周二作业 3月3日

习题6.1

1(3). $x\cdot y'+y=y^2$

解. $x\cdot\frac{dy}{dx}=y^2-y$ 当$x\neq0$时 $y^2-y\neq0$ 则 $\frac{dy}{y^2-y}=\frac{dx}{x}$

两侧积分 $\int\frac{1}{y(y-1)}dy=\int\frac{dx}{x}$

得 $\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|=\ln|x|+C_1$ 其中$C_1\in R$

则原方程解为 $\left|1-\frac{1}{y}\right|=e^{C_1}|x|$ $C_1\in R$ 即 $1-\frac{1}{y}=C_2\cdot x$ $C_2\in R$

当$x=0$时 $y=1$ 或$y=0$

综上所述 原方程的解为 $1-\frac{1}{y}=C_2x$ $C_2\in R$ 或$y=0$

2(3). $\frac{dx}{x^2-xy+y^2}=\frac{dy}{2y^2-xy}$

解. 令 $y=ux$ 则 $dy=x\cdot du+u\cdot dx$

当$x\neq0$时 $\frac{dy}{dx}=u+x\cdot\frac{du}{dx}=\frac{2u^2-u}{u^2-u+1}$

$\frac{u^2-(u-1)}{u^3-3u^2+2u}du=\frac{dx}{x}$ 两侧不定积分 $\int\frac{u^2-(u-1)}{u(u-1)(u-2)}du=\int\frac{1}{x}dx$

得 $\frac{5}{2}\ln|u-2|-\ln|u-1|+\frac{1}{2}\ln|u|=\ln|x|+C_1$ $C\in R$

$\ln\left|\frac{\sqrt{u(u-2)^5}}{u-1}\right|=\ln x+C_1$ $C\in R$

代入 $u=\frac{y}{x}$ 得$y(y-2x)^5=C_2x^6(y-x)^2$ $C_2\in R$

3 (1). $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+3}{x-y+1}$

解: $\begin{cases} x+y+3=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_0=-2 \\ y_0=-1 \end{cases}$ 令 $u=x+2$ $v=y+1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} = \frac{u+v}{u-v}$ 令 $v=t\cdot u$ $(u\neq 0)$ $dv = t\cdot du + u\cdot dt$

$\frac{dv}{du} = t + u\cdot\frac{dt}{du} = \frac{1+t}{1-t}$

得 $\frac{1-t}{1+t^2}\cdot dt = \frac{1}{u}du$ 两侧不定积分 $\int\frac{1-t}{1+t^2}dt = \int\frac{1}{u}du$

$\arctan t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) = \ln u + C$ $C\in R$

则原方程解为 $\arctan(\frac{y+1}{x+2}) - \frac{1}{2}\ln\left[1+(\frac{y+1}{x+2})^2\right] = \ln(x+2) + C$ $C\in R$

(2). $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+4y+3}{x+2y+1}$

解. 令 $u=x+2y$ 则 $y=\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{du}{dx} - \frac{1}{2} = \frac{2u+3}{u+1}$

即 $\frac{u+1}{5u+7}\cdot du = dx$ 两侧不定积分得 $\int\frac{u+1}{5u+7}du = x+C$ $C\in R$

$\int\frac{1}{5}(1-\frac{2}{5u+7})du = \frac{1}{5}u - \frac{2}{25}\ln(5u+7) = x+C$ $C\in R$

代入 $u=x+2y$ 得 $\frac{1}{5}(x+2y) - \frac{2}{25}\ln(5x+10y+7) = x+C$ $\in R$

$\frac{2}{5}y - \frac{4}{5}x - \frac{2}{25}\ln(5x+10y+7) = C$ $C\in R$

4(3). $y'=\frac{y}{x+y^3}$

解. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^3}$ $y=0$为原方程的解

$y\neq0$时 $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}+y^2$ 即 $\frac{dx}{dy}+(-\frac{1}{y})x=y^2$

