第十五周作业

习题 13.3.

1 (2). $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+\alpha^2+x^2}dx$

① 原式 $=\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{1}{1+(\frac{x}{\sqrt{1+\alpha^2}})^2}d(\frac{x}{\sqrt{1+\alpha^2}})$

$=\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}(\arctan\frac{1+\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}-\arctan\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}})$

$=\frac{\pi}{4}$

②. 原式 $=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$

$=\frac{\pi}{4}$

2.(2). $F(\alpha)=\int_{a+\alpha}^{b+\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$ $x=0$ 为 $\frac{\sin\alpha x}{x}$ 的可去间断点. $\therefore$ $\frac{\sin ux}{x}$ 对任意 x, u 连续

$F'(\alpha)=\int_{a+\alpha}^{b+\alpha}\cos\alpha x\,dx+\frac{\sin\alpha\cdot(b+\alpha)}{b+\alpha}-\frac{\sin\alpha(a+\alpha)}{a+\alpha}$

$=(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b+\alpha})\sin\alpha(b+\alpha)+(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{a+\alpha})\sin\alpha(a+\alpha)$

(4). $F(\alpha)=\int_0^{\alpha}f(x+\alpha, x-\alpha)\,dx$ 令 $u=x+\alpha$ $v=x-\alpha$ 且 $x=\frac{u+v}{2}$ $\alpha=\frac{u-v}{2}$

原式 $=\int_0^{\frac{u-v}{2}}f(u,v)\,d(\frac{u+v}{2})=\int_0^{\frac{u-v}{2}}[\frac{1}{2}f(u,v)\,du+\frac{1}{2}f(u,v)\,dv]$

$=\frac{1}{2}[\int_0^{\frac{u-v}{2}}f(u,v)\,du+\int_0^{\frac{u-v}{2}}f(u,v)\,dv]$

$F'(\alpha)=\frac{1}{2}[\int_0^{\frac{u-v}{2}}f'_v(u,v)\,du-\frac{1}{2}f(u,\frac{u-v}{2})+\int_0^{\frac{u-v}{2}}f'_u(u,v)dv+\frac{1}{2}f(\frac{u-v}{2},v)]$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}[f'_{(x-\alpha)}(x+\alpha,x-\alpha)\,d(x+\alpha)+f'_{(x+\alpha)}(x+\alpha,x-\alpha)\,d(x-\alpha)]+\frac{1}{4}[f(\alpha,x-\alpha)-f(x+\alpha,\alpha)]$

3 证明: 令 $F(t,x)=f(t)\cdot\sin k(x-t)$ $\quad F_x'=kf(t)\cos k(x-t)$

$\because f(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\therefore F(t,x), F_x'$ 在 $[a,b]$ 上连续. $\quad\therefore y(x)$ 可微.

$\therefore y'(x)=\frac{1}{k}\cdot\int_c^x k\cdot f(t)\cos k(x-t)\,dt+0-0$

即 $y'(x)=\int_c^x f(t)\cos k(x-t)\,dt$

令 $G(t,x)=f(t)\cos k(x-t)$ $\quad G_x'=-kf(t)\sin k(x-t)$

$\because f(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\therefore G(t,x), G_x'$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\quad\therefore y'(x)$ 可微

$y''(x)=\int_c^x -kf(t)\sin k(x-t)+f(t)-0$

即 $y''(x)+k^2\cdot\frac{1}{k}\int_c^x f(t)\sin k(x-t)=f(t)$ $\quad$ 即 $y''+k^2y=f(x)$

4. (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\,dx\quad(a>0.\ b>0)$

令 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\,dx$ $\quad f(a)=\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)$ $\quad f'(a)=\frac{2a\sin^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}$

$\because \ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)$, $\frac{2a\sin^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}$ 在 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$. $a\in(0,+\infty)$ 上连续.

