$A=D-L-U$

一、单项选择题

1. 用 $Jacobi$ 迭代求方程 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$, 则该迭代矩阵的谱半径为 【 B 】

(A) $\rho = a^2$； (B) $\rho = |a|$； (C) $\rho = \dfrac{1}{a^2}$； (D) $\rho = \dfrac{1}{|a|}$.

2. 若使数值积分公式 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x \approx A_1 f\left(\dfrac{1}{2}\right) + A_2 f(1)$ 的代数精度最高，则 【 A】

$\frac{1}{2} = A_1 + A_2$ $A_1=\frac{1}{3}$ $A_2=\frac{1}{6}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{2}A_1 + A_2$

(A) $A_1 = \dfrac{1}{3}, A_2 = \dfrac{1}{6}$ ； (B) $A_1 = \dfrac{1}{6}, A_2 = \dfrac{1}{3}$；

(C) $A_1 = \dfrac{1}{4}, A_2 = \dfrac{1}{4}$； (D) $A_1 = \dfrac{3}{10}, A_2 = \dfrac{1}{5}$.

3. 用显式欧拉方法求初值问题 $\begin{cases} y' = -(1+t)y + t^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$ 若取步长 $h = 0.1$，则 $y_1 \approx$ 【 B 】

$y_1 = y_0 + h\cdot[-(1+t)y_0 + t^2]$

(A) 0.8； (B) 0.9； (C) -0.1 1.1； (D) 1.2 .

4. 下列数据取自一个次数不超过 4 次的多项式 $P(x)$，

x	0	1	2	3	4
$y = f(x)$	-7	-4	5	26	65

则多项式 $P(x)$ 的次数是 $f[0,1,2,3,4]$ 【 】

(A) 1； (B) 2； (C) 3； (D) 4 .

5. 给定方程 $f(x) = x^{1+\alpha} - x = 0$ ，其中 $0 < \alpha < 1$，记 p_1, p_2 分别为用牛顿迭代法求解上述方程两个根 $x_1^* = 0$ 和 $x_2^* = 1$ 的收敛阶，则 $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 【 B 】

(A) $p_1 = 2, p_2 = 1+\alpha$； (B) $p_1 = 1+\alpha, p_2 = 2$；

(C) $p_1 = 2, p_2 = 2$； (D) $p_1 = 1+\alpha, p_2 = 1+\alpha$.

二、填空题

1. 如果近似数 $x^* = 24.1357$ 的绝对误差界为 0.0005，则它具有 ___5___ 位有效数字.

$\frac{1}{2}\times 10$

0.5×10^{-3} 10^{1}

$\frac{1}{2}\times 10^{-3}$

2. 矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&3\\4&7&7\\-2&4&5\end{pmatrix}$ 作 LU 分解：$A=LU$，则 $L=\begin{pmatrix}1&0&0\\ &1&0\\ & &1\end{pmatrix}$，$U=\begin{pmatrix} & & \\0& & \\0&0& \end{pmatrix}$

$y'=xy$

3. 求常微分方程初值问题 $\begin{cases}y'-xy=0, 0\le x\le 1,\\ y(0)=1\end{cases}$ 的梯形公式为

$\begin{cases}y_{k+1}=y_k+\frac{h}{2}(x_k y_k+x_{k+1}y_{k+1})\\ y_0=y(0)=1\end{cases}$.

$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$　　$f(1)=1$　　$f'(1)=5$　　$f'(x)=3x^2+2x$

4. 用 Newton 法求方程 $f(x)=x^3+x^2-1=0$ 的根，若取 $x_0=1$，则 $x_1=$ $\frac{4}{5}$.

5. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$，$\lambda^{(m)}$ 表示用幂法求 A 的按模最大特征值的第 m 次近似值，若取初始迭代向量

$z^{(1)}=Ax^{(0)}$

$x^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，则 $\lambda^{(2)}=$______.　　$x^{(1)}=\frac{z^{(1)}}{\max(z^{(1)})}$

$\lambda^{(1)}=\max(z^{(1)})$

三、用列主元 Gauss 消元法求下列线性代数方程组的解

$$\begin{pmatrix}-2&1&4\\6&0&-2\\0&8&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\-5\\4\end{pmatrix}.$$

四、给定线性代数方程组 $Ax=b$，其中 $A=\begin{pmatrix}\alpha&2&1\\2&\alpha&-1\\1&1&0.5\end{pmatrix}$，$b=(1,1,1)^T$，$x=(x_1,x_2,x_3)^T$，$\alpha\neq 0$ 为实数．（1）写出求解上述方程组的 Gauss-Seidel 迭代格式；（2）试确定 α 的取值范围以确保 Gauss-Seidel 迭代格式收敛.

$A=D-L-U$

$(I-D^{-1}A)$

五、 给定函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$.（1）求以 $x_0=0,\ x_1=\dfrac{1}{2},\ x_2=1$ 为节点的 $f(x)$ 的二次插值多项式 $P_2(x)$．（2）求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最佳平方逼近多项式 $P_1(x)=a+bx$.

六、设 $f(x)\in C^4[-a,a]$，$I(f)=\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$．（1）试确定求积公式

$$\tilde{I}(f)=A_0f(-a)+A_1f(0)+A_2f(a)$$

中的参数 A_0, A_1, A_2，使上述求积公式具有尽可能高的代数精度，并指出所达到的代数精度的次数.

（2）导出上述数值积分公式的截断误差 $R=I(f)-\tilde{I}(f)$.（3）用所构造的求积公式计算积分

n个小区间：　$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$

$R_n[f]=\int_a^b[f(x)-L_n(x)]\,dx=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\cdot\int_a^b\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,dx$

$R_3[f]=\frac{f'''(\xi)}{3!}\int_{-a}^{a}(x+a)\cdot x\cdot(x-a)\,dx$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

七、设函数 $f(x,y)$ 具有连续二阶偏导数，给定求解初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y), & a \le x \le b, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ 的单步方法：

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))]$，其中 $h = \dfrac{b-a}{n}$ 为步长，$y_n \approx y(x_n)$.（1）证明上述方法为二阶方法；（2）试针对模型问题 $\begin{cases} y' = \lambda y, \lambda < 0, \\ y(a) = y_0 \end{cases}$，确定上述方法稳定的条件.

八、设 $a > 0, b > 0, c > 0$，（1）讨论迭代格式 $I_k = \dfrac{c}{b + aI_{k-1}}, I_0 > 0, k = 1, \cdots$，的敛散性；（2）若取该格式是线性收敛，再构造一个平方收敛的迭代格式。

$$I_k - I_{k-1} = \frac{c}{b+aI_{k-1}} - I_{k-1}$$

$$\frac{c}{b+ax} - x = \frac{c - x(b+ax)}{(b+ax)} = \frac{-ax^2 - bx + c}{b+ax} \qquad -\frac{b+\sqrt{b^2+4ac}}{-2a}$$