两侧同乘 $e^{\int(-\frac{1}{y})dy}=\frac{1}{y}$ 得 $\frac{d(\frac{x}{y})}{dy}=y$ 即 $d(\frac{x}{y})=y\cdot dy$

两侧不定积分 $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}y^2+C$ $C\in R$

即原方程的解为 $x=\frac{1}{2}y^3+Cy$ $C\in R$ 或 $y=0$

(6). $y-y'\cos x=y^2(1-\sin x)\cos x$

解 $\cos x\neq0$ 时 $\frac{dy}{dx}+(-\frac{1}{\cos x})y=(\sin x-1)\cdot y^2$

两侧同时除以 y^2 $(y\neq0)$ $y^{-2}\cdot\frac{dy}{dx}+(-\frac{1}{\cos x})y^{-1}=(\sin x-1)$

令 $u=y^{-1}$ $\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=-2\cdot y^{-2}\cdot\frac{dy}{dx}$

则 $\frac{du}{dx}+\frac{2}{\cos x}u=2(1-\sin x)$

两侧同时乘 $e^{\int\frac{2}{\cos x}dx}=\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}$

$$\frac{d(u\cdot e^{\int\frac{2}{\cos x}\cdot dx})}{dx}=2(1-\sin x)\cdot\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}$$

两边积分得 $u\cdot\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}=\int2(1+\sin x)\cdot dx=2(x-\cos x)+C$ $C\in R$

得 $u=\frac{[C+2(x-\cos x)]\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$ 则 $y=\frac{1}{u}=\frac{(1+\sin x)^2}{[2(x-\cos x)+C]\cos^2 x}$ $C\in R$

易得 $y=0$ 也为方程的解.

综上所述方程的解为 $y=0$ 或 $y=\frac{(1+\sin x)^2}{[2(x-\cos x)+C]\cos^2 x}$ $C\in R$

5(2) $y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$ $y(\pi)=1$

解 $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}\cdot y=\frac{\sin x}{x}$ 对应的线性齐次方程为 $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=0$

考虑 $x>0$ 时

两侧同时乘 $e^{\int\frac{1}{x}dx}=x$ 得 $\frac{d(xy)}{dx}=0$

两侧积分得 $xy=C$ $C\in R$. 即 $y=\frac{C}{x}$ $C\in R$

设 $y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$ 的解为 $y=\frac{C(x)}{x}$

则 $y'+\frac{y}{x}=\frac{C'(x)\cdot x-C(x)}{x^2}+\frac{C(x)}{x^2}=\frac{C'(x)}{x}=\frac{\sin x}{x}$ 即 $C'(x)=\sin x$

则 $C(x)=-\cos x+C$ $C\in R$

则 $y=\frac{-\cos x+C}{x}$ 又因为 $y(\pi)=\frac{-\cos\pi+C}{\pi}=1$

得 $C=-1+\pi$ 则原方程的解为 $y=\frac{-\cos x-1+\pi}{x}$

6(2). $y'=\cos(x-y)$

解 令 $u=x-y$ 则 $y=x-u$ $y'=1-\frac{du}{dx}$

$1-\frac{du}{dx}=\cos u$ 整理可得 $\frac{du}{dx}=1-\cos u$

当 $\cos u=1$ 即 $u=2k\pi$ ($k\in Z$) 是方程的解 $y=x-2k\pi$ $k\in Z$

当 $\cos u\neq 1$ 时 $\frac{du}{1-\cos u}=dx$ 两侧不定积分 得 $-\cot(\frac{u}{2})=x+C$ $C\in R$

代入 $u=x-y$ 即 $-\cot(\frac{x-y}{2})=x+C$ $C\in R$

原方程的解为 $-\cot(\frac{x-y}{2})=x+C$ $C\in R$

或 $y=x-2k\pi$ $k\in Z$

8. 解. $f'(2) = -\frac{3}{2}$ $f(2)=3$

因为切点平分坐标轴间的切线段 $y' = -\frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 0$

