第三周周二作业 3月17日.

习题8.3

2. (5). $y=x^2+1$

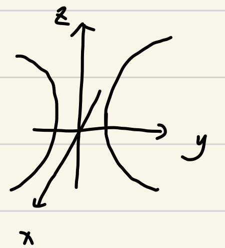
在Oxy中 抛物线

在$Oxyz$中. 抛物面

(8). $\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1\\ x=4\end{cases}$

在Oxy中 $(4, 3\sqrt{3})$ $(4, -3\sqrt{3})$ 两点

在$Oxyz$中 两条与z轴平行的直线.

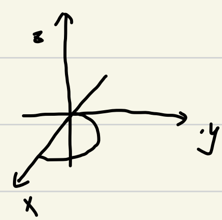


3 (1). 曲线 $\begin{cases}y^2-\frac{z^2}{4}=1\\ x=0\end{cases}$ 绕z轴一周.

解. 设旋转曲面任意一点坐标 (x, y, z)

对应曲线点坐标为 $(\sqrt{x^2+y^2}, z)$

则旋转曲面方程为 $x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1$ 名称: 单页双曲面.



(2). 曲线 $\begin{cases}y=\sin x & (0\le x\le\pi)\\ z=0\end{cases}$ 绕x轴旋转一周.

解. 设旋转曲面任意一点坐标 (x, y, z)

对应曲线上坐标为 $(x, \sqrt{y^2+z^2})$

则旋转曲面方程为 $\sqrt{y^2+z^2}=\sin x$ $(0\le x\le\pi)$ 名称: 二次三角曲面

5.解: $L: \begin{cases} x-y-1=0 \\ x+z-2=0 \end{cases}$ $\pi: x-y+2z-1=0$ $L \cap \pi = (2,1,0)$

令 $\vec{r_0}=(2,1,0)$

设L_0的方向向量 $\vec{v_0}=(x_0,y_0,z_0)$

L的方向向量 $\vec{v}=(1,-1,0)\times(1,0,1)=(-1,-1,1)$

π的法向量 $\vec{n}=(1,-1,2)$

$\vec{n}\cdot\vec{v_0}=x_0-y_0+2z_0=0$

$(\vec{n}\times\vec{v})\cdot\vec{v_0}=(1,-3,-2)\cdot\vec{v_0}=x_0-3y_0-2z_0=0$

令 $x_0=1$ 得 $y_0=\frac{1}{2}$ $z_0=-\frac{1}{4}$ $\vec{v_0}=(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

$L_0: \vec{r}=\vec{r_0}+t\cdot\vec{v_0}=(2,1,0)+t(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$ $t\in R$

即 $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$

设绕y轴旋转后曲面点坐标(x,y,z)对应直线点坐标为(x_0,y_0,z_0)

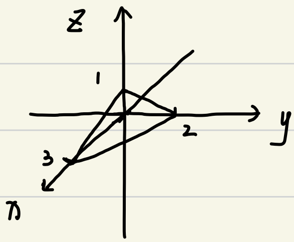
则 $y_0=y$ $x_0^2+z_0^2=x^2+z^2$

(x_0,y_0,z_0)满足 $\frac{x_0-2}{4}=\frac{y_0-1}{2}=\frac{z_0}{-1}$

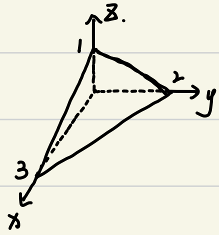
则 $4y^2+\frac{(1-y)^2}{4}=x^2+z^2$ 即 $4x^2+4z^2-17y^2+2y=1$

$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$ $\quad x=0 \quad y=0 \quad z=0$

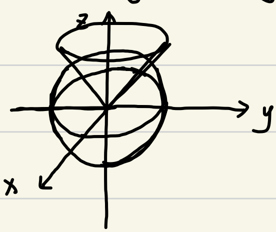
6(1). 与x轴交于 $(3,0,0)$ 与y轴交于 $(0,2,0)$ 与z轴交于 $(0,0,1)$



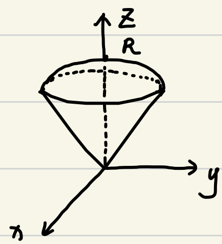
即



(3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad x^2+y^2+z^2=R^2$



即.



8. 解. 由题意 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=|z-4|$

整理得 $x^2+y^2=-8z+16$

即 动点P轨迹为 $x^2+y^2=-8z+16$

为椭圆抛物面.

9. 解. 两平面 $x^2+y^2+4z^2=1$ 与 $x^2=y^2+z^2$ 交线满足 $5x^2-3y^2=1$

即所求柱面方程为 $5x^2-3y^2=1$

10. 解 由题意可知，球心在 z 轴上.

