介观物理第十四次作业

董建宇 202328000807038

1. 在 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{K}'$ 点附近做小量近似，计算 Haldane 模型相图中 $C=1$ 和 $C=0$ 两相边界的表达式。

   Proof. Haldane 在文章中写出 $M\neq 0,\ \cos\phi\neq 0,\ \sin\phi\neq 1$ 的哈密顿量为:

$$\begin{aligned}\hat{H} =&2t_2\cos\phi\left[\sum_i \cos(\vec{k}\cdot\vec{b}_i)\right]\mathbf{I}+t_1\left[\sum_i\cos(\vec{k}\cdot\vec{a}_i)\sigma^1+\sum_i\sin(\vec{k}\cdot\vec{a}_i)\sigma^2\right]\\ &+\left[M-2t_2\sin\phi\sum_i\sin(\vec{k}\cdot\vec{b}_i)\right]\sigma^3\end{aligned}$$

   其中对于 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{K}'$ 点，有:

$$\vec{k}\cdot\vec{b}_i=\frac{2\pi}{3};\quad \vec{k}\cdot\vec{b}_i=-\frac{2\pi}{3}.$$

   Haldane 模型相图中 $C=1$ 和 $C=0$ 的边界条件为 σ^3 项系数为 0，即有:

$$M-2t_2\sin\phi\sum_i\frac{\sqrt{3}}{2}=0.$$

   即有:

$$\frac{M}{t_2}=3\sqrt{3}\sin\phi.$$

   类似的，$C=-1$ 和 $C=0$ 的边界条件为:

$$M-2t_2\sin\phi\sum_i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0.$$

   即

$$\frac{M}{t_2}=-3\sqrt{3}\sin\phi.$$

   □

2. 考虑哈密顿量 $\hat{H}(\mathbf{k})=\sigma\cdot\mathbf{k}$，其中 $\sigma=\sigma_x\mathbf{e}_x+\sigma_y\mathbf{e}_y+\sigma_z\mathbf{e}_z$，$\mathbf{k}$ 为波矢，σ_i 为泡利矩阵。请利用 $\mathbf{A}=i\langle\psi^-|\nabla_k|\psi^-\rangle$ 以及 $\mathbf{b}=\nabla\times\mathbf{A}$ 求解本征解 $E=-|\mathbf{k}|$ 对应的贝里场 $\mathbf{b}$。

   Proof. 根据题意，哈密顿量可以写作:

$$H(\mathbf{k})=\sigma\cdot\mathbf{k}=\begin{pmatrix}k_z & k_x-ik_y\\ k_x+ik_y & k_z\end{pmatrix}$$

   本征值满足:

$$\begin{pmatrix}k_z-\lambda & k_x-ik_y\\ k_x+ik_y & -k_z-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2-|\mathbf{k}|^2=0.$$

即两个本征能量为：$\lambda = \pm|\mathbf{k}|$。当本征能量为 $\lambda = -|\mathbf{k}|$，本征矢满足：

$$\begin{pmatrix} k_z & k_x - ik_y \\ k_x + ik_y & -k_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -|\mathbf{k}| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

即有：

$$a = \frac{k_z - |\mathbf{k}|}{k_x + ik_y} b.$$

结合归一化条件 $|a|^2 + |b|^2 = 1$，可得：

$$a = \frac{k_z - |\mathbf{k}|}{k_x + ik_y}\sqrt{\frac{|\mathbf{k}| + k_z}{2|\mathbf{k}|}}; \quad b = \sqrt{\frac{|\mathbf{k}| + k_z}{2|\mathbf{k}|}}.$$

则贝里联络为：

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} =& i\begin{pmatrix} a^* & b^* \end{pmatrix} \nabla_k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
=& i\left(a^*\frac{\partial a}{\partial k_x} + b^*\frac{\partial b}{\partial k_x}\right)\mathbf{e}_x + i\left(a^*\frac{\partial a}{\partial k_y} + b^*\frac{\partial b}{\partial k_y}\right)\mathbf{e}_y + i\left(a^*\frac{\partial a}{\partial k_z} + b^*\frac{\partial b}{\partial k_z}\right)\mathbf{e}_z.
\end{aligned}$$

