上海科技大学《数值分析》自测题 1

一、单项选择题

$0.565\sim0.574$

1. 已知 $a=3.201, b=0.57$ 是经过四舍五入后得到的近似值，则 $a+b$ 的有效数字位数为

3.

【C】

(A) 1； (B) 2； (C) 3； (D) 4.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$，用迭代公式 $x^{(k+1)}=x^{(k)}+\omega(Ax^{(k)}-b)$ 解方程 $Ax=b$，为使迭代收敛速度最快，则 ω 的取值为

$(I+\omega A)x^{(k)}-\omega b$　　$-\ln\rho(B)$

$B=\begin{bmatrix}1+4\omega & \omega\\ \omega & 1+4\omega\end{bmatrix}$　　$\lambda I-B=\begin{bmatrix}\lambda-1-4\omega & -\omega\\ -\omega & \lambda-1-4\omega\end{bmatrix}$

【D】

(A) $\dfrac{1}{2}$； (B) $\dfrac{1}{3}$； (C) $\dfrac{1}{4}$； (D) $\dfrac{1}{5}$.

$[\lambda-(1+4\omega)]^2-\omega^2=0$

$[\lambda-(1+4\omega)-\omega]\cdot[\lambda-(1+4\omega)+\omega]=0$

$\lambda=1+5\omega$ 或 $\lambda=1+3\omega$

3. 由如下插值条件

x	0	1	2	3	4
$y=f(x)$	-7	-4	5	26	65

所确定的插值多项式 $P(x)$ 的最高幂次的系数为　$f[0,1,2,3,4]\cdot x\cdot(x-1)(x-2)(x-3)$　【　】

(A) 2； (B) -2； (C) 1； (D) -1.

4. 已知函数 $S_3(x)=\begin{cases}x^3+x^2, & 0\le x<1\\ 2x^3+ax^2+bx-1, & 1\le x\le 2\end{cases}$ 是以 0, 1, 2 为样条节点的三次样条函数，则

$2=2+a+b-1$　　$a+b=1$

$5=6+2a+b$　　$2a+b=-1$

$a=-2$

【B】

$3x^2+2x$

$6x^2+2ax+b$

(A) $a=2,\ b=-3$； (B) $a=-2,\ b=3$；

(C) $a=3,\ b=-2$； (D) $a=-3,\ b=2$.

5. 若 $f(x)=x^3, x\in(0,1)$，则内积 $(f,f)=$　$\int_0^1 x^3\cdot x^3\,dx$　【D】

7

(A) $\dfrac{1}{4}$； (B) $\dfrac{1}{5}$； (C) $\dfrac{1}{6}$； (D) $\dfrac{1}{7}$.

$L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 5 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$　$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$

二、填空题

1. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 5 & -4 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 作 LU 分解：$A=LU$，则 $U=$ $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$

$2-6+5$

2. 已知三阶实对称矩阵 A 的全部特征值为 4, 2, 1，则 A 的条件数 $Cond(A)_2=$ 4 .

$A^TA=A^2$

$Cond(A)_2=\|A\|_2\|A^{-1}\|_2$

$4\cdot 1$

$f[0.1,0.2]=\frac{f(0.2)-f(0.1)}{0.1}=6$ $f[0.2,0.4]=\frac{f(0.4)-f(0.2)}{0.2}=1$

$\frac{f[0.1,0.2]-f[0.2,0.4]}{0.1-0.4}$ $\frac{50}{3}$

3. 已知函数表

x	0.1	0.2	0.4
$f(x)$	0.2	0.8	1.0

则 $f(x)$ 的二阶差商为 $\underline{\frac{50}{3}}$.

$I=\frac{4}{3}T_8-\frac{1}{3}T_4$

$\frac{I-T_{2n}}{I-T_n}\approx\frac{1}{4}$

4. 记 T_n 表示 n 等分后按复化梯形公式计算积分 $I=\int_a^b f(x)dx$ 所得的近似值，若已知 $T_4=0.94451, T_8=0.94568$，则误差 $I-T_8\approx$ $\underline{\frac{1}{3}(T_8-T_4)}$.

5. 设 $P(x)$ 为3次多项式，且 $P(0)=p_0, P(1)=p_1, P(2)=p_2$，则积分 $\int_0^2 P(x)\mathrm{d}x=$_____.

$P=ax^2+bx+p_0$ $a+b+p_0=p_1$ $4a+2b+p_0=p_2$

三、计算与证明题

1. 给定线性代数方程组 $Ax=b$，其中 $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\1&1&-2\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$. 判断用 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel 迭代解方程 $Ax=b$ 的敛散性.

$A=D-L-U$ $Dx=(L+U)x+b$ $x^{(k+1)}=D^{-1}(D-A)x^{(k)}+D^{-1}b$

$(D-L)x=Ux+b$ $x^{(k+1)}=(D-L)^{-1}Ux^{(k)}+(D-L)^{-1}b$

2. 已知 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}, f(2)=3, f'\left(\frac{1}{2}\right)=1$. （1）求满足插值条件：

$$P\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right), P\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right), P(2)=f(2), P'\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)$$

$P(x)=x^2-1$

的插值多项式 $P(x)$；（2）若 $f(x)$ 不是二次函数，且在 $\left[-\frac{1}{2},2\right]$ 内满足 $\left|f^{(4)}(x)\right|<1$，证明：

$\delta=f(x)-P(x)=k(x)\cdot(x+\frac{1}{2})\cdot(x-\frac{1}{2})^2\cdot(x-2)$

$\exists\ \xi\in[-\frac{1}{2},2]$ $k(x)=\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)$

$\left|f(1)\right|<\frac{1}{64}$.

3. 求函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 在 $[0,1]$ 上的最佳平方逼近多项式 $P(x)=a+bx^2$.

$I\ \int_0^1\left(a+bx^2-\frac{1}{1+x^2}\right)^2dx$

$\frac{\partial I}{\partial a}=0$ $\frac{\partial I}{\partial b}=0$ $\Rightarrow\begin{cases}a=\\b=\end{cases}$

4. 设 $f(x)\in C^2[a,b]$， $I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 记

$T_n(f)=\frac{1}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]\cdot h$

$$h=\frac{b-a}{n}, x_i=a+ih, i=0,1,\cdots,n,$$

（1）写出计算 $I(f)$ 的复化梯形公式 $T_n(f)$；（2）导出计算 $I(f)$ 的一点高斯型求积公式 $G_0(f)\equiv A_0f(x_0)$ 及其复化公式 $G_n(f)$；（3）求参数 α，使得 $T_{2n}(f)=\frac{1}{2}T_n(f)+\alpha G_n(f)$.

$f(x)=1, x, x^2, x^3$

5. （1）求常数 A_0, A_1, A_2, A_3 使得求积公式

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + A_2 f'(0) + A_3 f'(1) \qquad (*)$$

的代数精度尽可能高，并给出代数精度.

（2）设 $H(x)$ 是满足下列插值条件的插值多项式：

$$H(0) = f(0),\ \ H'(0) = f'(0),$$
$$H(1) = f(1),\ \ H'(1) = f'(1).$$

若 $f(x) \in C^4[0,1]$，试导出插值余项：$f(x) - H(x)$.（3）试建立本题给出的数值积分公式（*）的余项表达式.