群论第二章作业

董建宇 202328000807038

1. 设 H_1 和 H_2 是群 G 的两个子群, 证明 H_1 和 H_2 的公共元素的集合也构成群 G 的子群。

据题意，显然有 $H_1 \cap H_2 \subseteq G$。

恒元: 因为 H_1 与 H_2 是群 G 的子群，则 H_1 与 H_2 都包含恒元 E，则 H_1 和 H_2 的公共元素也包含恒元 E。

结合律: 因为 H_1 和 H_2 的公共元素的集合为群 G 的子集，则结合律自然满足。

封闭性: 考虑任意两个 H_1 和 H_2 的公共元素 α 和 β，因为 H_1 和 H_2 是群 G 的两个子群，子群满足封闭性，即:

$$\alpha\beta \in H_1, \quad \alpha\beta \in H_2.$$

则有:

$$\alpha\beta \in H_1 \cap H_2.$$

即 H_1 和 H_2 的公共元素的集合满足封闭性。

逆元: 考虑任意一个 H_1 和 H_2 的公共元素 α，在子群 H_1 和 H_2 中存在 α 的逆元 α_1^{-1} 和 α_2^{-1}。由于逆元具有唯一性，则 $\alpha_1^{-1} = \alpha_2^{-1} = \alpha^{-1} \in H_1 \cap H_2$，即任意一个 H_1 和 H_2 的公共元素 α，都存在逆元 $\alpha^{-1} \in H_1 \cap H_2$。

综上所述，H_1 和 H_2 的公共元素的集合也构成群 G 的子群。

2. 证明: 除恒元外，每个元素的阶都是 2 的群一定是阿贝尔群。

考虑任意两个除恒元外的元素 a 和 b，有:

$$a^2 = E, \quad b^2 = E, \quad (ab)^2 = abab = E.$$

则有:

$$aabb = E^2 = E = abab.$$

两侧同时左乘 a^{-1}，右乘 b^{-1}，则得到:

$$ab = ba.$$

即任意两个除恒元外的元素可逆，即除恒元外，每个元素的阶都是 2 的群一定是阿贝尔群。

3. 泡利矩阵定义如下:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_a\sigma_b = \delta_{ab}I + i\sum_{d=1}^{3}\varepsilon_{abd}\sigma_d \quad 如\sigma_a^2 = I,\ \ \sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3.$$

其中 ε_{abd} 是三阶完全反对称张量。证明由 σ_1 和 σ_2 的所有可能乘积和幂次的集合构成群，列出此群的乘法表，指出此群的阶数，各元素的阶数，群所包含的类和不变子群，不变子群的商群与什么群同构，建立同构关系，证明此群和正方形对称群 D_4 同构。

可以计算，σ_1 和 σ_2 的所有可能乘积和幂次的集合为：

$$\{\sigma_1,\ -\sigma_1,\ \sigma_2,\ -\sigma_2,\ i\sigma_3,\ -i\sigma_3,\ I,\ -I\}.$$

可以计算乘法表如下：

	I	$-I$	σ_1	$-\sigma_1$	σ_2	$-\sigma_2$	$i\sigma_3$	$-i\sigma_3$
I	I	$-I$	σ_1	$-\sigma_1$	σ_2	$-\sigma_2$	$i\sigma_3$	$-i\sigma_3$
$-I$	$-I$	I	$-\sigma_1$	σ_1	$-\sigma_2$	σ_2	$-i\sigma_3$	$i\sigma_3$
σ_1	σ_1	$-\sigma_1$	I	$-I$	$i\sigma_3$	$-i\sigma_3$	σ_2	$-\sigma_2$
$-\sigma_1$	$-\sigma_1$	σ_1	$-I$	I	$-i\sigma_3$	$i\sigma_3$	$-\sigma_2$	σ_2
σ_2	σ_2	$-\sigma_2$	$-i\sigma_3$	$i\sigma_3$	I	$-I$	$-\sigma_1$	σ_1
$-\sigma_2$	$-\sigma_2$	σ_2	$i\sigma_3$	$-i\sigma_3$	$-I$	I	σ_1	$-\sigma_1$
$i\sigma_3$	$i\sigma_3$	$-i\sigma_3$	$-\sigma_2$	σ_2	σ_1	$-\sigma_1$	$-I$	I
$-i\sigma_3$	$-i\sigma_3$	$i\sigma_3$	σ_2	$i\sigma_2$	$-\sigma_1$	σ_1	I	$-I$

从乘法表中容易看出，该集合满足封闭性与结合律，且存在恒元 I，且每一个元素存在唯一逆元，即该集合构成群。

群阶数为 8。

其中 I 的阶数为 1；$-I,\sigma_1,-\sigma_1,\sigma_2,-\sigma_2$ 的阶数为 2；$i\sigma_3,-i\sigma_3$ 的阶数为 4。

