群论第四章作业

董建宇 202328000807038

1. 把下列置换化为无公共客体的轮换乘积:

(1)

$$(1\ 2)(2\ 3)(1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3).$$

(2)

$$(1\ 2\ 3)(1\ 3\ 4)(3\ 2\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 2).$$

(3)

$$(1\ 2\ 3\ 4)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (4\ 3\ 2\ 1).$$

(4)

$$(1\ 2\ 4\ 5)(4\ 3\ 2\ 6) = (5\ 1\ 2)(2\ 4)(4\ 3\ 2)(2\ 6) = (5\ 1\ 2)(4\ 2)(2\ 4\ 3)(2\ 6)$$

= $(5\ 1\ 2)(4\ 3)(2\ 6) = (5\ 1\ 2\ 6)(4\ 3).$

(5)

$$(1\ 2\ 3)(4\ 2\ 6)(3\ 4\ 5\ 6) = (1\ 2\ 3)(2\ 6\ 4)(6\ 3\ 4)(4\ 5) = (1\ 2\ 3)(2\ 6\ 4)(4\ 6\ 3)(4\ 5)$$
$$= (1\ 2\ 3)(2\ 6\ 3)(4\ 5) = (1\ 2\ 3)(3\ 2\ 6)(4\ 5) = (1\ 2\ 6)(4\ 5).$$

2. 写出对应下列杨表的杨算符

$$(1) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}$$

$$[E + (1\ 2) + (1\ 3) + (2\ 3) + (1\ 2\ 3) + (1\ 3\ 2)][E - (1\ 4)].$$

$$(2) \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$[E + (1\ 2)][E + (3\ 4)][E - (1\ 3)][E - (2\ 4)].$$

$$[E + (1\ 2) + (1\ 3) + (1\ 4) + (2\ 3) + (2\ 4) + (3\ 4) + (1\ 2\ 3) + (1\ 3\ 2) + (1\ 2\ 4) + (1\ 4\ 2) + (1\ 3\ 4) + (1\ 3\ 4) + (1\ 3\ 4) + (1\ 3\ 4) + (1\ 3\ 4\ 2) + (1\ 4\ 2\ 3) + (1\ 4\ 3\ 2) + (1\ 2)(3\ 4) + (1\ 3)(2\ 4) + (1\ 4)(2\ 3)][E - (1\ 5)].$$

3. 具体写出 S₄ 群恒元按杨算符的展开式。

Proof. 恒元可以写为

$$E = \frac{A}{24} + \frac{B}{12} + \frac{C}{8}.$$

其中:

$$+(1\ 2\ 4)+(1\ 4\ 2)+(1\ 3\ 4)+(1\ 4\ 3)+(2\ 3\ 4)+(2\ 4\ 3)];$$

$$=6E - 2(2\ 3)(1\ 4) - 2(2\ 4)(1\ 3) - 2(4\ 3)(1\ 2).$$

4. 下列两正则杨算符乘积 $\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2$ 不为零, R 把正则杨表 \mathcal{Y}_2 变成 \mathcal{Y}_1 , 试把 R 表示成属于杨表 \mathcal{Y}_2 的横向置换 P_2 和纵向置换 Q_2 的乘积 P_2Q_2 , 再表示成属于杨表 \mathcal{Y}_1 的横向置换 P_1 和纵向置

换 Q_1 的乘积 P_1Q_1 .

Proof. 置换为:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 3 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = (4 \ 3 \ 5 \ 6 \ 8 \ 9 \ 7)$$

$$= (7 \ 4)(4 \ 3 \ 5 \ 6 \ 8 \ 9) = (7 \ 4)(3 \ 5)(5 \ 6 \ 8 \ 9 \ 4)$$

$$= (7 \ 4)(3 \ 5)(5 \ 6 \ 8 \ 9)(9 \ 4) = (7 \ 4)(3 \ 5)(9 \ 5)(5 \ 6 \ 8)(9 \ 4)$$

$$= (7 \ 4)(3 \ 5 \ 9)(6 \ 8)(8 \ 5)(9 \ 4) = P_1Q_1.$$

其中

$$P_1 = (7\ 4)(3\ 5\ 9)(6\ 8); \quad Q_1 = (8\ 5)(9\ 4).$$

或者

$$R = (4\ 3\ 5\ 6\ 8\ 9\ 7)$$

$$= (4\ 3)(3\ 5\ 6\ 8\ 9\ 7) = (4\ 3)(5\ 6)(6\ 8\ 9\ 7)(7\ 3)$$

$$= (4\ 3)(5\ 6)(7\ 6)(6\ 8\ 9)(7\ 3) = (4\ 3)(5\ 6\ 7)(8\ 9)(9\ 6)(7\ 3).$$

其中

$$P_2 = (4\ 3)(5\ 6\ 7)(8\ 9); \quad Q_2 = (9\ 6)(7\ 3).$$

5. 用列表法计算 S_5 群生成元 (12) 和 (12345) 在不可约表示 [2,2,1] 中的表示矩阵。

Proof. 正交杨算符分别为 $\mathcal{Y}_1[E-(25)], \mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3, \mathcal{Y}_4, \mathcal{Y}_5,$ 列表法计算表示矩阵如下:

(1 2)	2 1 3 4 5	2 1 3 5 4	2 3 1 4 5	2 3 1 5 4	2 4 1 5 3
1 2 1 5 3 4 3 4 5 2	1-0	0-0	1-0	0-0	0+1
1 2 3 5 4	0	1	0	-1	1
1 3 2 4 5	0	0	-1	0	0
1 3 2 5 4	0	0	0	-1	0
1 4 2 5 3	0	0	0	0	-1

6. 用等效方法计算 S_6 群各类在下列不可约表示中的特征标。

 $(1) \ \&\pi \ [3,2,1]; \ (2) \ \&\pi \ [3,3]; \ (3) \ \&\pi \ [2,2,2]$

Proof.

类	[3,2,1]	[3,3]	[2,2,2]
(1^6)	16	5	5
$(2,1^4)$	0	1	-1
$(2^2, 1^2)$	0	1	1
(2^3)	0	-3	3
$(3,1^3)$	-2	-1	-1
(3, 2, 1)	0	1	-1
(3^2)	-2	2	2
$(4,1^2)$	0	-1	1
(4,2)	0	-1	-1
(5,1)	1	0	0
(6)	0	0	0

7. 分别写出 S_6 群相邻客体对换 P_a 在不可约表示 [3,3] 和 [2,2,2] 正交基中的实正交表示矩阵 形式。因为下式两边的表示是等价的

$$[2,2,2] \simeq [1^6] \times [3,3].$$

试计算它们间的相似变换矩阵 X。

Proof. 对应杨图 [2,2,2] 的正则杨表为:

1	2	1	2	1	3	1	3	1	4] -
3	4	3	5	2	4	2	5	2	5	ľ
5	6	4	6	5	6	4	6	3	6	

杨图 [3,3] 的正则杨表为:

1	2	3	1	2	4	1	2	5	1	3	4	1	3	5	
4	5	6	3	5	6	3	4	6	2	5	6	2	4	6	

相邻客体对换 P_a 在表示 [2,2,2] 和 $[1^6] \times [3,3]$ 中的表示矩阵分别为:

	[2, 2, 2]	$[1^6] \times [3,3]$
P_1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
P_2	$ \begin{bmatrix} -1 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} $	$ \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & -1 \end{bmatrix} $
P_3	$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \sqrt{8} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{8} & 1 \end{bmatrix}$	$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
P_4	$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	$ \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} $
P_5	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

两组矩阵中,对应矩阵可以通过两次变换得到,先把非对角元改号,再关于反对角线做转置。

注意到 [2,2,2] 非零对角元只在 12,13,24,34,45 出现,只改变第一行、第四行符号就可以全部变号,则 X 矩阵可以写作 X=YZ,Y 对角元第 1、4 行为 -1,其余为 1,Z 的反对角元全为 1,则

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

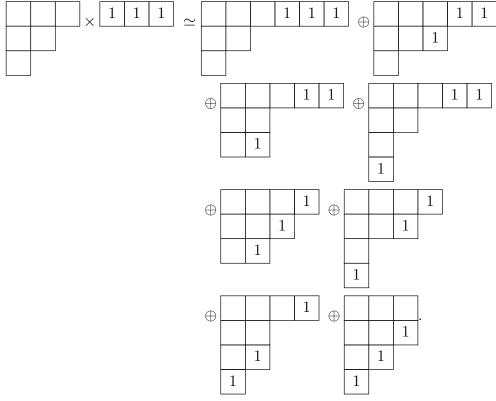
满足

$$X^{-1}[2,2,2]X = [1^6] \times [3,3].$$

8. 用立特伍德-理查森规则计算下列置换群表示外积的约化

 $(1) [3,2,1] \otimes [3],$

Proof.