$\therefore I(a)$ 可微 $\quad I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\sin^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\,dx$

令 $I(b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\,dx$ 同理 $I(b)$ 可微 $\quad I'(b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2b\cos^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\,dx$

令 $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\,dx$ $\quad B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\,dx$

$a^2A+b^2B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$ $\quad A+B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\,dx=\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a\tan x}{b}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{ab}\cdot\frac{\pi}{2}$

$\therefore A=\frac{\pi}{2a(a+b)}$ $\quad B=\frac{\pi}{2b(a+b)}$ $\quad I'(a)=2a\cdot A=\frac{\pi}{a+b}$ 两侧对 a 不定积分 $I(a)=\pi\cdot\ln(b+a)+C$

$I'(b)=2b\,B=\frac{\pi}{a+b}$ 两侧对 b 不定积分 $I(b)=\pi\cdot\ln(b+a)+C$

令 $a=b=1$ 得 $I(a)=I(b)=0$ $\quad$ 得 $C=-\pi\ln 2$

$\therefore\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\,dx=\pi\ln\frac{a+b}{2}$

(2). $\int_0^{\pi} \ln(1-2a\cos x+a^2)\,dx \quad a\in[0,1)$

令 $I(a)=\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\,dx \qquad f(x,a)=\ln(1-2a\cos x+a^2) \qquad f_a'=\frac{2a-2\cos x}{1-2a\cos x+a^2}$

$\because f(x,a)$, f_a' 在 $[0,\pi]\times[0,1)$ 上连续. $\quad\therefore I(a)$ 可微.

$I'(a)=\int_0^{\pi}\frac{2a-2\cos x}{1+a^2-2a\cos x}\,dx = \int_0^{\pi}\frac{(2a+2)\sin^2\frac{x}{2}+(2a-2)\cos^2\frac{x}{2}}{(a-1)^2\cos^2\frac{x}{2}+(a+1)^2\sin^2\frac{x}{2}}\,dx$ $\quad$ 令 $t=\tan\frac{x}{2}$ 则 $t\in[0,+\infty)$ $\quad x=2\arctan t \quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

$I'(a)=\int_0^{+\infty}\frac{(2a+2)t^2+(2a-2)}{(a-1)^2+(a+1)^2t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty}4\cdot\frac{(a+1)t^2+(a-1)}{(t^2+1)[(a+1)^2t^2+(a-1)^2]}\,dt$

$=\frac{2}{a}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{1+t^2}-\frac{1-a^2}{(a+1)^2t^2+(a-1)^2}\right]dt$

$=\frac{2}{a}\lim_{A\to+\infty}\left(\arctan t\Big|_0^A-\arctan\left(\frac{1+a}{1-a}t\right)\Big|_0^A\right)=0$

$\therefore I(a)=I(0)=0 \qquad \therefore \int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\,dx=0 \quad a\in[0,1)$

(3). $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\,dx \quad a\geq 0$

令 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\,dx \qquad f(x,a)=\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x} \qquad f_a'=\frac{1}{1+a^2\tan^2 x}$

$\because f(x,a)$, f_a' 在 $[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,+\infty)$ 上连续. $\quad\therefore I(a)$ 可微

$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+a^2\tan^2 x}\,dx \quad$ 令 $t=\tan x \quad x=\arctan t \quad dx=\frac{1}{1+t^2}dt \quad t\in[0,+\infty)$

$I'(a)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+a^2t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty}\left(\frac{\frac{1}{1-a^2}}{1+t^2}-\frac{\frac{a^2}{1-a^2}}{1+a^2t^2}\right)dt = \frac{1}{1-a^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt-\frac{a^2}{1-a^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+a^2t^2}dt$

$=\frac{1}{1-a^2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{a}{1-a^2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2(1+a)}$

两侧对 $a\in[0,a]$ 积分 $\quad I(a)-I(0)=\frac{\pi}{2}\ln(1+a) \qquad I(0)=0$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\,dx=\frac{\pi}{2}\ln(1+a) \quad a\geq 0$

(4). $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}$　　$0\le a<1$

令 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}$　　$f(x,a)=\frac{1}{\cos x}\cdot\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}$　　$f_a'=\frac{1}{\cos x}\frac{2\cos x}{1-a^2\cos^2 x}=\frac{2}{1-a^2\cos^2 x}$

$\because f(x,a).\ f_a'$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,1)$ 上连续.　$\therefore I(a)$ 可微.