群包含的类为：

$$\{I\};\ \ \{-I\};\ \ \{\sigma_1,-\sigma_1\};\ \ \{\sigma_2,-\sigma_2\};\ \ \{i\sigma_3,-i\sigma_3\}$$

不变子群为：

$$\{I,-I\};\ \ \{I,-I,\sigma_1,-\sigma_1\};\ \ \{I,-I,\sigma_2,-\sigma_2\};\ \ \{I,-I,i\sigma_3,-i\sigma_3\}.$$

第一个不变子群的商群同构与四阶反演群 V_4。映射关系为 $\{I,-I\}\to E$；$\{\sigma_1,-\sigma_1\}\to A$；$\{\sigma_2,-\sigma_2\}\to B$；$\{i\sigma_3,-i\sigma_3\}\to C = AB = BA$.

后三个不变子群的商群为二阶群，同构与 C_2 群。映射关系为不变子群映射到恒元 E，陪集映射到二阶群非恒元元素 A。

D_4 群元素与题中群元素对应关系如下：

G	I	$i\sigma_3$	$-I$	$-i\sigma_3$	σ_1	$-\sigma_2$	$-\sigma_1$	σ_2
D_4	E	T	T^2	T^3	S_1	S_2	S_3	S_4

4. 准确到同构，证明九阶群 G 只有两种：循环群 C_9 和直乘群。

在九阶群中，除恒元外群元素的阶只能为 3 或 9。
1. 若至少存在 1 个元素的阶为 9，那么根据群乘法的封闭性，可知群 G 为九阶循环群 C_9。
2. 若群 G 中不存在阶为 9 的群元素，且至少存在一个阶为 3 的元素记作 R，构成 3 阶循环群 $C_3 = \{E, R, R^2\}$。考虑其有陪集 $C_3A = \{A, B, C\}$，其中 A 为群 G 中元素，且 $A \neq E, A \neq R, A \neq R^2$。$B = RA, C = R^2A$。因为 A, B, C 均为 3 阶群元，则有 A^2, B^2, C^2 既不能等于 E, R, R^2 也不能等于 A, B, C。即群 G 的群元素可以写为：

$$G = \{E, R, R^2, A, B, C, A^2, B^2, C^2\}.$$

注意到 $BA = RA^2 \neq A^2 \neq B^2$，则有 $BA = RA^2 = C^2 = R^2AR^2A$。两侧左乘 R^{-1}，右乘 $A^{-1}R$ 可得：

$$AR = RA.$$

则有 $B^2 = RARA = R^2A^2$，综上，群 G 可以写为：

$$G = \{E, R, R^2, A, RA, R^2A, A^2, R^2A^2, RA^2\} = \{E, R, R^2\} \otimes \{E, A, A^2\}.$$

综上所述，九阶群 G 只有两种：循环群 C_9 和直乘群。

5. 设有限群 G 的阶为 g，C_a 是群 G 的一个类，含 $n(a)$ 个元素，S_j 和 S_k 是类 C_a 中任意两个元素，证明群 G 中满足 $S_j = PS_kP^{-1}$ 的元素 P 的数目等于 $m(a) = g/n(a)$。

对于给定的元素 $S_j \in C_\alpha$，设群 G 中所有与 S_j 对易的元素 R 的数目为 $m(\alpha)$。可以证明，元素 R 组成的集合 H 构成群 G 的子群。首先，若 R 和 R' 都与 S_j 对易，显然有 RR' 与 S_j 对易，即满足乘法**封闭性**。**结合律**显然满足。**恒元** E 显然与 S_j 对易。R 的**逆元** R^{-1} 也与 S_j 对易。即 H 为群 G 的子群。
考虑群 G 中不属于子群 H 的元素 T，且满足

$$TS_jT^{-1} = S_i \in C_\alpha.$$

则子群 H 的左陪集 TH 中任意元素 TR 满足

$$TRS_jR^{-1}T^{-1} = TS_jT^{-1} = S_i.$$

则满足 $PS_jP^{-1} = S_i$ 的元素 P，有：

$$(P^{-1}T)S_j(P^{-1}T)^{-1} = P^{-1}S_iP = S_j.$$

则有 $P^{-1}T \in H$，即 P 属于左陪集 TH 中。因此子群 H 的左陪集 TH 与 S_j 的共轭元素 S_i 具有一一对应关系，即子群 H 的指数等于 S_j 所属类 C_α 中元素数目，即

$$n(\alpha) = \frac{g}{m(\alpha)}.$$

即有：

$$m(\alpha) = \frac{g}{n(\alpha)}.$$

6. 以 T 群的子群 $C_3=\{E,\ R_1,\ R_1^2\}$ 为基础，将 C_3 群的乘法表扩充，计算 T 群的乘法表。

(1) 选取 $T_x^2,\ T_y^2,\ T_z^2$ 做左陪集，第一行 $T_x^2C_3$、第二行 $T_y^2C_3$、第三行 $T_z^2C_3$;

