数值试验二

董建宇　2019511017

4 月 23 日

1

1.1 实验目的

对于函数 $f(x)=\frac{1}{1+25x^2}$，在区间 [-1,1] 内用拉格朗日插值法进行插值，去不同的插值多项式的阶数，观察龙格现象。

1.2 实验方法

利用 Matlab 编写出计算 Lagrange 插值多项式的数值解的脚本，分别绘制当插值多项式阶数为 n=2,5,10 的插值函数与 f(x) 在 [-1,1] 上的图像。

Matlab 程序如下:

[-1,1] 区间上拉格朗日插值代码 (experience2problem1duichen.m):

```
n=input(”n=”);
s=2/n;
x=[];
f=[];
for i=1:n+1
  x(i)=-1+(i-1)*s;
  f(i) = 1/(1 + 25 * (x(i)^2));
end
y=-1:0.01:1;
L=0;
for k=1:n+1
  l=1;
  for i=1:n+1
    if (i =k)
      l=l.*(y-x(i))./(x(k)-x(i));
    else
      l=l*1;
    end
  end
  L=L+f(k)*l;
end
z=1./(1+25*(y.*y));
plot(y,L)
hold on
plot(y,z)
```

[0,1] 区间上拉格朗日插值代码 (experience2problem1buduichen.m):

```
n=input(”n=”);
s=1/n;
x=[];
f=[];
for i=1:n+1
  x(i)=0+(i-1)*s;
  f(i) = 1/(1 + 25 * (x(i)^2));
end
y=0:0.01:1;
L=0;
for k=1:n+1
  l=1;
  for i=1:n+1
    if (i =k)
```

```
            l=l.*(y-x(i))./(x(k)-x(i));
        else
            l=l*1;
        end
    end
    L=L+f(k)*l;
end
z=1./(1+25*(y.*y));
plot(y,L)
hold on
plot(y,z)
```

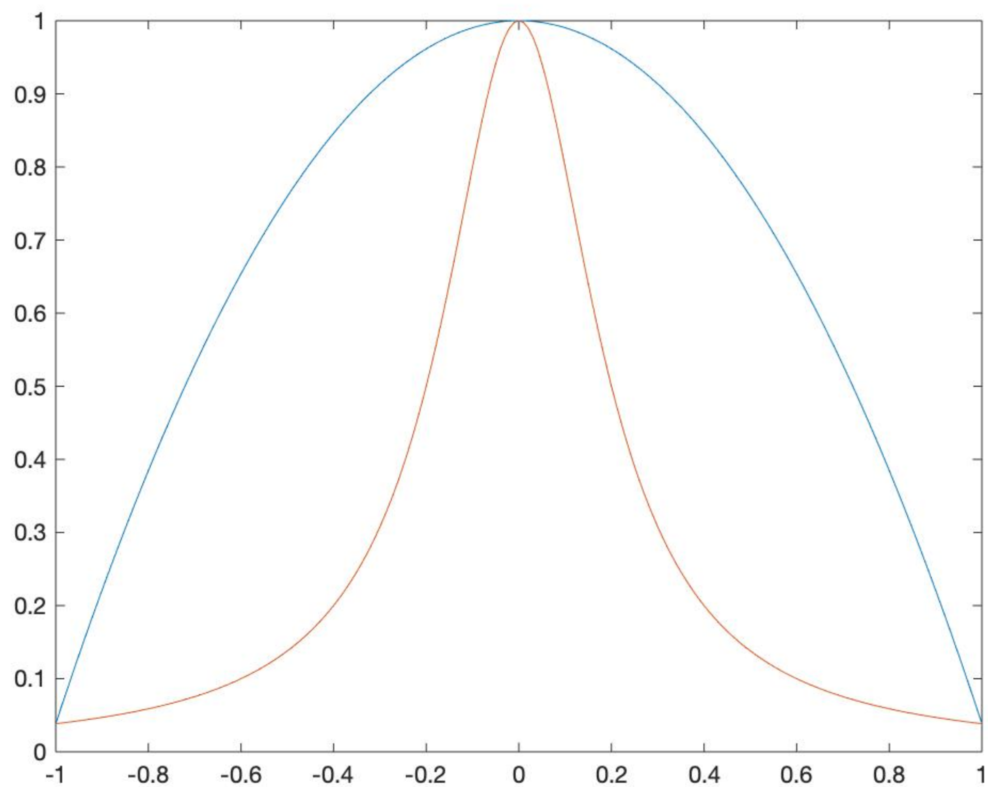
1.3 实验结果

1.3.1 [-1,1] 上二次插值

调用 experience2problem1duichen.m 函数输入 n=2
选取 $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ 作为 y=f(x) 的三个节点进行二次插值。