$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{1-a^2\cos^2 x}dx$　令 $t=\tan x$　$x=\arctan t$　$dx=\frac{1}{1+t^2}dt$　$t\in[0,+\infty)$

$I'(a)=\int_0^{+\infty}\frac{2(t^2+1)}{(1-a^2)+t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^{+\infty}\frac{2}{t^2+1-a^2}dt=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\lim_{A\to+\infty}\arctan(\frac{t}{\sqrt{1-a^2}})\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$

两侧对 a 从 $[0,a]$ 积分　$I(a)-I(0)=\pi\arcsin a$　　$I(0)=0$

得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{dx}{\cos x}=\pi\arcsin a.$

习题 13.4

1. (4). $\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sin^u x}=\int_0^{\pi}(\frac{1}{\sin x})^u dx$　令 $t=\frac{1}{\sin x}$　$x=\arcsin\frac{1}{t}$　$t\in[1,+\infty)$　$dx=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}\cdot-\frac{1}{t^2}dt$

$\therefore\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sin^u x}=2\int_1^{+\infty}t^u\cdot\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}dt=2\int_1^{+\infty}\frac{t^{u-1}}{\sqrt{t^2-1}}dt$

当 $u<1$ 时　$\forall\varepsilon_0>0$　$u\le1-\varepsilon_0$　$\left|\frac{t^{u-1}}{\sqrt{t^2-1}}\right|\le\left|\frac{1}{t^{\varepsilon_0}\sqrt{t^2-1}}\right|$

$\forall\varepsilon>0$　$\exists X=[\frac{1+\varepsilon_0}{\varepsilon_0\varepsilon}]^{\frac{1}{\varepsilon_0}}$ $\forall A>X$　$\int_A^{+\infty}\frac{1}{t^{\varepsilon_0}\sqrt{t^2-1}}dt=\int_A^{+\infty}t^{-(1+\varepsilon_0)}\cdot d(\sqrt{t^2-1})=0+\int_A^{+\infty}(1+\varepsilon_0)\frac{\sqrt{t^2-1}}{t^{(2+\varepsilon_0)}}dt<(1+\varepsilon_0)\int_A^{+\infty}t^{-(1+\varepsilon_0)}dt$

$=\frac{1+\varepsilon_0}{\varepsilon_0}A^{-\varepsilon_0}<\varepsilon$

$\therefore u\in(-\infty,1)$ 时　$\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sin^u x}$ 一致收敛.

当 $u\ge1$ 时　$\frac{t^{u-1}}{\sqrt{t^2-1}}\ge\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}>\frac{1}{t}$　$\exists\varepsilon_0>0$ $\exists u=1$　$\forall A>0$　$\exists A'>A$　$\int_{A'}^{+\infty}\frac{1}{t}dt=+\infty>\varepsilon_0$

$\therefore u\ge1$ 时 $\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sin^u x}$ 不一致收敛.

$\therefore\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sin^u x}$ 的收敛域为 $u\in(-\infty,1)$

(6). $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} dx$

当 $\alpha>3$ 时 即 $\forall \varepsilon_0>0$ $\alpha \geqslant 3+\varepsilon_0$ $\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} < x^{2-\alpha} < x^{-1-\varepsilon_0}$

$\forall \varepsilon>0$ $\exists X=(\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon})^{\frac{1}{\varepsilon_0}}$ $\forall A>0$ $\int_A^{+\infty} x^{-1-\varepsilon_0} dx = \frac{1}{\varepsilon_0} A^{-\varepsilon_0} < \varepsilon$

$\therefore \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} dx$ 在 $\alpha \in (3,+\infty)$ 上一致收敛.

当 $\alpha \leq 3$ 时 $\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} \geqslant \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}$

$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^3} dx = \int_0^{+\infty} \ln(1+x^2)\, d(-\frac{1}{2}x^{-2}) = -\frac{1}{2}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{2x}{1+x^2} dx = -\frac{1}{2} + \int_0^{+\infty} (\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}) dx = -\frac{1}{2} + \ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Big|_0^{+\infty} = +\infty$

$\therefore \alpha \leq 3$ 时 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} dx$ 不一致收敛.

