高等热力学与统计物理期末试题

2021-2022 春学期

（请于6月16日周四中午12时之前提交）

通用符号：T =温度，P =压强，ρ =数密度，μ =化学势，
k =Boltzmann 常数，$\hbar$ = Planck 常数，m_e =电子质量。

1. 试选出有关 自由 Bose 气体的正确说法（10分）：
   A. 状态方程在热波长远小于粒子平均距离的条件下可近似为理想气体状态方程。
   B. Bose-Einstein 凝聚可发生与任意空间维度。
   C. Bose-Einstein凝聚可用来定量描述 He II 的 $\lambda-$相变。
   D. 定容比热对温度的导数在临界温度不连续。

2. 理想气体的 Carnot 循环：$A \to B \to C \to D \to A$

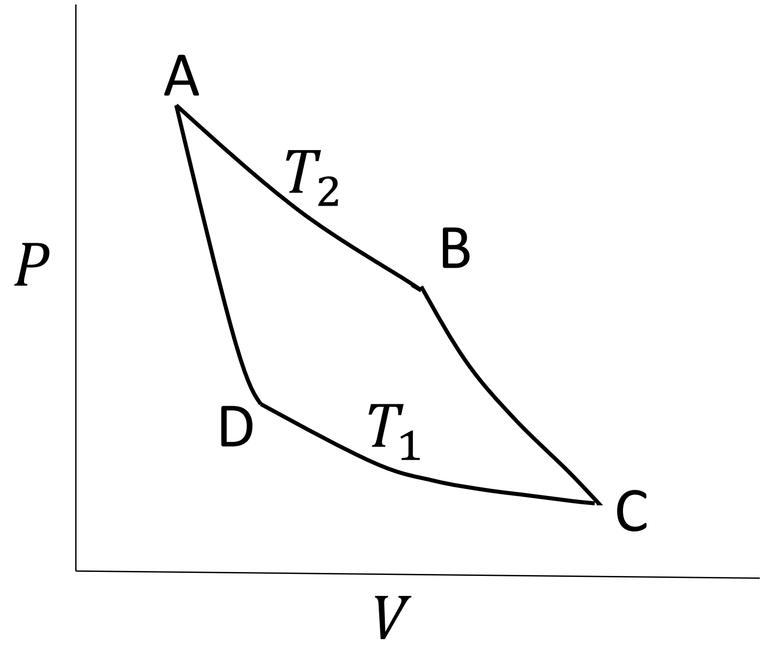
---- 等温过程：$A \to B$ （与高温热源接触） $C \to D$ (与低温热源接触)

---- 绝热过程：$B \to C$，$D \to A$。

证明循环效率为

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} \qquad \text{（20分）}$$

注意：这里**<u>没有</u>**假设热容量与温度无关，因而适用于多原子分子的理想气体。



3. 电子气体自旋引起的磁化可用下列 Hamiltonian 描述（忽略轨道磁化效应）：

$$H = \sum_{\vec{p},s} \frac{p^2}{2m_e} a^{\dagger}_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s} - \mu_e B \sum_{\vec{p},s} s\, a^{\dagger}_{\vec{p}s} a_{\vec{p}s}$$

其中 μ_e 为电子磁矩，B 为磁感应强度，$\vec{p}$ 为动量， $s = \pm 1$ 为自旋量子数，$\left(a_{\vec{p}s}, a^{\dagger}_{\vec{p}s}\right)$ 为单电子态 $(\vec{p}, s)$ 的湮灭产生算符。

假设强简并条件，求该电子气体近似到 B 的领头阶的磁化强度 $M(B)$ 和相应的磁化率，即

$$\chi = \left.\frac{\partial M}{\partial B}\right|_{B=0}$$

要求结果近似到 $\left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2$ 阶，其中 ε_F 为零磁场下的 Fermi 能。（25分）

4. 对于最近邻相互作用为 $u\ (u<0)$ 且每个格点只能容纳一个分子的二维方格子格气

1）证明具有最近邻相互作用的二维方格子格气在 $T<T_c$ 时的状态方程：（10分）

$$\frac{P}{kT}=\begin{cases} y+\left(\frac{2}{x}-\frac{5}{2}\right)y^2+\cdots & \text{（气相）} \\ \ln\frac{y}{x^2}+\frac{x^4}{y}+\left(2x^7-\frac{5}{2}x^8\right)\frac{1}{y^2}\cdots & \text{（液相）} \end{cases}$$

其中 $x=e^{\frac{u}{kT}}$。

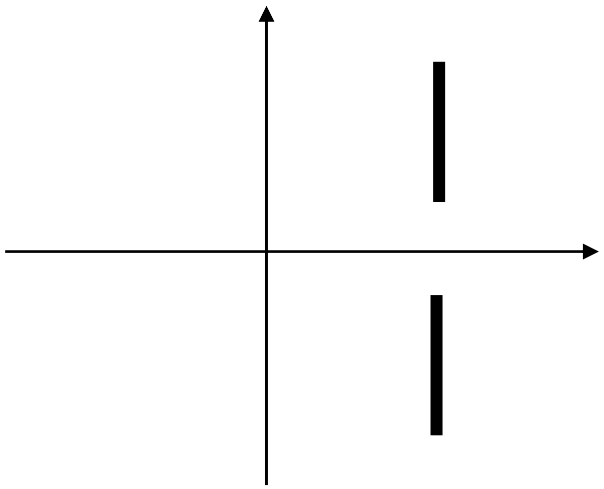
2）证明临界温度为

$$kT_c=\frac{u}{\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)} \qquad \text{（10分）}$$

