介观物理第六次作业

董建宇 202328000807038

Problem II.3 Follow the above argument, derive the relation $G \propto e^{-(T_0/T)^{1/(d+1)}}$ in d dimensions.

Proof. 在充分低温度下，即 $k_BT << |\epsilon_i|, |\epsilon_j|, |\epsilon_i - \epsilon_j|$，我们可以把电流表达式展开到 eV 一阶项，即:

$$I = \frac{eR\gamma_0}{k_BT} e^{-W/k_BT} e^{-2R/\xi}(eV).$$

即电导为:

$$G = \frac{e^2R\gamma_0}{k_BT}\left[e^{-W/k_BT} e^{-2R/\xi}\right].$$

对于维度为 d 的体系有:

$$WAR^d = \frac{1}{N(0)}.$$

其中 A 为常数，$d = 3$ 时，$A = \frac{4\pi}{3}$。则可以计算:

$$\frac{dW}{dR} = \frac{d}{dR}\frac{1}{AN(0)R^d} = -\frac{d}{AN(0)}\frac{1}{R^{d+1}}.$$

最大化电导表达式中括号内的项，令

$$f(R) = e^{-W/k_BT} e^{-2R/\xi}.$$

可以计算:

$$\frac{df(R)}{dR} = e^{-W/k_BT} e^{-2R/\xi}\left(\frac{d}{Ak_BTN(0)}\frac{1}{R^{d+1}} - \frac{2}{\xi}\right).$$

当 $\frac{df(R)}{dR} = 0$ 时，有:

$$R_0^{d+1} = \frac{d\xi}{2Ak_BTN(0)}.$$

当 $R < R_0$ 时，$\frac{df(R)}{dR} > 0$；当 $R > R_0$ 时，$\frac{df(R)}{dR} < 0$。即当 $R = R_0$ 时，电导最大，此时有:

$$G \propto e^{-(2^dR^d/\xi^d)^{1/(d+1)}} = \exp\left[-\left(\frac{d2^d}{Ak_BTN(0)\xi^d}\right)^{1/(d+1)}\right]$$

其中 $N(0)\xi^d = \frac{1}{k_BT_0}$，则有:

$$G \propto \exp\left[-\left(\frac{d2^d}{A}\frac{T_0}{T}\right)^{1/(d+1)}\right]$$

□