$\therefore \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} dx$ 的收敛域为 $(3,+\infty)$

2. (2). $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin\beta x\, dx$

(a): $0<\alpha_0 \leq \alpha < +\infty$

令 $f(x,\alpha) = \sin\beta x$ $\exists M=\frac{2}{\beta}$ $\int_0^b \sin\beta x\, dx = \frac{1}{\beta}(1-\cos\beta b) \leq \frac{2}{\beta} = M$ $\forall b \geqslant a$ $\alpha \in [\alpha_0,+\infty)$

$g(x,\alpha) = e^{-\alpha x}$ 关于 x 单调递减. 且一致趋向于 0 $\forall \varepsilon>0$ ($\varepsilon<1$), $\forall \alpha \in [\alpha_0,+\infty)$, $\exists X = \frac{-\ln\varepsilon}{\alpha_0}$ $\forall x>X$ $|e^{-\alpha x}| < \varepsilon$

$\therefore$ 积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin\beta x\, dx$ 在 $[\alpha_0,+\infty)$ 上一致收敛.

(b) $\left|\int_A^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin\beta x\, dx\right| = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} e^{-\alpha A} \cdot \left|\sin\beta A + \frac{\beta}{\alpha}\cos\beta A\right| = \frac{\sin(\beta A+\varphi)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} e^{-\alpha A}$ $\varphi = \arctan\frac{\beta}{\alpha}$

$\forall N>0$ $\exists A>N$ s.t $\sin(\beta A+\varphi)=1$

则 $\beta(A) = \sup_{\alpha>0} \left|\int_A^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin\beta x\, dx\right| = \frac{e^{-\alpha A}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} > \frac{1}{e\sqrt{\beta}}$ $\therefore$ 积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin\beta x\, dx$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

(4). $\int_A^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha} dx \geq \int_A^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} dx = \frac{(\alpha-1)\ln A+1}{A^{\alpha-1}(\alpha-1)^2}$

$\forall\ N>0 \quad A>N. \quad \exists\ \alpha\in(1,+\infty) \quad s.t. \quad A^{\alpha-1}(\alpha-1)<1$

$\therefore\ \beta(A)=\sup\limits_{\alpha>1}\left|\int_A^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx\right| > \ln A+\frac{1}{\alpha-1}$

$\therefore \int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$ 在 $\alpha\in(1,+\infty)$ 上不一致收敛.

(5). $\forall\ \alpha\in(0,+\infty) \quad e^{-\alpha x}\leq 1$ 且关于 x 单调递减. $x\in[1,+\infty)$

$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx$ 关于 α 一致收敛. 由Abel判别法. $\therefore\ \alpha\in(0,+\infty)$ 时一致收敛.

当 $\alpha=0$ 时 $\quad e^{-\alpha x}=1 \qquad \int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx$ 收敛

$\therefore\ \alpha\in[0,+\infty)$ 时一致收敛.

(6). $\int_0^x \sin(t^2)\,dt$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上一致有界.

$P\in(0,+\infty)$ 时 $\frac{1}{1+x^p}$ 单调递减且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x^p}=0$ 由Dirichlet判别法 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx$ 在 $P\in(0,+\infty)$ 上一致收敛.

$P=0$ 时 $\quad \int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx$ 收敛.

$\therefore\ \forall\ \varepsilon>0 \quad \exists\ X>0 \quad \forall\ A>X \quad \left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx\right|<\varepsilon$

$\therefore\ P\in[0,+\infty) \quad \int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{1+x^\alpha}dx$ 一致收敛

3. 证明: $\because\ u=\beta$ 时 $\int_a^{+\infty}f(x,\beta)\,dx$ 发散. $\quad\therefore\ \exists\ \varepsilon_0>0 \quad \forall\ X>a, \quad A_1, A_2>X \quad \left|\int_{A_1}^{A_2}f(x,\beta)dx\right|>\varepsilon_0$

$\because\ f(x,u)$ 在 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续.