设球面方程 $x^2+y^2+(z-c)^2=R^2$

过 $(0,-3,1)$ 得 $9+(1-c)^2=R^2$

与 Oxy 平面交得 $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ z=0 \end{cases}$ 即 $R^2-c^2=16$

得 $c=-3$ $R^2=25$

即球面方程为 $x^2+y^2+(z+3)^2=25$.

11. 解: $L:\begin{cases} \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{5}=1 & ① \\ x-2z+3=0 \end{cases}$ 将 $z=\frac{x+3}{2}$ 代入 ① 式得

$$\frac{x^2-24x-36}{80}+\frac{y^2}{4}=1$$

则交线在 xy 平面投影为 $\begin{cases} x^2-24x+20y^2-116=0 \\ z=0 \end{cases}$

第三周 周四作业. 3月19日.

习题 9.1

4. 证明: $\because \lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} M_n' = M_0'$ 不妨设 $M_n(x_n, y_n) \quad M_n'(x_n', y_n')$

$M_0(x_0, y_0) \quad M_0'(x_0', y_0')$

$\therefore \forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists M_1 > 0, M_1 \in N_+ \quad \forall n > M_1$ 有 $|x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \varepsilon_1 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \rho(M_n, M_0) = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$

$\forall \varepsilon_2 > 0 \quad \exists M_2 > 0, M_2 \in N_+ \quad \forall n > M_2$ 有 $|x_n' - x_0'| + |y_n' - y_0'| < \varepsilon_2 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \rho(M_n', M_0') = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = x_0' \qquad \lim\limits_{n\to\infty} y_n' = y_0'$

令 $M_3 = \max\{M_1, M_2\}$

当 $n > M_3$ 时 $\quad |x_n - x_0| + |x_n' - x_0'| + |y_n - y_0| + |y_n' - y_0'| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

即 $|(x_n - x_n') + (x_n' - x_0)| + |x_n' - x_0'| + |y_n - y_n' + y_n' - y_0| + |y_n' - y_0'| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

得 $|x_n - x_n'| - |x_0 - x_0'| + |y_n - y_n'| - |y_0 - y_0'| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(|x_n - x_n'| + |y_n - y_n'|\right) - \left(|x_0 - x_0'| + |y_0 - y_0'|\right) = 0$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(M_n, M_n') - \rho(M_0, M_0') = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \rho(M_n, M_n') = \rho(M_0, M_0')$

6. 证明: 将E分解为任意两集合 A, B 满足

$E = A \cup B \qquad A \cap B = \phi$

对于E中的任意一点 M

① 若 $M \in P_1 = \{(0, y) : 0 \leq y \leq 1\}$ 则 $\forall r > 0 \quad O_-(M, r)$ 都包含 P_1 中的点

②.若$M\in P_2=\{(x,y):\ y=\sin\frac{1}{x}\quad 0<x\le\frac{2}{\pi}\}$ 由于$y=\sin\frac{1}{x}$连续 $x\in(0,\frac{2}{\pi}]$

则$\forall r>0$ $O_-(M,r)$都包含P_2的点

综上所述 E上的任意一点均为聚点.

不妨令$M_0\in B$. 则一定存在$M_n\in A$满足$\lim\limits_{n\to\infty}M_n=M_0$

即M_0是A的聚点 B包含A的聚点.

$\therefore$ E是连通的.

将E分成$A'=\{(0,y):\ 0\le y\le 1\}$ $B'=\{(x,y):\ y=\sin\frac{1}{x}\quad 0<x\le\frac{2}{\pi}\}$.

$E=A'\cup B'$ $A'\cap B'=\phi$

① 当$\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $k\in Z$时 当$k\to+\infty$时 $x\to 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=1$

② 当$\frac{1}{x}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ $k\in Z$时 $k\to+\infty$ $x\to 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=-1$

即$y=\sin\frac{1}{x}$无$x\to 0$的极限

即$\forall y_0\in[0,1]$ $(0,y_0)$与$y=\sin\frac{1}{x}$ $x\in(0,\frac{2}{\pi}]$不连续

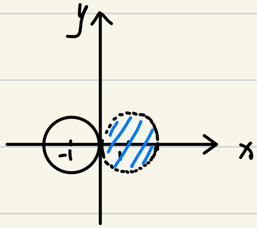
即取$P\in A$ $Q\in B$ 不存在连续的平面曲线连接PQ

$\therefore$ E不是道路连通的

综上所述 E是连通的但不是道路连通.

7.(3) $z=\frac{\sqrt{x^2+y^2+2x}}{\sqrt{2x-x^2-y^2}}$

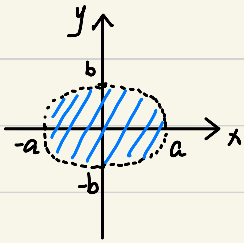
定义域满足 $\begin{cases} x^2+y^2+2x \geq 0 \\ 2x-x^2-y^2>0 \end{cases}$



是区域 不是闭区域.