为了简化书写，接下来使用 k 替代 $|\mathbf{k}|$。接下来分别计算各项如下：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial k_x} =& -\frac{1}{k_x + ik_y}\sqrt{\frac{k+k_z}{2k}}\frac{\partial k}{\partial k_x} - \frac{k_z - k}{k_x + ik_y}\frac{k_z}{4k^2}\sqrt{\frac{2k}{k+k_z}}\frac{\partial k}{\partial k_x} - i\frac{k_z - k}{(k_x + ik_y)^2}\sqrt{\frac{k+k_z}{2k}}; \\
\frac{\partial b}{\partial k_x} =& -\sqrt{\frac{2k}{k+k_z}}\frac{k_z}{4k^2}\frac{\partial k}{\partial k_x}; \\
\frac{\partial a}{\partial k_y} =& -\frac{1}{k_x + ik_y}\sqrt{\frac{k+k_z}{2k}}\frac{\partial k}{\partial k_y} - \frac{k_z - k}{k_x + ik_y}\frac{k_z}{4k^2}\sqrt{\frac{2k}{k+k_z}}\frac{\partial k}{\partial k_y} - i\frac{k_z - k}{(k_x + ik_y)^2}\sqrt{\frac{k+k_z}{2k}}; \\
\frac{\partial b}{\partial k_y} =& -\sqrt{\frac{2k}{k+k_z}}\frac{k_z}{4k^2}\frac{\partial k}{\partial k_y}; \\
\frac{\partial a}{\partial k_z} =& \frac{1 - \frac{\partial k}{\partial k_z}}{k_x + ik_y}\sqrt{\frac{k+k_z}{2k}} + \frac{k_z - k}{k_x + ik_y}\sqrt{\frac{2k}{k+k_z}}\frac{1}{4k^2}\left(k - k_z\frac{\partial k}{\partial k_z}\right); \\
\frac{\partial b}{\partial k_z} =& \sqrt{\frac{2k}{k+k_z}}\frac{1}{4k^2}\left(k - k_z\frac{\partial k}{\partial k_z}\right).
\end{aligned}$$

从而可以计算：

$$\begin{aligned}
a^*\frac{\partial a}{\partial k_x} + b^*\frac{\partial b}{\partial k_x} =& \frac{k - k_z}{2k}\frac{ik_y}{k_x^2 + k_y^2}; \\
a^*\frac{\partial a}{\partial k_y} + b^*\frac{\partial b}{\partial k_y} =& -\frac{ik_x(k - k_z)}{2k(k_x^2 + k_y^2)}; \\
a^*\frac{\partial a}{\partial k_z} + b^*\frac{\partial b}{\partial k_z} =& 0.
\end{aligned}$$

即贝里联络为：

$$\mathbf{A} = \frac{k_y(k_z - k)}{2k(k_x^2 + k_y^2)}\mathbf{e}_x + \frac{k_x(k - k_z)}{2k(k_x^2 + k_y^2)}\mathbf{e}_y.$$

贝里场为:

$$\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_y}{\partial k_z}\mathbf{e}_x + \frac{\partial A_x}{\partial k_z}\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial k_x} - \frac{\partial A_x}{\partial k_y}\right)\mathbf{e}_z$$

可以计算:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial A_y}{\partial k_z} &= \frac{k_x}{2k^3}; \\ \frac{\partial A_x}{\partial k_z} &= \frac{k_y}{2k^3}; \\ \frac{\partial A_y}{\partial k_x} - \frac{\partial A_x}{\partial k_y} &= \frac{k_z}{2k^3}. \end{aligned}$$

即贝里场为:

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{k}}{2k^3}.$$

□