x_i	-1	0	1
y_i	$\frac{1}{26}$	1	$\frac{1}{26}$

则有



其中蓝线为函数 f(x)，红线为二次插值函数。

$$l_0(x) = \frac{x(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x^2-x}{2}$$
$$l_1(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = -x^2+1$$
$$l_2(x) = \frac{(x+1)x}{(1+1)(1-0)} = \frac{x^2+x}{2}$$

所以二次插值多项式为

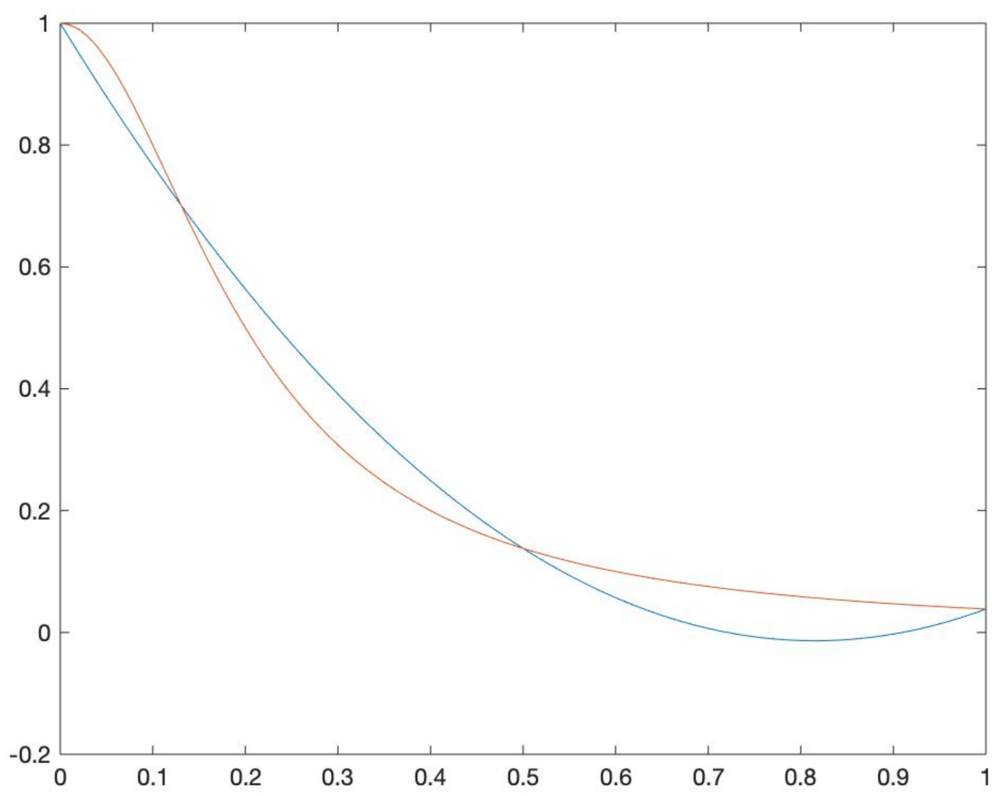
$$L_2(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i l_i(x) = -\frac{25}{26}x^2+1$$

