DOI:10.16454/j.cnki.issn.1001-0564.1981.01.009

证明$\epsilon-\delta$公式的新方法探索

力学教研室　　　　李洪柱

内 容 摘 要

在许多物理问题中，矢量重积运算和含∇算子的微分运算是必不可少的，ϵ—δ公式对于这类运算，提供了一个有效的、令人满意的方法。以往的ϵ—δ公式的证明方法较为繁杂，本文提出的两种方法，较为简明和直接。

作者以自己的体会，扼要地综述了ϵ,δ符号的来源，运算过程的实质和意义，并举例说明ϵ—δ公式在矢算中的应用。

本文只在三维欧氏空间中讨论，未涉及更一般的曲线坐标和张量工具，因而是易于理解的。

一、问题的提出：

矢量重积运算和含$\overline{\nabla}$算子的微分运算，反映了不少具有实际意义的物理问题。尤其是在力学和电学中，有极广泛的应用。

这类运算的结果及其推证过程，不是那么简明易记的。文献＜1＞以一般常用的方法，集中地讨论了它们。

不少文献把矢量$\overline{A}$表示成基矢$\hat{e}_i$和分量A_i两部分，基矢只有方向而大小归一，分量是只有大小而无方向的标量。如：$\overline{A}=\hat{e}_iA_i$。

这里i作为哑标重复出现，即应对该指标i求和。如算子$\overline{\nabla}=\hat{e}_j\nabla_j$的表示中，$j$重复，即意味着：$\overline{\nabla}=\sum_{j=1}^{3}\hat{e}_j\nabla_j=\hat{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\hat{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\hat{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3}$，这个求和约定在本文讨论中，始终有效，例外处另有说明。并且，本文仅是在三维欧氏空间中讨论的。

用这样的表示，考虑两种基本的矢算：

标积：
$$\overline{A}\cdot\overline{B}=\hat{e}_i\cdot\hat{e}_jA_iB_j$$
$$=\delta_{ij}A_iB_j=A_iB_i$$

矢积：
$$\overline{A}\times\overline{B}=\hat{e}_i\times\hat{e}_jA_iB_j$$
$$=\hat{e}_k\epsilon_{ijk}A_iB_j=\hat{e}_k\ (\overline{A}\times\overline{B})_k$$

这里，我们援引了两个基本的张量符号：

Kronecker符号：

$$\delta_{ij}=\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$$

Levi——Civita 符号：

$$\epsilon_{ijk}=\begin{cases}+1 & i，j，k，\text{顺序排列或偶置换。}\\-1 & i，j，k，\text{逆序排列或奇置换。}\\0 & i，j，k，\text{有重复或其它情况。}\end{cases}$$

如此表示，可以把矢算问题介析为分量间的一般标量运算和基矢间的符号运算问题。不仅书写简便，而且意义明显。而ϵ_{ijk}与δ_{ij}符号间的运算，存在着文献< 2 >给出的如下关系式：$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$。该关系式我们简称$\epsilon$ — δ公式。

对于 ϵ — δ 公式的正确性，在已查找到的文献中，论证方法有一类是用下标各种排列组合进行逻辑归纳的< 3 >。另一类方法是将 ϵ — δ 公式代入一个业已证明过的恒等式，若等式成立即得间接证明< 4 >。考虑到前法较为冗繁，后法似有失一般性之虞，本文提供的两种方法是笔者试图寻找一种简明的直接证明的尝试。

二、ϵ — δ公式的证明：

证法1：

令$L=\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}-\delta_{il}\delta_{jm}+\delta_{im}\delta_{jl}$

取$\overline{A}$、$\overline{B}$为任意非零矢量，A_l、B_m为其非零分量。所有下标都是从1到3轮换。

$$LA_lB_m=\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}A_lB_m-(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})A_lB_m$$

$$=\epsilon_{ijk}(\overline{A}\times\overline{B})_k-(A_iB_j-B_iA_j)$$

注意到：$k=i$，j时$\epsilon_{iji}=\epsilon_{ijj}=0$

故有：$LA_lB_m=\epsilon_{ijk'}(\overline{A}\times\overline{B})_{k'}-(A_iB_j-B_iA_j)$

这里，K哑标已求和完毕，K′指标只轮换，也是从1到3，不求和。显然$K'\neq i，j$。

当i，j，k′顺序时，$\epsilon_{ijk'}=+1$。有：

$$(\overline{A}\times\overline{B})_{k'}=A_iB_j-B_iA_j$$

即$LA_lB_m=(A_iB_j-B_iA_j)-(A_iB_j-B_iA_j)=0$。

当i，j，k′，逆序时，$\epsilon_{ijk'}=-1$。有：

$$(\overline{A}\times\overline{B})_{k'}=A_jB_i-A_iB_j$$

即 $LA_lB_m=-(A_jB_i-A_iB_j)-(A_iB_j-B_iA_j)$

$$=0$$

$\therefore LA_lB_m\equiv0$

由A_l，B_m的任意性知$L\equiv0$

即 $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$

证法2：

i，j，k与l，m，n，均为三维正交笛卡尔系指标，以$\hat{e}_i$表示i向基矢，由

$\hat{e}_k\epsilon_{ijk}=\hat{e}_i\times\hat{e}_j$　　双方以$\hat{e}_s$标积，然后变换哑标S为K，即有：