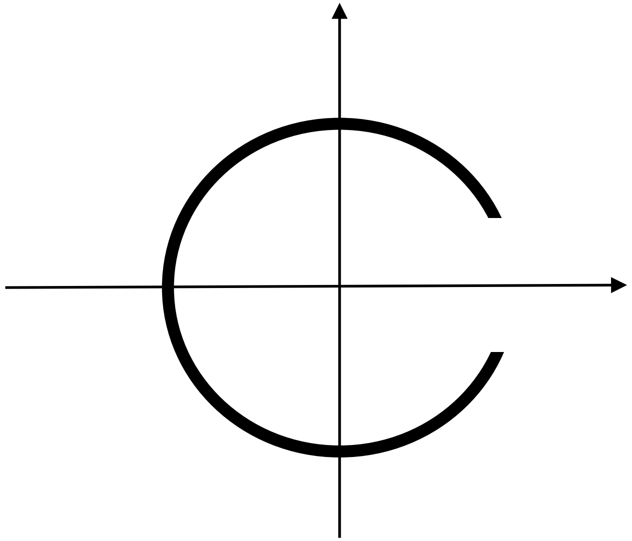
并求当 $T\longrightarrow T_c(1-\tau),\ \tau=0^+$ 时两相密度差的临界行为（不需要给出系数）。

3）当 $T>T_c$ 时，上述状态方程是否适用于气相的低密度区和高密度区？

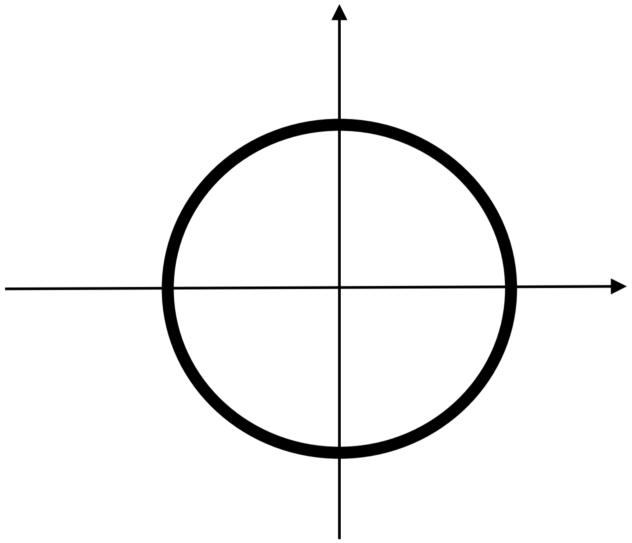
并从下列图中选出 $T>T_c$ 时热力学极限下巨配分函数的根在复 $y-$平面上可能的连续分布（图中的粗体黑线）。（5分）



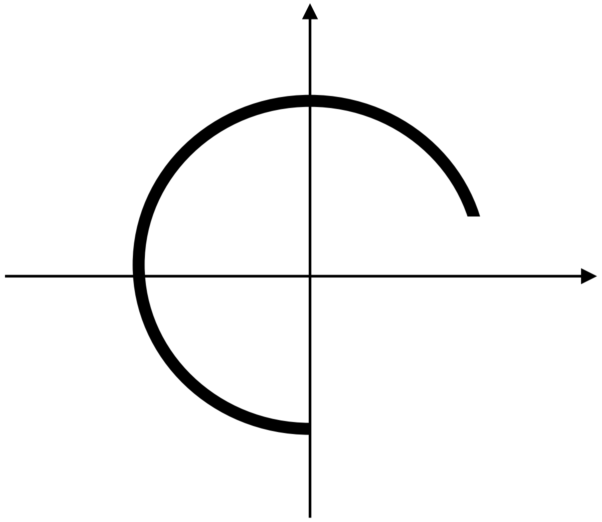
(a)



(b)



(c)



(d)

5. 令 $|\Psi_E\rangle$ 为N 个玻色子系统的归一化的能量本征态，即

$$H|\Psi_E\rangle = E|\Psi_E\rangle \qquad\qquad \langle\Psi_E|\Psi_E\rangle = 1$$

其中 H 为 Hamiltonian。 定义关联函数

$$C_E(\vec{r},\vec{r}\,') \equiv N\int\prod_{i=2}^{N} d^3\vec{r}_i\, \Psi_E^*(\vec{r},\vec{r}_2,\ldots\vec{r}_N)\Psi_E(\vec{r}\,',\vec{r}_2,\ldots\vec{r}_N)$$

及其热力学平均

$$\mathcal{G}(\vec{r},\vec{r}\,') \equiv \frac{1}{Q}\sum_E e^{-\frac{E}{kT}}\, C_E(\vec{r},\vec{r}\,')$$

其中 $\Psi_E(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots\vec{r}_N)$ 为归一化的 N 体波函数，Q 为正则配分函数。证明

1） $C_E(\vec{r},\vec{r}\,') = \left\langle\Psi_E\middle|\psi^\dagger(\vec{r})\psi(\vec{r}\,')\middle|\Psi_E\right\rangle$； （10分）

2） $\mathcal{G}(\vec{r},\vec{r}\,') = \dfrac{\mathrm{Tr}\,e^{-\frac{H}{kT}}\psi^\dagger(\vec{r})\psi(\vec{r}\,')}{\mathrm{Tr}\,e^{-\frac{H}{kT}}}$。 （10分）

其中 $\psi(\vec{r}),\psi^\dagger(\vec{r})$ 为玻色子的场算符。