第二周作业 周二 3月10日

习题8.1:

4. (1) 不成立。 $\vec{a}=(2,-1)$ $\vec{b}=(1,-2)$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

(2) 不成立。 $\vec{a}=\vec{0}$ $\vec{b}\neq\vec{c}$ 仍有 $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$

(3) 不成立。 $\vec{a}=(1,0,0)$ $\vec{b}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$

$\vec{a}\times\vec{b}=(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2})$

(4) 不成立 $\vec{a}=(1,1,0)$ $\vec{b}=(1,2,0)$ $\vec{c}=(1,3,0)$ $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=(3,9,0)\neq\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})=(7,7,0)$

(5) 不成立 $|\vec{a}\cdot\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta(\vec{a},\vec{b})\leq|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$

(6) 不成立 $\vec{a}=(1,0,2)$ $\vec{b}=(0,1,2)$ $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=(0,0,0)$

$\vec{a}\times\vec{a}+2\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{b}=(-4,-4,2)\neq(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})$

7. 证明: 对任意一点O 有 $\vec{AM}=\vec{OM}-\vec{OA}$ $\vec{MB}=\vec{OB}-\vec{OM}$

因为 $\vec{AM}=MB$ 即 $\vec{OM}-\vec{OA}=\vec{OB}-\vec{OM}$

则有 $\vec{OM}=\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OB})$

9. 解: 因为 $(\vec{a}+3\vec{b})\perp(7\vec{a}-5\vec{b})$ $(\vec{a}-4\vec{b})\perp(7\vec{a}-2\vec{b})$

则 $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=0$ $(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=0$

$7\vec{a}^2+16\vec{a}\cdot\vec{b}-15\vec{b}^2=0$ $7\vec{a}^2-30\vec{a}\cdot\vec{b}+8\vec{b}^2=0$

得 $\vec{a}^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}$ $\vec{b}^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{1}{2}$ 即 $\vec{a}$与$\vec{b}$夹角为 $\frac{\pi}{3}$

11(2) $|(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})|^2 = |-\vec{a}\times\vec{b}+9\vec{b}\times\vec{a}|^2 = |10\vec{b}\times\vec{a}|^2$

$= 100|\vec{b}|^2|\vec{a}|^2\sin^2\theta(\vec{a},\vec{b}) = 100\times1\times4\times\frac{3}{4} = 300$

12. 证明: $\because \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0 \quad \therefore \vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$

则 $\vec{b}\times\vec{c} = \vec{b}\times(-\vec{a}-\vec{b}) = -\vec{b}\times\vec{a} = \vec{a}\times\vec{b}$

$\vec{c}\times\vec{a} = (-\vec{a}-\vec{b})\times\vec{a} = -\vec{b}\times\vec{a} = \vec{a}\times\vec{b}$

即 $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}$

13. 证明: $\because \vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}$

$\therefore \vec{b}\times\vec{c} = (-\vec{a})\times\vec{c}$

$\because \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共线 $\therefore \vec{b} = -\vec{a}+\lambda_1\vec{c}$ $\lambda_1\neq0$ 且 $\lambda_1\in R$

同理 $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times(-\vec{c})$ $\because \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共线.

$\therefore \vec{b} = -\vec{c}+\lambda_2\vec{a}$ $\lambda_2\neq0$ 且 $\lambda_2\in R$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=-1$ 即 $\vec{b} = -\vec{c}-\vec{a}$

即 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$

23. 解 $\vec{e}_b = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ $|\vec{b}| = \sqrt{4+1+4} = 3$ 则 $\vec{e}_b = (\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

$\vec{a}\cdot\vec{e}_b = \frac{10}{3}-\frac{2}{3}+\frac{10}{3} = 6$

26. 解 $\vec{AB}=(3,6,3)$ $\vec{AC}=(1,3,-2)$ $\vec{AD}=(2,2,2)$

$$V=\frac{1}{6}\left|(\vec{AB}\times\vec{AC})\cdot\vec{AD}\right|$$

$$=\frac{1}{6}\left|(-21,9,3)\cdot(2,2,2)\right|=3$$

即四面体体积为 3

28. 解: $\vec{AB}=(-1,-1,6)$ $\vec{AC}=(-2,0,2)$ $\vec{AD}=(1,-1,4)$

令 $\vec{a}=\vec{AB}\times\vec{AC}=(-2,-10,-2)$

$$\vec{a}\cdot\vec{AD}=-2+10-8=0$$

则 $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ 共面

即 A. B. C. D 在同一个平面上

31 设P点坐标 $(0,y,z)$

$|PA|^2=|PB|^2$ 得 $9+(1-y)^2+(2-z)^2=16+(2+y)^2+(2+z)^2$

$|PA|^2=|PC|^2$ 得 $9+(1-y)^2+(2-z)^2=(5-y)^2+(1-z)^2$

联立上式解得: $y=1$ $z=-2$

即 P 点坐标为 $(0,1,-2)$

第二周作业 周四 3月12日.