$\therefore\ g(u)=\int_{A_1}^{A_2}f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续. $\quad\therefore\ \exists\ u_0\in[\alpha,\beta) \quad \left|\int_{A_1}^{A_2}f(x,u_0)\,dx\right|\geq\varepsilon_0$

$\therefore \int_a^{+\infty}f(x,u)\,dx$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上必不一致收敛.

6. 证明: $\forall\, b\in[0,+\infty)$ $\int_0^b \cos x\,dx = \sin b \le 1$ ∴ $\int_0^b \cos x\,dx$ 一致有界

$\frac{1}{1+(x+\alpha)^2}$ 对x单调递减 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+(x+\alpha)^2}=0$

由Dirichlet判别法 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}dx$ 在 $\alpha\in[0,+\infty)$ 一致收敛。

令 $f(x,\alpha)=\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}$ $f'_\alpha=\frac{-2(\alpha+x)\cos x}{[1+(\alpha+x)^2]^2}$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续.

$\int_0^b -2(\alpha+x)\cos x\,dx$ 在 $\alpha\in[0,+\infty)$ $b\in[0,+\infty)$ 上一致有界

$\frac{1}{[1+(x+\alpha)^2]^2}$ 关于x单调递减 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{[1+(x+\alpha)^2]^2}=0$ ∴ $\int_0^{+\infty}\frac{-2(x+\alpha)\cos x}{[1+(x+\alpha)^2]^2}dx$ 在 $\alpha\in[0,+\infty)$ 上一致连续.

∴ $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha}{1+(x+\alpha)^2}dx$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微.

7. (2). $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}}{xe^x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{xe^{(1+\alpha)x}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+\alpha)x\,e^{(1+\alpha)x}}d(1+\alpha)x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{xe^x}dx$ $\alpha>-1$ ∴ $1+\alpha>0$

$\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{xe^x}dx-\int_0^{+\infty}\frac{1}{xe^x}dx=0$

(3). 令 $I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}dx$ $f(x,a)=\frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}$ $f'_a=e^{-ax^2}$ 连续. ∴ $I(a)$ 可微.

∴ $I'(a)=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx=\frac{1}{\sqrt a}\int_0^{+\infty}e^{-(\sqrt a x)^2}d(\sqrt a x)=\frac{1}{\sqrt a}\cdot\frac{\sqrt\pi}{2}$

∴ $I(a)-I(0)=\sqrt{a\pi}$ $I(0)=0$ ∴ $\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}dx=\sqrt{a\pi}$

(6). 令 $I(a)=\int_0^{+\infty}[e^{-(\frac{a}{x})^2}-e^{-(\frac{b}{x})^2}]dx$ $I(b)=\int_0^{+\infty}[e^{-(\frac{a}{x})^2}-e^{-(\frac{b}{x})^2}]dx$

$f(x,a)=e^{-(\frac{a}{x})^2}-e^{-(\frac{b}{x})^2}$ $f'_a=-\frac{2a}{x^2}e^{-\frac{a^2}{x^2}}$ 连续.

∴ $I(a)$ 可微 $I'(a)=\int_0^{+\infty}-\frac{2a}{x^2}e^{-\frac{a^2}{x^2}}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-(\frac{a}{x})^2}d(\frac{a}{x})=\sqrt\pi$

∴ $I(b)-I(a)=\sqrt\pi\cdot(b-a)$ 同理 $I(b)-I(a)=\sqrt\pi\cdot(b-a)$

∴ $\int_0^{+\infty}[e^{-(\frac{a}{x})^2}-e^{-(\frac{b}{x})^2}]dx=\sqrt\pi(b-a)$

8 (2) 令 $t=\frac{x-a}{\sigma}$ 原积分 $=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma^2t^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sigma^2\sqrt{\pi}$

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^2}dx=-\frac{\sin^2x}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

(5). $\int_0^{+\infty}x^{2n}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^{n-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}.$

(6). $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4x}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^2}dx-\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 2x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$