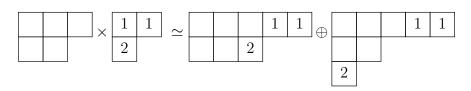
 $[3,2,1]\times[3]\simeq[6,2,1]\oplus[5,3,1]\oplus[5,2,2]\oplus[5,2,1,1]\oplus[4,3,2]$ $\oplus[4,3,1,1]\oplus[4,2,2,1]\oplus[3,3,2,1].$

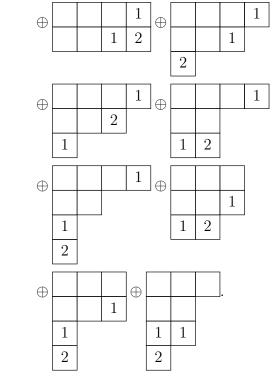
维数验证

$$\frac{9!}{6!3!} \times 16 \times 1 = 1344 = 105 + 162 + 120 + 189 + 168 + 216 + 216 + 168.$$

 $(2) [3,2] \otimes [2,1],$

Proof.





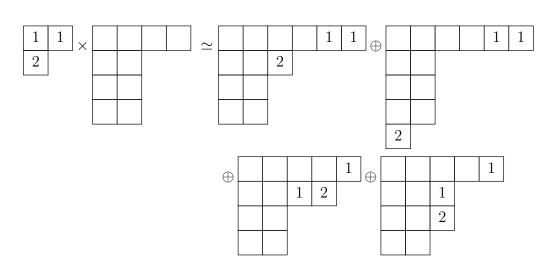
$$[3,2] \times [2,1] \simeq [5,3] \oplus [5,2,1] \oplus [4,4] \oplus 2[4,3,1] \oplus [4,2,2]$$
$$\oplus [4,2,1,1] \oplus [3,3,2] \oplus [3,3,1,1] \oplus [3,2,2,1].$$

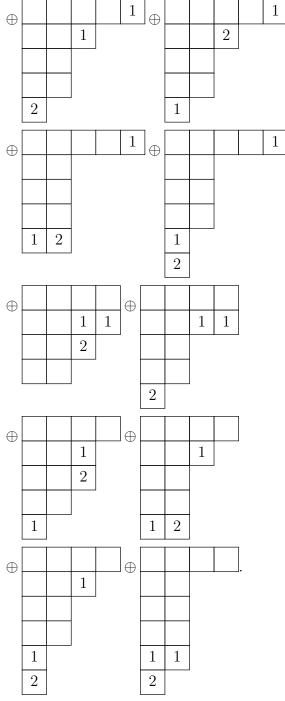
维数验证

$$\frac{8!}{5!3!} \times 5 \times 2 = 560 = 28 + 64 + 14 + 2 \times 70 + 56 + 90 + 42 + 56 + 70.$$

 $(3) [2,1] \otimes [4,2^3].$

Proof.





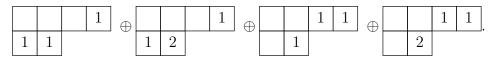
$$\begin{split} [2,1] \times [4,2,2,2] \simeq & [6,3,2,2] \oplus [6,2,2,2,1] \oplus [5,4,2,2] \oplus [5,3,3,2] \\ & \oplus 2[5,3,2,2,1] \oplus [5,2,2,2,2] \oplus [5,2,2,2,1,1] \oplus [4,4,3,2] \\ & \oplus [4,4,2,2,1] \oplus [4,3,3,2,1] \oplus [4,3,2,2,2] \\ & \oplus [4,3,2,2,1,1] \oplus [4,2,2,2,2,1]. \end{split}$$

维数验证

$$\frac{13!}{3!10!} \times 2 \times 300 = 171600 = 12012 + 9009 + 12870 + 11583 + 2 \times 21450 + 5005 + 10296 + 8580 + 12870 + 15015 + 8580 + 17160 + 5720.$$

- 9. 用立特伍德-查利森规则计算, S_6 群下列不可约表示关于子群 $S_3 \otimes S_3$ 的分导表示,按子群不可约表示的约化
 - (1) [4,2],

Proof.



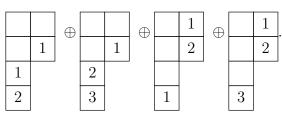
$$[4,2] \simeq [3] \times [3] \oplus [3] \times [2,1] \oplus [2,1] \times [3] \oplus [2,1] \times [2,1].$$

维数验证:

$$9 = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 1 + 2 \times 2.$$

(2) [2, 2, 1, 1],

Proof.



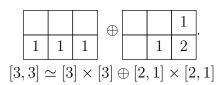
 $[2,2,1,1] \simeq [2,1] \times [2,1] \oplus [2,1] \times [1,1,1] \oplus [1,1,1] \times [2,1] \oplus [1,1,1] \times [1,1,1].$

维数验证

$$9 = 2 \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 1.$$

(3) [3,3].

Proof.



维数验证

$$5 = 1 \times 1 + 2 \times 2.$$