1.3.2 [0,1] 上二次插值

调用 experience2problem1buduichen.m 函数输入 n=2
选取 $x_0=0, x_1=\frac{1}{2}, x_2=1$ 作为 y=f(x) 的三个节点进行二次插值。

x_i	0	$\frac{1}{2}$	1
y_i	1	$\frac{4}{29}$	$\frac{1}{26}$

则有



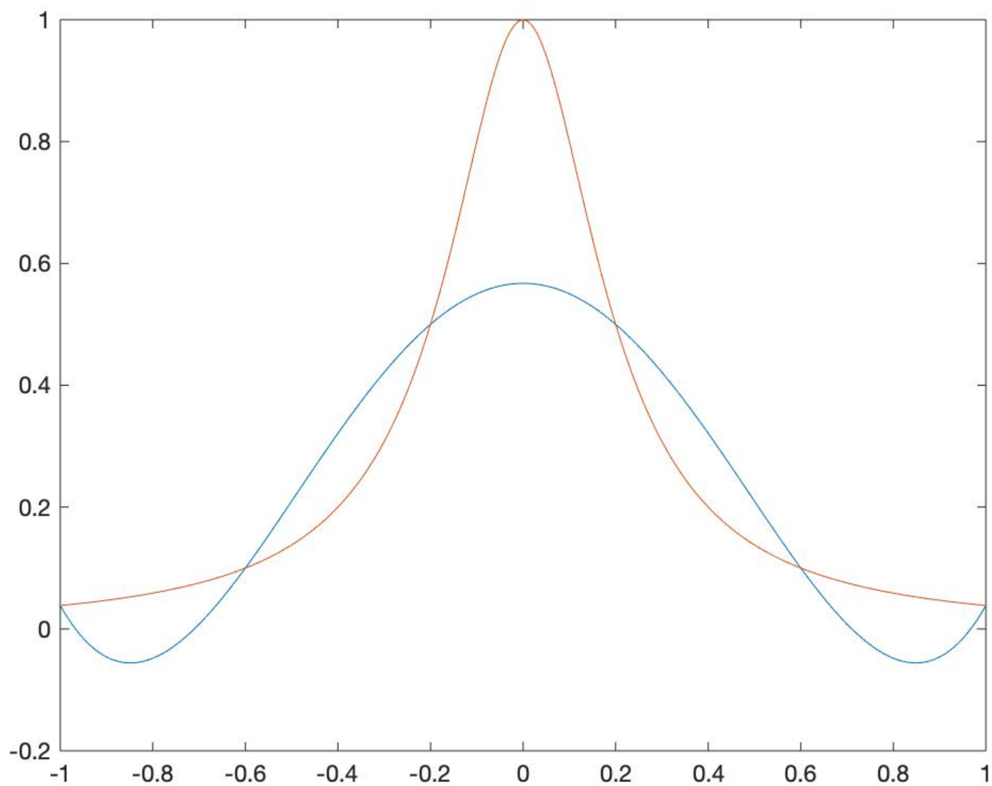
其中蓝线为函数 f(x)，红线为二次插值函数。

1.3.3 [-1,1] 上五次插值

调用 experience2problem1duichen.m 函数输入 n=5
选取 $x_0 = -1, x_1 = -\frac{3}{5}, x_2 = -\frac{1}{5}, x_3 = \frac{1}{5}, x_4 = \frac{3}{5}, x_5 = 1$ 作为 y=f(x) 的六个节点进行五次插值。

x_i	-1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	1
y_i	$\frac{1}{26}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{26}$