习题8.2

5. 解: 设所求平面方程为 $a(x-3)+b(y+1)+c(z-1)=0$

则所求平面法向量为 $\vec{n}_0=(a,b,c)$

由题 $\vec{n}_1=(2,0,-1)$ $\vec{n}_2=(0,1,0)$

$\begin{cases}\vec{n}_0\cdot\vec{n}_1=0\\ \vec{n}_0\cdot\vec{n}_2=0\end{cases}$ 令 $a=1$ 则 $b=0$ $c=2$

得平面方程为 $(x-3)+2(z-1)=0$

即 $x+2z-5=0$

9(2) 解: 不妨令 $\pi_1$平面为 $2x-y+2z+9=0$ $P_1$点 $(0,9,0)\in\pi_1$

令 $\pi_2$平面为 $4x-2y+4z-21=0$ $P_2$点 $(3,\frac{3}{2},3)\in\pi_2$

$\pi_1,\pi_2$ 公共的法向量 $\vec{n}_0=(2,-1,2)$

$\overrightarrow{P_1P_2}=(3,-\frac{15}{2},3)$

$d=\dfrac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{n}_0|}{|\vec{n}_0|}=\dfrac{|6+\frac{15}{2}+6|}{\sqrt{4+1+4}}=\dfrac{13}{2}$ 即两平面的距离为 $\frac{13}{2}$

12. 解: 设P为平分线上一点、 $P(x,y,z)$

P到两平面距离相等得

$\dfrac{|2x-y+z-7|}{\sqrt{6}}=\dfrac{|x+y+2z-11|}{\sqrt{6}}$

得 $x-2y-z+4=0$ 或 $x+z-6=0$

14(4) 解. 设所求平面方程为 $\frac{x}{3}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{1}=1$

其法向量 $\vec{n_0}=(\frac{1}{3},\frac{1}{\beta},1)$ 令 $\vec{n_1}=(0,0,1)$

由题意 $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\vec{n_0}\cdot\vec{n_1}}{|\vec{n_0}||\vec{n_1}|}$

即 $\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{9}+\frac{1}{\beta^2}}}$ 得 $\beta=\frac{3\sqrt{26}}{26}$ 或 $\beta=-\frac{3\sqrt{26}}{26}$

即所求平面方程为 $x+\sqrt{26}y+3z-3=0$

或 $x-\sqrt{26}y+3z-3=0$

15(3) 解. ∵所求直线与z轴垂直且相交, 且过 $(2,-3,4)$

则所求直线过 $(0,0,4)$ 方向向量 $\vec{v}=(2,-3,0)$

$\vec{r}=\vec{r_0}+t\vec{v}$ $t\in R$ $\vec{r_0}=(0,0,4)$ $\vec{v}=(2,-3,0)$

$\vec{r}=(0,0,4)+t(2,-3,0)$ $t\in R$.

20 (2). 解：令 $l_1: \begin{cases} 4x+y-3z+24=0 \\ z-5=0 \end{cases}$ $\quad l_2: \begin{cases} x+y+3=0 \\ x+2=0 \end{cases}$

$P_1(-2,-1,5) \in l_1 \qquad P_2(-2,-1,0) \in l_2$

设 $l_1$ 的方向向量为 $\vec{v_1}$ $\quad l_2$ 的方向向量为 $\vec{v_2}$

$$\vec{v_1} = (4,1,-3) \times (0,0,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 4\vec{j} + 0\vec{k} = (1,-4,0)$$

$$\vec{v_2} = (1,1,0) \times (1,0,0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} - \vec{k} = (0,0,-1)$$

$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = (1,-4,0) \cdot (0,0,-1) = 0$ 则 $\vec{v_1} \perp \vec{v_2}$ 即 $l_1 \perp l_2$

$l_1: \vec{r} = \vec{r_1} + t_1\vec{v_1} = (-2+t_1, -1-4t_1, 5) \qquad t_1 \in R$

$l_2: \vec{r} = \vec{r_2} + t_2\vec{v_2} = (-2, -1, -t_2) \qquad t_2 \in R$

则当 $t_1 = 0$ $t_2 = -5$ 时 $l_1 \cap l_2 = (-2,-1,5)$

综上所述两直线垂直相交，交点为 $(-2,-1,5)$

23.(2) 令 $l_1\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases}$ $l_2\begin{cases} x+2y-z-2=0 \\ x+2y+2z+4=0 \end{cases}$

$P_1(1,1,1)\in l_1$ $P_2(0,0,-2)\in l_2$

设 $l_1$ 方向向量为 $\vec{v_1}$ $l_2$ 方向向量为 $\vec{v_2}$

$$\vec{v_1}=(1,1,-1)\times(2,1,-1)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}=(0,-1,-1)$$

$$\vec{v_2}=(1,2,-1)\times(1,2,2)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=6\vec{i}-3\vec{j}+0\vec{k}=(6,-3,0)$$