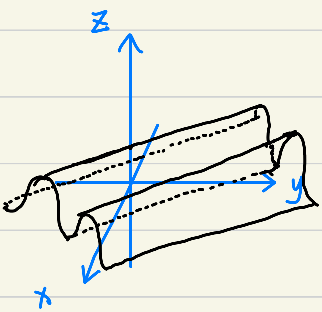
(5) $z=\ln(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})$

定义域满足 $1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}>0$ 即 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<1$



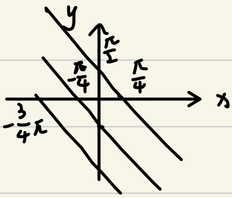
是区域，不是闭区域.

8. $z=\cos(2x+y)$



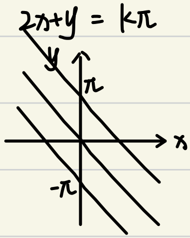
$y=-2x$.

$z=0$ 得 $2x+y=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad k\in Z$



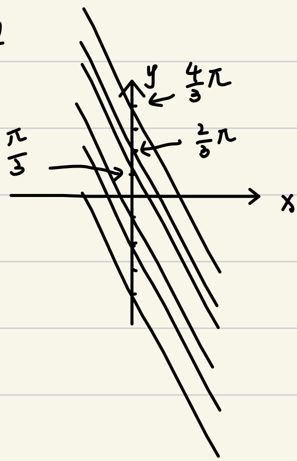
$y=-2x+\pi+k\pi$

$z=\pm 1$ 得 $2x+y=k\pi \quad k\in Z$



$z=\pm\frac{1}{2}$ 得

$2x+y=-\frac{\pi}{3}+k\pi$ 或 $2x+y=\frac{\pi}{3}+k\pi$



11. 解. $f(x,y)=\begin{cases}1, & y\geq x;\\ 0, & y<x.\end{cases}$ $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$

$\sin t-\cos t=\sqrt{2}\sin(t-\frac{\pi}{4})\geq 0$ 得 $t-\frac{\pi}{4}\in[2k\pi,(2k+1)\pi]$ $k\in Z$

则 $t\in[\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{5\pi}{4}+2k\pi]$ $k\in Z$

$F(t)=\begin{cases}1, & t\in[\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{5\pi}{4}+2k\pi]\\ 0, & t\in(\frac{5\pi}{4}+2k\pi, \frac{9\pi}{4}+2k\pi)\end{cases}$ $k\in Z$.

13. $f(x,y)=x^y$ $\varphi(x,y)=x+y$ $\psi(x,y)=x-y$

则: $f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]=(x+y)^{x-y}$

$\varphi[f(x,y),\psi(x,y)]=x^y+x-y$

$\psi[\varphi(x,y),f(x,y)]=x+y-x^y$

14 (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{\sin xy}{x}$

解: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{\sin xy}{xy}\cdot y$

由不等式 $\frac{\sin xy}{xy}<1$ 可知.

$\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta=\varepsilon$ $|x|<\delta$ $|y-a|<\delta$

$\left|\frac{\sin xy}{xy}\cdot y-a\right|<|y-a|<\delta=\varepsilon$

即 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{\sin xy}{x}$ 存在极限, 极限值为 a

(3). $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

由不等式 $x^2+y^2 \geq 2xy$ 可知 $\frac{xy}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$

则 $\forall 0<\varepsilon<1 \ \exists M=\sqrt{-\frac{\ln\varepsilon}{\ln 2}} \quad \forall x>M$

$\left|\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}-0\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} < \varepsilon$

则 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$ 极限存在为 0

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to a}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

由不等式 $\left(1+\frac{x}{x+y}\right) < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

易得 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{x}{x+y}\right)=2 \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ 即原式有界.

当y固定时,原式随x的增加而增加.

即单调递增有界,则存在极限.

$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=e$

(8) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

令 $f(x,y)=\ln(x+e^y)$ $g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

则 $(x,y)\to(1,0)$ 时 $f(x,y)$, $g(x,y)$ 显然存在极限. ∴ $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ 存在极限

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} f(x,y)=\ln(1+1)=\ln 2$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}=1$

则 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\ln 2$

(10). $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{(x+y)(\sqrt{xy+1}+1)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{2(x+y)}$

$\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \geqslant |xy|$ 则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{|xy|}{2(x+y)} \leqslant \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{8}$

$\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta=4\varepsilon$ $\forall 0<|x|<\delta$ $0<|y|<\delta$

都有 $\left|\dfrac{xy}{2(x+y)}-0\right| \leqslant \left|\dfrac{x+y}{8}\right| < \dfrac{|x|+|y|}{8} < \varepsilon$

则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{2(x+y)}=0$ 即 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$ 存在极限为0