则有



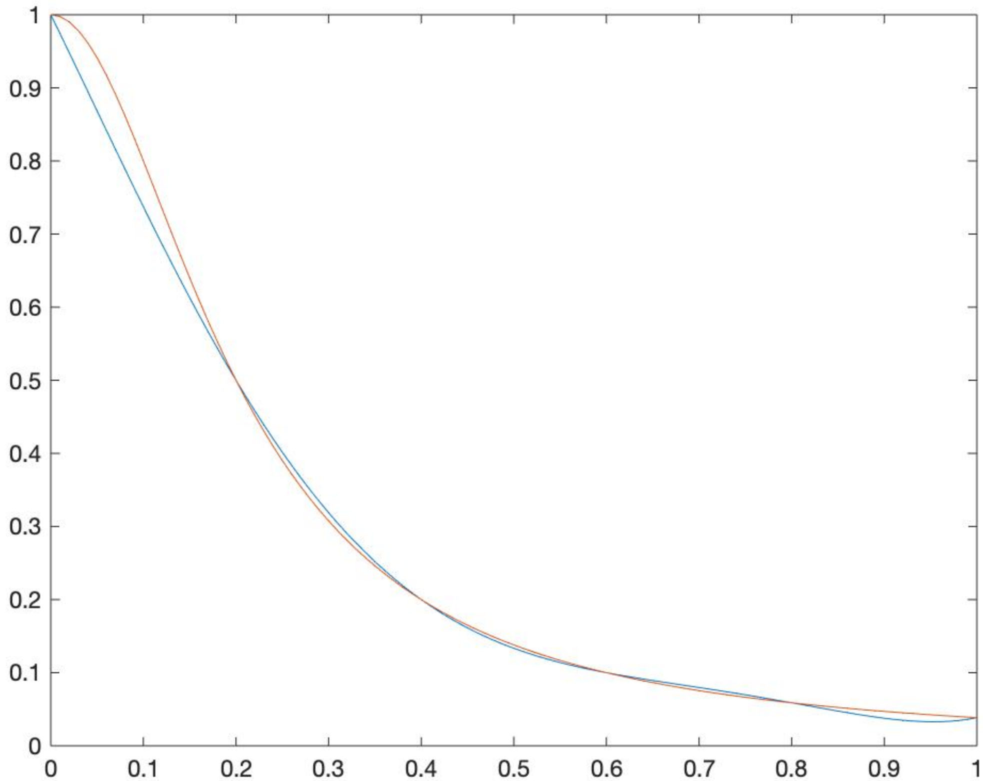
其中蓝线为函数 f(x)，红线为五次插值函数。

1.3.4 [0,1] 上五次插值

调用 experience2problem1buduichen.m 函数输入 n=5
选取 $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = \frac{2}{5}, x_3 = \frac{3}{5}, x_4 = \frac{4}{5}, x_5 = 1$ 作为 y=f(x) 的六个节点进行五次插值。

x_i	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1
y_i	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{26}$

则有



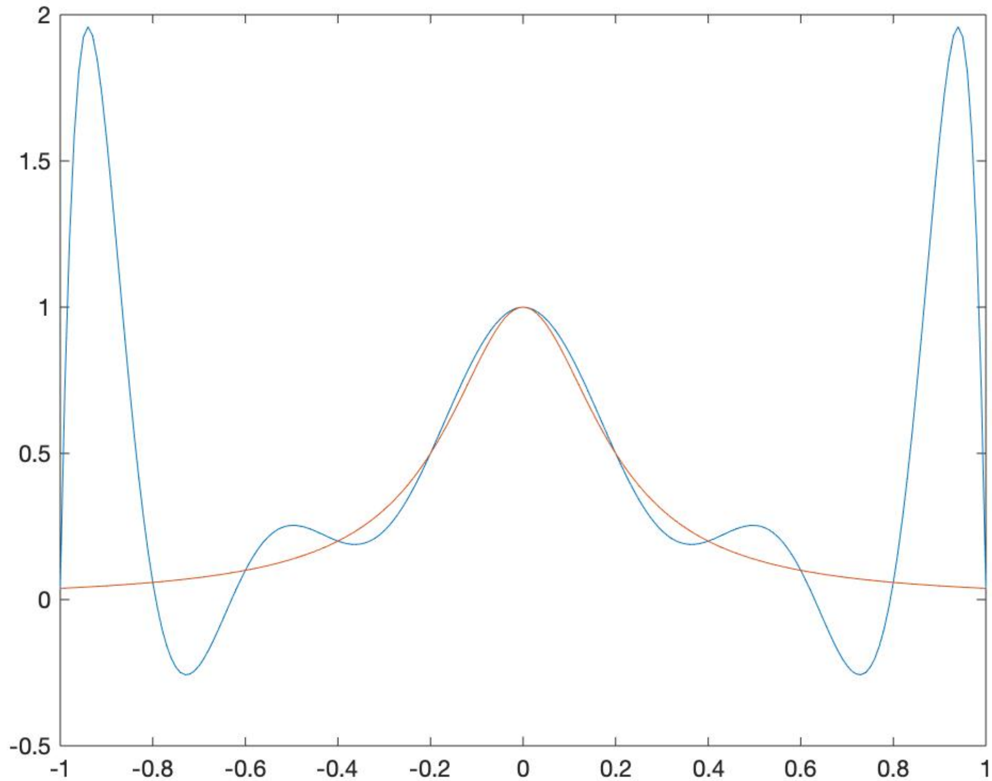
其中蓝线为函数 f(x)，红线为五次插值函数。

1.3.5 [-1,1] 十次插值

调用 experience2problem1duichen.m 函数输入 n=10
选取如下节点进行十次插值:

x_i	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_i	$\frac{1}{26}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{26}$

则有



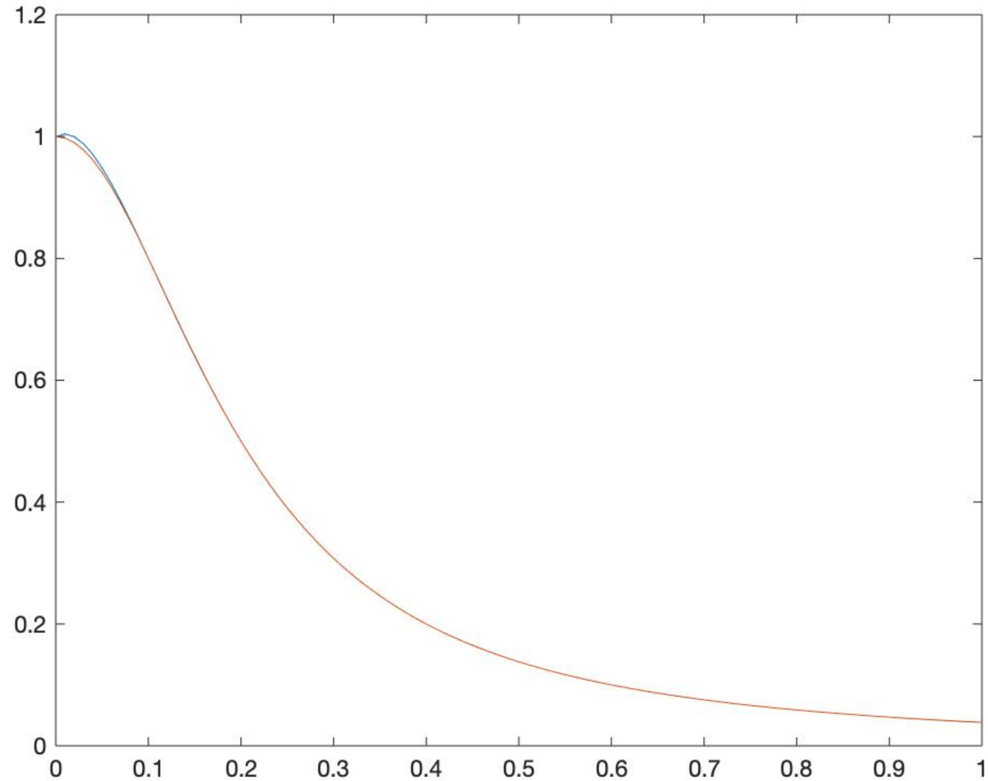
其中蓝线为函数 f(x)，红线为十次插值函数。

1.3.6 [0,1] 十次插值

调用 experience2problem1buduichen.m 函数输入 n=10
选取如下节点进行十次插值:

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y_i	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{29}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{53}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{4}{85}$	$\frac{1}{26}$

则有



其中蓝线为函数 f(x)，红线为十次插值函数。

1.4 分析与总结

由上述 [-1,1] 上利用拉格朗日插值的到的三幅图对比可知，利用拉格朗日插值法，当插值多项式阶数越高时，在一定区间范围内插值函数与原函数的误差越小；但当插值多项式阶数 n 较大时，会在边界处出现数值不稳定点，即在区间边界处出现较大震荡，即龙格现象。

在 [0,1] 上利用拉格朗日插值得到的插值函数与原函数的误差也随着插值节点的增多而减少，且在插值区间边界处不会出现龙格现象。

横向对比相同阶数二插值区间不同的插值函数图像，可以得到若选择关于原函数对称轴对称的区间进行插值，会在插值区间边界处出现龙格现象；而当选择对称区间的一半即非对称区间时，龙格现象消失。