(2) 右陪集由左陪集取逆元得到，第四行 $C_3T_x^2$、第五行 $C_3T_y^2$、第六行 $C_3T_z^2$;

$$(T_x^2C_3)^{-1}=C_3^{-1}T_x^{2^{-1}}=C_3T_x^2;$$
$$(T_y^2C_3)^{-1}=C_3^{-1}T_y^{2^{-1}}=C_3T_y^2;$$
$$(T_z^2C_3)^{-1}=C_3^{-1}T_z^{2^{-1}}=C_3T_z^2.$$

(3) 左陪集分别右乘 $T_x^2,\ T_y^2,\ T_z^2$ 得到第七至十五行。

左乘	E	R_1	R_1^2	右乘
T_x^2	T_x^2	R_4	R_3^2	
T_y^2	T_y^2	R_3	R_2^2	
T_z^2	T_z^2	R_2	R_4^2	
	T_x^2	R_3	R_4^2	T_x^2
	T_y^2	R_2	R_3^2	T_y^2
	T_z^2	R_4	R_2^2	T_z^2
T_x^2	E	R_2	R_2^2	T_x^2
T_x^2	T_z^2	R_3	R_1^2	T_y^2
T_x^2	T_y^2	R_1	R_4^2	T_z^2
T_y^2	T_z^2	R_1	R_3^2	T_x^2
T_y^2	E	R_4	R_4^2	T_y^2
T_y^2	T_x^2	R_2	R_1^2	T_z^2
T_z^2	T_y^2	R_4	R_1^2	T_x^2
T_z^2	T_x^2	R_1	R_2^2	T_y^2
T_z^2	E	R_3	R_3^2	T_z^2

随后可以进行如下操作:

(1) 则我们可以把 T 群乘法表分成四行四列 16 个小方块，C_3 的乘法表在第一行第一列;

(2) 陪集表中第一、二、三行的元素分别替换子群乘法表中的元素，填在第一列的第二、三、四小方块;

(3) 陪集表中第四、五、六行的元素分别替换子群乘法表中的元素，填在第一行的第二、三、四小方块;

(4) 陪集表中第七、八、九行的元素分别替换子群乘法表中的元素，填在第二行的第二、三、四小方块;

(5) 陪集表中第十、十一、十二行的元素分别替换子群乘法表中的元素，填在第三行的第二、三、四小方块;

(6) 陪集表中第十三、十四、十五行的元素分别替换子群乘法表中的元素，填在第四行的第二、三、四小方块。

	C_3	$C_3T_x^2$	$C_3T_y^2$	$C_3T_z^2$
C_3	C_3	$C_3T_x^2$	$C_3T_y^2$	$C_3T_z^2$
$T_x^2C_3$	$T_x^2C_3$	$T_x^2C_3T_x^2$	$T_x^2C_3T_y^2$	$T_x^2C_3T_z^2$
$T_y^2C_3$	$T_y^2C_3$	$T_y^2C_3T_x^2$	$T_y^2C_3T_y^2$	$T_y^2C_3T_z^2$
$T_z^2C_3$	$T_z^2C_3$	$T_z^2C_3T_x^2$	$T_z^2C_3T_y^2$	$T_z^2C_3T_z^2$

则可以写出 T 群乘法表如下:

	E	R_1	R_1^2	T_x^2	R_3	R_4^2	T_y^2	R_2	R_3^2	T_z^2	R_4	R_2^2
E	E	R_1	R_1^2	T_x^2	R_3	R_4^2	T_y^2	R_2	R_3^2	T_z^2	R_4	R_2^2
R_1	R_1	R_1^2	E	R_3	R_4^2	T_x^2	R_2	R_3^2	T_y^2	R_4	R_2^2	T_z^2
R_1^2	R_1^2	E	R_1	R_4^2	T_x^2	R_3	R_3^2	T_y^2	R_2	R_2^2	T_z^2	R_4
T_x^2	T_x^2	R_4	R_3^2	E	R_2	R_2^2	T_z^2	R_3	R_1^2	T_y^2	R_1	R_4^2
R_4	R_4	R_3^2	T_x^2	R_2	R_2^2	E	R_3	R_1^2	T_z^2	R_1	R_4^2	T_y^2
R_3^2	R_3^2	T_x^2	R_4	R_2^2	E	R_2	R_1^2	T_z^2	R_3	R_4^2	T_y^2	R_1
T_y^2	T_y^2	R_3	R_2^2	T_z^2	R_1	R_3^2	E	R_4	R_4^2	T_x^2	R_2	R_1^2
R_3	R_3	R_2^2	T_y^2	R_1	R_3^2	T_z^2	R_4	R_4^2	E	R_2	R_1^2	T_x^2
R_2^2	R_2^2	T_y^2	R_3	R_3^2	T_z^2	R_1	R_4^2	E	R_4	R_1^2	T_x^2	R_2
T_z^2	T_z^2	R_2	R_4^2	T_y^2	R_4	R_1^2	T_x^2	R_1	R_2^2	E	R_3	R_3^2
R_2	R_2	R_4^2	T_z^2	R_4	R_1^2	T_y^2	R_1	R_2^2	T_x^2	R_3	R_3^2	E
R_4^2	R_4^2	T_z^2	R_2	R_1^2	T_y^2	R_4	R_2^2	T_x^2	R_1	R_3^2	E	R_3