显然不存在 $\lambda\in R$ 使得 $\vec{v_1}=\lambda\vec{v_2}$，则 $\vec{v_1}$.$\vec{v_2}$ 异面. 即 $l_1$ 与 $l_2$ 异面

$$令\ \vec{n}=\vec{v_1}\times\vec{v_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & 0 \end{vmatrix}=-3\vec{i}-6\vec{j}+6\vec{k}=(-3,-6,6)$$

$\overrightarrow{P_1P_2}=(-1,-1,-3)$ $d=\dfrac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|3+6-18|}{\sqrt{9+36+36}}=\dfrac{9}{9}=1$

综上所述 $l_1$ $l_2$ 为异面直线. 两直线距离为1.

26. 解. $l: \begin{cases} 5x-11z+7=0 \\ 5y+7z-4=0 \end{cases}$ 过 $P_1(-8,5,-3)$ 设方向向量为 $\vec{v}$

$$\vec{v}=(5,0,-11)\times(0,5,7)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & -11 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix}=55\vec{i}-35\vec{j}+25\vec{k}=(55,-35,25)$$

设平面 $\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ $\pi_2: a_2x_2+b_2y_2+c_2z_2+d_2=0$

$P_2(4,-3,1)\in\pi_1$ $\vec{n_1}=(a_1,b_1,c_1)$ $\vec{n_2}=(a_2,b_2,c_2)$

$\because l\subset\pi_1$ 则 $\vec{n_1}\cdot\vec{v}=0$ $P_1(-8,5,-3)\subset\pi_1$

$\begin{cases} 4a_1-3b_1+c_1+d_1=0 \\ -8a_1+5b_1-3c_1+d_1=0 \\ 55a_1-35b_1+25c_1=0 \end{cases}$ 令 $a_1=1$ 可得 $b_1=\frac{4}{3}$ $c_1=-\frac{1}{3}$ $d_1=\frac{1}{3}$

则 $\pi_1: 3x+4y-z+1=0$

$\because \pi_1\perp\pi_2$ $\therefore \vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$ $\vec{n_2}\cdot\vec{v}=0$ $P_1\subset\pi_2$

$\begin{cases} -8a_2+5b_2-3c_2+d_2=0 \\ 55a_2-35b_2+25c_2=0 \\ 3a_2+4b_2-c_2=0 \end{cases}$ 令 $a_2=1$ 得 $b_2=-2$ $c_2=-5$ $d_2=3$

则 $\pi_2: x-2y-5z+3=0$

30. 解. $l:\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 过 $P_1(0,1,0)$ 设方向向量为 $\vec{v_1}$

$$\vec{v_1}=(1,1,-1)\times(1,-1,1)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}=(0,-2,-2)$$

平面 $\pi_0$: $x+y+z=0$ 法向量 $\vec{n_0}=(1,1,1)$

$\cos\theta=\dfrac{\vec{n_0}\cdot\vec{v_1}}{|\vec{n_0}||\vec{v_1}|}=\dfrac{-4}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ $\quad |\sin\theta|=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

设所求直线方向向量 $\vec{v_2}=(a,b,c)$

$\vec{n_0}\cdot\vec{v_2}=a+b+c=0$ ① $\quad |\sin\theta|=\dfrac{\vec{v_2}\cdot\vec{v_1}}{|\vec{v_2}||\vec{v_1}|}$ ②

联立①.② 令 $a=1$ 得 $b=-\frac{1}{2}$ $c=-\frac{1}{2}$ 即 $\vec{v_2}=(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

$l\cap\pi_0=P_2(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ $\quad \vec{r_2}=(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

则所求直线 $\vec{r}=\vec{r_2}+t\vec{v_2}$ 其中 $t\in R$

即 $\vec{r}=(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})+t(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

31 解. 设所求平面为 $\pi_1$ $ax+by+cz+d=0$ 法向量 $\vec{n}_1=(a,b,c)$

$\pi_0$: $5x-y+3z-2=0$ $\vec{n}_0=(5,-1,3)$

$P_1(1,3,0)$ $P_2(0,-2,0)$ $P_1,P_2$ 为 $\pi_0$ 与平面 $Oxy$ 交线上的两点

由题意 $P_1,P_2$ 在 $\pi_1$ 内

$\pi_1\perp\pi_0$ 则 $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_0=5a-b+3c=0$

$$\begin{cases} 5a-b+3c=0 \\ a+3b+d=0 \\ -2b+d=0 \end{cases}$$ 令 $a=1$ 得 $b=-\frac{1}{5}$ $c=-\frac{26}{15}$ $d=-\frac{2}{5}$

则所求平面为 $15x-3y-26z-6=0$