$y \neq 0$ 时 $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$

两侧积分 $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C$

得 $\ln y = -\ln x + C$ 因为过 $(2,3)$

得 $C = \ln 6$ 得 $y = \frac{6}{x}$

12 (4). $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$

解 令 $p = y'$ 则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}$

原方程可化为 $p \cdot \frac{dp}{dy} + p^2 = 2e^{-y}$

令 $t = p^2$ 则 $\frac{dt}{dy} = \frac{dt}{dp} \cdot \frac{dp}{dy} = 2p \cdot \frac{dp}{dy}$

即 $\frac{dt}{dy} + 2t = 4e^{-y}$

两侧同时乘 e^{2y} 得 $\frac{d(t \cdot e^{2y})}{dy} = 4e^{y}$

两侧不定积分 $t \cdot e^{2y} = \int 4e^{y} dy + C_1 = 4e^{y} + C_1$ $C_1 \in R$

$t = 4e^{-y} + C_1 e^{-2y}$ 则 $y' = p = \sqrt{t} = \sqrt{4e^{-y} + C_1 e^{-2y}}$ $C_1 \in R$

即 $\frac{dy}{\sqrt{4e^{-y} + C_1 e^{-2y}}} = dx$ 两侧不定积分 $\int \frac{d(e^{y})}{\sqrt{4e^{y} + C_1}} = x + C_2$ $C_2 \in R$

即 $e^{y} = x^2 + C_3 x + C_4$ $C_3, C_4 \in R$

13(1) $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$ $\quad y(1)=1 \quad y'(1)=0$

解: $y'' \cdot y' - \frac{1}{x}(y')^2 = x^2$

令 $p=(y')^2$ $\quad p' = 2y' \cdot y''$ 则 $p' + (-\frac{2}{x})p = 2x^2$

两侧同时乘 $e^{\int -\frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}$

$\frac{d(\frac{1}{x^2}p)}{dx} = 2$ 两侧积分 $\frac{1}{x^2}p = 2x + C_1$

$p = 2x^3 + C_1 x^2$ $\quad \because y'(1)=0$ 得 $p(1)=0 \quad C_1=-2$

即 $y' = \sqrt{2x^3-2x^2}$

两侧积分 $y = \frac{2\sqrt{2}}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C_2$ $\quad C_2 \in R$

$y(1)=1$ 得 $C_2=1$

$y = \frac{2\sqrt{2}}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + 1$

周四作业 3月5日

习题6.2

1.(2). $y''\sin^2 x = 2y$ $y_1 = \cot x$

解. $y'' - \frac{2}{\sin^2 x} y = 0$ 设 $p(x) = 0$ $\int_{x_0}^{x} p(t)dt = 0$

$$y_2 = y_1 \cdot \int \frac{1}{y_1^2} e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \cdot dx = \cot x \int \tan^2 x \, dx$$

$$= \cot x (\tan x - x + C) \quad C \in R$$

不妨令 $C=0$ 则 $y_2 = 1 - x \cdot \cot x$

原方程的解为 $y = C_1 \cdot \cot x + C_2 (1 - x \cdot \cot x)$ C_1 $C_2 \in R$

2 (2) $xy'' - (1+x)y' + y = 0$ $x \neq 0$

解. 观察得到 $y_1 = e^x$ 为该齐次方程的一个特解

$y'' - (1+\frac{1}{x})y' + \frac{1}{x}y = 0$ 令 $p(x) = -1 - \frac{1}{x}$

$\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt = -(x-x_0) - \ln\frac{x}{x_0}$ 不妨令 $x_0 = 1$

$$y_2 = y_1 \cdot \int \frac{1}{y_1^2} e^{x-1+\ln x} dx = e^x \cdot \int x \cdot e^{-x-1} dx$$

$$= e^x \cdot (-e^{-x-1} - x \cdot e^{-x-1} + C) \quad C \in R$$

不妨令 $C=0$ 则 $y_2 = -\frac{x+1}{e}$

原方程的解为 $y = C_1 \cdot e^x - C_2 \cdot \frac{x+1}{e}$ $C_1, C_2 \in R$

3. $(1+x^2)\cdot y'' + 2x\cdot y' - 6x^2 - 2 = 0$ $\qquad y_1 = x^2$

解: $y'' + \frac{2x}{1+x^2} y' = \frac{6x-2}{1+x^2}$

对应的齐次方程为 $y'' + \frac{2x}{1+x^2} y' = 0$ 易得 $y_2 = 1$ 为方程一个特解

令 $P(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

$\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \frac{2t}{1+t^2}\,dt = \ln(1+x^2) - \ln(1+x_0^2)$ 不妨令 $x_0 = 0$