$\epsilon_{ijk}=\hat{e}_k\cdot(\hat{e}_i\times\hat{e}_j)$，同理有：

$\epsilon_{lmn}=\hat{e}_n\cdot(\hat{e}_l\times\hat{e}_m)$

此两式右边是一基矢的框积，得一标量。故可将两式数乘,得到：

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}=[\hat{\epsilon}_k\cdot(\hat{\epsilon}_i\times\hat{\epsilon}_j)]\ [\hat{\epsilon}_n\cdot(\hat{\epsilon}_l\times\hat{\epsilon}_m)]$$

$$=\begin{vmatrix}\hat{\epsilon}_k\cdot\hat{\epsilon}_n & \hat{\epsilon}_k\cdot\hat{\epsilon}_l & \hat{\epsilon}_k\cdot\hat{\epsilon}_m\\ \hat{\epsilon}_i\cdot\hat{\epsilon}_n & \hat{\epsilon}_i\cdot\hat{\epsilon}_l & \hat{\epsilon}_i\cdot\hat{\epsilon}_m\\ \hat{\epsilon}_j\cdot\hat{\epsilon}_n & \hat{\epsilon}_j\cdot\hat{\epsilon}_l & \hat{\epsilon}_j\cdot\hat{\epsilon}_m\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\delta_{kn} & \delta_{kl} & \delta_{km}\\ \delta_{in} & \delta_{il} & \delta_{im}\\ \delta_{jn} & \delta_{jl} & \delta_{jm}\end{vmatrix}$$

当i，j，k与l，m，n中，有一对指标相等，如k＝n，其余不相等时，有：

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \delta_{il} & \delta_{im}\\ 0 & \delta_{jl} & \delta_{jm}\end{vmatrix}$$

$$=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$$

三、应用算例：

矢量的三重和多重矢积问题，含▽算子的一次和二次微分问题，无非是矢量或算子间的标积和矢积的各种组合运算。不难理解，由标积和矢积定义引出的δ和ϵ符号，反映了基矢间这两种基本运算的特性。ϵ —δ 公式又把ϵ和δ联系了起来。这样，运用ϵ—δ公式，可以容易地处理上述两类问题中带有方向性的基矢运算，至于分量间的标量运算，符合一般的代数运算规则，象交换律、结合律和分配律，不受矢算的约束。

算例1 ：

$$(\overline{A}\times\overline{B})\cdot(\overline{C}\times\overline{D})=\epsilon_{ijk}A_iB_j\epsilon_{lmk}C_lD_m$$

$$=(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})A_iB_jC_lD_m$$

$$=A_iB_jC_iD_j-A_iB_jC_jD_i$$

$$=(\overline{A}\cdot\overline{C})(\overline{B}\cdot\overline{D})-(\overline{A}\cdot\overline{D})(\overline{B}\cdot\overline{C})$$

算例2：

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\overline{A})=\overline{\nabla}\times(\overline{\nabla}\times\overline{A})$$

$$=\hat{e}_i\epsilon_{ijk}\nabla_j\epsilon_{klm}\nabla_lA_m$$

$$=\hat{e}_i(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\nabla_j\nabla_lA_m$$

$$=\hat{e}_i\nabla_m\nabla_iA_m-\hat{e}_i\nabla_j\nabla_jA_i$$

$$=\hat{e}_i\nabla_i\nabla_mA_m-\nabla_j\nabla_j\hat{e}_iA_i$$

$$=\overline{\nabla}(\overline{\nabla}\cdot\overline{A})-\nabla^2\overline{A}$$

$$=\text{grad div }\overline{A}-\triangle\overline{A}$$

几十个算例表明：用 $\epsilon-\delta$ 公式处理这类运算，步骤简捷、方法统一、便于记忆，是一个很好的方法。

参考文献

<1>、H·E·KOЧИН：《向量计算及张量计算初步》（1958年中译本）

<2> G. HARRIS：《Introduction to modern theoretical physics》（1975）

<3> 冉长寿译：《质点和系统的古典动力学》（台湾六十七年版）

<4> Y·C·FUNG：《Foundations of solid mechanics》（1965）

<5> C·HARPER：《Introduction to mathematical physics》（1976）