7. 群 G 由 12 个元素组成，它的乘法表如下:

	E	A	B	C	D	F	I	J	K	L	M	N
E	E	A	B	C	D	F	I	J	K	L	M	N
A	A	E	F	I	J	B	C	D	M	N	K	L
B	B	F	A	K	L	E	M	N	I	J	C	D
C	C	I	L	A	K	N	E	M	J	F	D	B
D	D	J	K	L	A	M	N	E	F	I	B	C
F	F	B	E	M	N	A	K	L	C	D	I	J
I	I	C	N	E	M	L	A	K	D	B	J	F
J	J	D	M	N	E	K	L	A	B	C	F	I
K	K	M	J	F	I	D	B	C	N	E	L	A
L	L	N	I	J	F	C	D	B	E	M	A	K
M	M	K	D	B	C	J	F	I	L	A	N	E
N	N	L	C	D	B	I	J	F	A	K	E	M

(1) 找出群 G 各元素的逆元;

(2) 指出哪些元素可与群中任意元素乘积对易;

(3) 列出各元素的周期和阶;

(4) 找出群 G 各类包含的元素;

(5) 找出群 G 包含哪些不变子群，列出他们的陪集，并指出他们的商群与什么群同构;

(6) 判断群 G 是否与正四面体对称群 T 或与正六边形对称群 D_6 同构。

(1) 群 G 各元素及其逆元如下:

$R \in G$	E	A	B	C	D	F	I	J	K	L	M	N
R^{-1}	E	A	F	I	J	B	C	D	L	K	N	M

(2) 群中 E, A 两个元素可与任意元素乘积对易。

(3) 群元素 E 周期为 $\{E\}$，阶为 1;

群元素 A 周期为 $\{A, A^2 = E\}$，阶为 2;

群元素 B 周期为 $\{B, B^2 = A, B^3 = F, B^4 = E\}$，阶为 4;

群元素 C 周期为 $\{C, C^2 = A, C^3 = I, C^4 = E\}$，阶为 4;

群元素 D 周期为 $\{D, D^2 = A, D^3 = J, D^4 = E\}$，阶为 4;

群元素 F 周期为 $\{F, F^2 = A, F^3 = B, F^4 = E\}$，阶为 4;

群元素 I 周期为 $\{I, I^2 = A, I^3 = C, I^4 = E\}$，阶为 4;

群元素 J 周期为 $\{J, J^2 = A, J^3 = D, J^4 = E\}$，阶为 4;

群元素 K 周期为 $\{K, K^2 = N, K^3 = A, K^4 = M, K^5 = L, K^6 = E\}$，阶为 6;

群元素 L 周期为 $\{L, L^2 = M, L^3 = A, L^4 = N, L^5 = K, L^6 = E\}$，阶为 6;

群元素 M 周期为 $\{M, M^2 = N, M^3 = E\}$，阶为 3;

群元素 N 周期为 $\{N, N^2 = M, N^3 = E\}$，阶为 3。

(4) 恒元自成一类 $\{E\}$；群元素 A 自成一类 $\{A\}$，利用乘法表可以得到群 G 的共轭类为:

$$\{E\},\ \{A\},\ \{B, C, D\},\ \{F, I, J\},\ \{K, L\},\ \{M, N\}.$$

(5) 不变子群 $\{E, A\}$, 陪集 $\{B, F\}$, $\{C, I\}$, $\{D, J\}$, $\{K, M\}$, $\{L, N\}$, 其商群同构与 D_3 群。

不变子群 $\{E, M, N\}$，陪集 $\{A, K, L\}$，$\{B, C, D\}$，$\{F, I, J\}$，其商群同构与 C_4 群。

不变子群 $\{E, A, K, L, M, N\}$，陪集 $\{B, C, D, F, I, J\}$，其商群同构与 C_2 群。

(6) T 群不包含阶数为 6 的元素，则群 G 与群 T 不同构。D_6 群不包含阶数为 4 的元素，则群 G 与群 T 不同构。