$y_3 = y_2 \cdot \int \frac{1}{y_2^2} e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C$

不妨令 $C = 0$

则原方程的解为 $y = y_1 + C_1 y_2 + C_2 y_3 = x^2 + C_1 + C_2 \cdot \arctan x$ $\qquad C_1\ C_2 \in R$

$y' = 2x + \frac{C_2}{1+x^2}$

$y(-1) = 1 + C_1 - \frac{\pi}{4} \cdot C_2 = 0$

$y'(-1) = -2 + \frac{C_2}{2} = 0$

得 $C_1 = \pi - 1 \quad C_2 = 4$

即特解为 $y = x^2 + (\pi - 1) + 4\arctan x$

4(2) $y'' + 2y' + 2y = 0$

解 令 $y = e^{\lambda x}$ 则 $\lambda^2 e^{\lambda x} + 2\lambda e^{\lambda x} + 2e^{\lambda x} = 0$

其特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ 无实根

复数根为 $\lambda_1 = -1 + i$ $\lambda_2 = -1 - i$ 即 $\alpha = -1$ $\beta = 1$

$e^{\lambda_1 x} = e^{(-1+i)\cdot x} = e^{-x}(\cos x + i\cdot \sin x)$

$e^{\lambda_2 x} = e^{(-1-i)x} = e^{-x}\cdot [\cos(-x) + i\cdot \sin(-x)]$

方程的通解为 $y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)\cdot e^{-x}$ $C_1, C_2 \in R$

5(2) $y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{2x}$ 求一个特解

解、对应的齐次方程为 $y'' - 6y' + 9y = 0$ 令 $y = e^{\lambda x}$

$\lambda^2 e^{\lambda y} - 6\lambda e^{\lambda y} + 9e^{\lambda y} = 0$

其特征方程为 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ 得 $\lambda = 3$

则 齐次方程的解为 $y' = e^{3x}\cdot(C_1 x + C_2)$ $C_1, C_2 \in R$

令 $y_1 = x\cdot e^{3x}$ $y_2 = e^{3x}$

设原方程的一个特解 $y_0 = C_1(x)\cdot x e^{3x} + C_2(x) e^{3x}$

$C_1(x)$ $C_2(x)$ 满足 $\begin{cases} C_1'(x)\cdot x\cdot e^{3x} + C_2'(x)\cdot e^{3x} = 0 \\ C_1'(x)\cdot e^{3x}\cdot(1+3x) + C_2'(x)\cdot 3e^{3x} = (x+1)e^{2x} \end{cases}$

得 $C_1'(x) = \frac{x+1}{e^x}$ $C_2'(x) = -\frac{x(x+1)}{e^x}$

两侧不定积分 $C_1(x) = -(x+2)e^{-x} + C_1'$ $C_2(x) = \frac{-x^2-3x-3}{e^x} + C_2'$

不妨令 $C_1' = C_2' = 0$ $\quad C_1(x) = -(x+2)e^{-x}$ $\quad C_2 = -(x^2+3x+3)e^{-x}$

$$y_0(x) = -x(x+2)e^{2x} - (x^2+3x+3)e^{2x}$$

即原方程的解为 $y = C_1 \cdot xe^{3x} + C_2 e^{3x} - x(x+2)e^{2x} - (x^2+3x+3)e^{2x}$ $C_1, C_2 \in R$

令 $C_1 = C_2 = 0$，原方程一个特解为 $y = -x(x+2)e^{2x} - (x^2+3x+3)e^{2x}$

7 证明在区间 I 上任何线性相关的两个函数 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 它们的 Wronski 行列式恒为零。