2 人口数据拟合问题

2.1 实验目的

根据统计得到的 1980 至 1996 年我国人口数据，预测 2018、2019、2020 年我国人口。

2.2 实验方法

根据人口理论马尔萨斯模型，采用指数函数

$$N(t) = e^{a+bt}$$

对数据进行拟合，为了方便计算，两侧同时取对数，令 $y = \ln(N)$ 则有

$$y(t) = a + bt$$

使用 Matlab 编写脚本 (具体脚本内容详见附件 experience2problem2.m)。

设计算法，输入人口数据，并计算所有人口数据的对数值；建立超定方程组的系数矩阵，并计算对应的正规方程组的系数矩阵和右端向量；求解超定方程组并输出结果：a，b；利用数据结果构造指数函数计算 2018、2019、2020 年人口近似值。

Matlab 程序如下:

```
t=[];
for i=1:17
  t(i)=1979+i;
end
N=[9.8705, 10.0072, 10.1654, 10.3008, 10.4357, 10.5851, 10.7507, 10.93, 11.1026, 11.2704, 11.4333, 11.5823, 11.7171, 11.8517, 11.9850, 12.1121, 12.2389];
y=[];
for i=1:17
  y(i)=log(N(i));
end
A=ones(17,2);
for i=1:17
  A(i,1)=t(i);
end
C=A.'*A;
D=A.'*(y.');
x=C\D;
a=x(2)
b=x(1)
N2018=exp(a+b*2018)
N2019=exp(a+b*2019)
N2020=exp(a+b*2020)
```

2.3 实验结果

计算得到

$$a = -25.0455,\ b = 0.0138$$

则人口数据模型为 (单位：亿)

$$N(t) = e^{0.0138t-25.0455}$$

当 t 分别去 2018、2019、2020 时可以得到预测人口数据为 (单位：亿)

$$N(2018) = 16.7258$$
$$N(2019) = 16.9583$$
$$N(2020) = 17.1941$$

2.4 分析与讨论

经查阅数据，预测的人口数目较明显小于实际值。分析原因如下:

由于国家政策经济发展水平等因素的影响，中国人口数目近年来并未按照指数增长模型增长，增速放缓，使得预测人口数目大于实际人口。

3 SARS 的传播与预防问题

3.1 实验目的

根据北京市当年 4 至 6 月份的疫情数据，通过拟合确诊的累积病人曲线，预测五天后累计病人数量。

若延后 5 天采取严格的预防措施, 对疫情的传播所生成的影响做出估计。

3.2 实验方法

取拟合曲线的拟合函数为如下非线性函数

$$\frac{1}{y} = a + \frac{b}{x}$$

为了方便计算，取 $t = \frac{1}{x}$，$n = \frac{1}{y}$，则有

$$n = a + bt$$

设计算法，输入日期和已确诊病例数目并分别计算其倒数值；建立超定方程组的系数矩阵，并计算正规方程组的系数矩阵和右端向量；求解超定方程并输出 a 和 b 结果；利用数据结过构造非线性函数，并预测五天后累计确诊患者数量。

使用 Matlab 编写脚本代码如下

```
x=[1,11,12,21,31,41,43,52,62];
y=[297,1584,1640,1988,2189,2309,2319,2394,2439];
t=[];
n=[];
for i=1:9
  t(i)=1/x(i);
  n(i)=1/y(i);
end
A=ones(9,2);
for i=1:9
  A(i,1)=t(i);
end
C=A.'*A;
D=A.'*(n.');
z=C\D;
a=z(2)
b=z(1)
N=1/(a+b/67)
```

3.3 实验结果

计算得到

$$a = 0.0003599, \ b = 0.0030$$

则累计确诊病例数目随时间变化的拟合函数为

$$\frac{1}{y} = 0.0003599 + \frac{0.0030}{x}$$

当 t=67 时 (6 月 25 日)，可以解得

$$y \approx 2470$$

即预测五天后确诊病例数为 2470。