{d}\delta_l}{\mathrm{d}k}\\
=&\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}k\, e^{-\beta\hbar^2k^2}\frac{\mathrm{d}\delta_0}{\mathrm{d}k} + \frac{1}{\pi}\sum_{l=2,4,6,\cdots}(2l+1)\int_0^\infty \mathrm{d}k\, e^{-\beta\hbar^2k^2}\frac{\mathrm{d}\delta_l}{\mathrm{d}k}\\
\approx&\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}k\, e^{-\frac{\beta}{m}\hbar^2k^2}\frac{\mathrm{d}(-ka)}{\mathrm{d}k} + \frac{1}{\pi}\sum_{l=2,4,6,\cdots}(2l+1)\int_0^\infty \mathrm{d}k\, e^{-\frac{\beta}{m}\hbar^2k^2}\frac{\mathrm{d}(ka)^{2l+1}}{\mathrm{d}k}\\
=&-\frac{a}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}k\, e^{-\frac{\beta}{m}\hbar^2k^2} + \frac{1}{\pi}\sum_{l=2,4,6,\cdots}a^{2l+1}(2l+1)^2\int_0^\infty \mathrm{d}k\, e^{-\frac{\beta}{m}\hbar^2k^2}k^{2l}\\
=&-\frac{a}{\pi}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m\pi}{\beta\hbar^2}} + \frac{1}{\pi}\sum_{l=2,4,6,\cdots}a^{2l+1}(2l+1)^2\int_0^\infty \mathrm{d}k\, e^{-\beta\hbar^2k^2}k^{2l}\\
=&-\frac{a}{\sqrt{2}\lambda} + O\left(\frac{a^5}{\lambda^5}\right).
\end{aligned}$$

因此,

$$b_2 = \frac{1}{\lambda^3}\left[2^{-5/2} - \frac{2a}{\lambda} + O\left(\frac{a^5}{\lambda^5}\right)\right].$$