证明: $\because$ $y_1(x)$, $y_2(x)$ 在区间 I 上线性相关

则存在 C_1 C_2 不全为零的实数 满足

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0$$

两侧求导得 $C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) = 0$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x)$$

① $C_1 \neq 0$ 时 则 $y_1(x) = -\frac{C_2}{C_1} y_2(x)$ $\quad y_1'(x) = -\frac{C_2}{C_1} y_2'(x)$

代入 $W(x) = -\frac{C_2}{C_1} y_2(x) y_2'(x) - \left[-\frac{C_2}{C_1} y_2'(x) \cdot y_2(x)\right] = 0$

② $C_2 \neq 0$ 时 则 $y_2(x) = -\frac{C_1}{C_2} y_1(x)$ $\quad y_2'(x) = -\frac{C_1}{C_2} y_1'(x)$

代入 $W(x) = -\frac{C_1}{C_2} y_1(x) y_1'(x) - \left[-\frac{C_1}{C_2} y_1'(x) \cdot y_1(x)\right] = 0$

即在区间 I 上任何线性相关的两个函数 $y_1(x)$ $y_2(x)$ 的 Wronski 行列式恒为零

8. 证明下列两个函数在区间 $(0,2)$ 上是线性无关的但 Wronski 行列式恒为 0.

$$y_1(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 0\le x\le 1;\\ 0, & 1<x\le 2\end{cases}\qquad y_2(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le 1\\ (x-1)^2, & 1<x\le 2\end{cases}$$

证明: 假设存在 $C_1\ C_2\in R$ 且 C_1, C_2 不全为零

满足 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=0$

$x\in(0,1)$ 时 $y_1(x)>0$ $y_2(x)=0$ 则此时 $C_1=0$ $C_2\ne0$ 且 $C_2\in R$

$x\in(1,2)$ 时 $y_1(x)=0$ $y_2(x)>0$ 则此时 $C_1\ne0$ 且 $C_1\in R$ $C_2=0$

即不存在 $C_1\,C_2\in R$ 且 $C_1\ C_2$ 不全为零使得 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=0$

假设不成立, 即 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 在 $(0,2)$ 上线性无关

$$y_1'(x)=\begin{cases}2(x-1), & 0\le x\le 1\\ 0, & 1<x\le 2\end{cases}\qquad y_2'(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le 1\\ 2(x-1), & 1<x\le 2\end{cases}$$

$$x\in(0,1)\qquad W(x)=\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)=0-0=0$$

$$\forall x\in[0,2]$$

即在区间 $(0,2)$ 上 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 的 Wronski 行列式恒为零

9(2) $x''' - 2x'' + x' - 2x = 0$

解：令 $u = x' - 2x$ 则 $u'' + u = 0$

其特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0$ 得 $\lambda_1 = i$ $\lambda_2 = -i$

则 $u = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ $c_1\ c_2 \in R$

$x' - 2x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ 两侧同时乘 e^{-2t}

$$\frac{d(x \cdot e^{-2t})}{dt} = (c_1 \cos t + c_2 \sin t)e^{-2t}$$

两侧积分 $x \cdot e^{-2t} = C_3 \sin t\, e^{-2t} + C_4 \cos t\, e^{-2t} + C_5$ $C_3, C_4, C_5 \in R$

则原方程解为：$x = C_3 \cdot \sin t + C_4 \cos t + C_5 e^{2t}$ $C_3, C_4, C_5 \in R$

(4). $x^{(4)} + 2x'' + x = 0$

解 其特征方程为 $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$ 即 $(\lambda^2+1)^2 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = i$ $\lambda_3 = \lambda_4 = -i$

$x_1 = \cos t$ $x_2 = \sin t$ $x_3 = t\cos t$ $x_4 = t\sin t$

则原方程解为 $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3\, t\cos t + C_4\, t\sin t$

$C_1\ C_2\ C_3\ C_4 \in R$