物理原理 I 第一次作业

(Due: 10 月 8 日 23：59 online)

<u>注意:此处以及许多书里为简便起见，使用斜体黑体符号代表矢量，这与斜体带上标箭头的矢量定义是等价的。</u>

第一题 积分和数值计算练习

1. 质点沿 x 轴正向运动，受到与速度成正比的摩擦力，其加速度 $a=-kv$， k 为常数．设从原点出发时速度为 v_0，解此微分方程，写出运动方程 $x=x(t)$.

2. 使用数学工具(excel 或者 matlab)，使用数值近似方式去计算出 x(t)。此处给定 k=1 (单位 1/s), v_0=v(0)=3 (m/s)。并写出在 1s，10s 和 100s 时候的 x(t)。t 很大时候的 x(t)体现怎样的行为，是否与(1)中结果接近?

（提示：操作方法为在 t=0 时刻取一个很小的间隔 Δt(比如 0.01 s), 认为在此时间内加速度恒定为-v(0)，通过 v(Δt)=v(0)-v(0) Δt 来求出 Δt 时刻的速度，通过 x(Δt)=x(0)+v(0)*Δt 来求出 Δt 时刻的位移。以此类推，从 0 开始求出 Δt, 2*Δt,…直到任意时刻的 x(t) 和 v(t)。）*

3. 讨论 2 里面的误差来源。使用更小的时间间隔 Δt（比如 0.001 s）重新计算 2，误差是否减小了呢?

第二题 级数展开

1. 通过课堂上学习的级数展开，证明如下关系式：$e^{i\theta}=cos\theta+isin\theta$，并说明$e^{i\pi}=-1$。

2. 写出下列函数围绕着 x=0.5 的泰勒级数中的前两个非 0 项。(a) $f(x)=x^2-cosx+1;(b)f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$。

3. 使用数学工具(excel 或者 matlab)，绘制 sin(x)在[0,2π]的函数图像，画出 sin(x)的幂级数展开形式前 3,7,15 项求和后的函数图像，说明随着项数的增多，级数展开形式趋向于原函数形式。

第三题：渐近行为分析

物理里面，我们经常通过分析物理规律依赖于哪些物理参数，以及让一些参数趋向于某个极限（如 0，正负无穷大等）的行为，来分析所猜测的物理规律是否合理。

我们来看如下的例子。一个人在高度为 h 的悬崖上用任意角度，速度 v 扔出一个球。请问他能够扔出最远的距离是如下表达式中的哪一个?(不需要从头解出结果，只需要通过分析距离与 h 和 v 的依赖关系，以及 h 和 v 趋向于某个值时候解的行为，排除掉错误的解)。给出错误的解不成立的理由。

$$\frac{gh^2}{v^2},\quad \frac{v^2}{g},\quad \sqrt{\frac{v^2h}{g}},\quad \frac{v^2}{g}\sqrt{1+\frac{2gh}{v^2}},\quad \frac{v^2}{g}\left(1+\frac{2gh}{v^2}\right),\quad \frac{v^2/g}{1-\frac{2gh}{v^2}}.$$

第四题 物理量的本征不确定度

物理过程中，除了测量因素带来的不确定度，物理量自己在各种扰动的作用下也带来本征的不确定度。在物理中，有一些物理量能够互相制约，其不确定度会互相影响，下面这道问题展示了频率和时间这两个物理量之间不确定度相互影响的情况。

函数 x(t)=sin(kt) 在 k=1（单位 Hz）的时候描述了一个单频率的波动。此时频率不确定度 Δk=0, 但是在所有时间都能观察到此波动（即具有有限大小的$|x(t)|^2$），即时间的不确定度 Δt 无穷大。

现在由于扰动引入了单频外其他频率，此时 Δk>0，那时间的不确定度 Δt 会有怎样的变化呢。

1. 请画出 Δk=0.01 时的 x(t)的函数图像。（提示，可以在 0.99 和 1.01 之间等间距的取一系列 k 值，使用 matlab 等数学工具求出相应的 x(t) 的总和）。从函数图像上观察出此时波动的时间不确定度（即能在那一段时间观察到此波动）Δt。

2. 请画出 Δk=0.1 时候的 x(t)的函数图像，并找出此时波动的时间不确定度 Δt，与 1 相比是增大了还是减小了？

3. 通过改变 Δk，寻找不同的 Δt，你能找到的两者最小乘积 Δk*Δt 是多少? Δk 和 Δt 不可能同时取到无限小，且总是大于一个最小值，这就是物理“测不准原理”的一个例子。

第五题 矢量运算

已知两个矢量为$\mathbf{A}=\hat{\boldsymbol{\imath}}+\hat{\boldsymbol{\jmath}}+2\hat{\boldsymbol{k}}$以及$\mathbf{B}=3\hat{\boldsymbol{\imath}}-\hat{\boldsymbol{\jmath}}+\hat{\boldsymbol{k}}$，请求出

(1) **A+B,** (2) **A-B,** (3) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$**,** (4) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$

(5)如果以矢量 **A** 为新的坐标系 x 轴方向建立起新的右手直角坐标系，请写出新的坐标系 x, y, z 的单位矢量在原直角坐标系下的表达式。

(6)一个平行六面体三边矢量分别为 **A, B** 和 **C，** 证明此平行六面体体积为$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$

(7) 请使用直角坐标系下的矢量分量形式，证明三维空间中的任意矢量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$满足如下矢量运算规律：

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$$
$$(\alpha\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\alpha(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),\alpha\text{为一个标量}$$
$$\boldsymbol{a}\bullet(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\bullet\boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b})$$
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$$
$$\boldsymbol{a}\bullet(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0$$

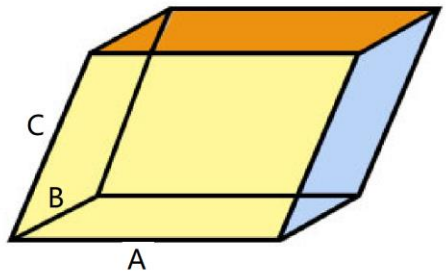

图 1. 平行六面体

第六题 阿基米德螺线与等角螺线

1. 一个车轮沿固定的中心以均匀角速度$\frac{d\theta}{dt}=\omega$逆时针转动，一颗珠子沿着轮轴以匀速度 u 向外运动。t=0 时刻珠子所在轮轴沿 x 轴方向，珠子位于车轮中心处。请在(a)直角坐标系(b)极坐标分别写出珠子的速度和加速度。

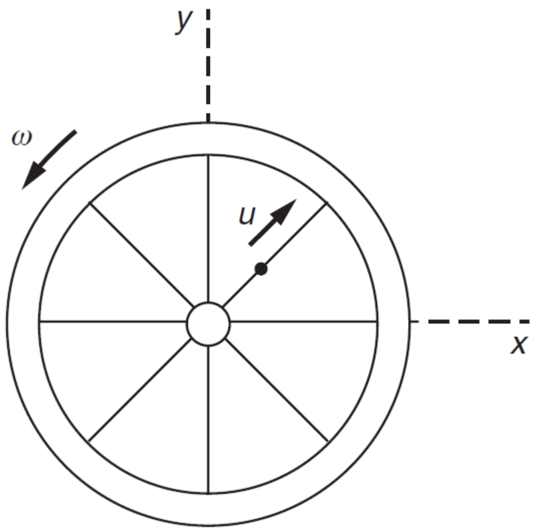

图 2.

2. 使用 Matlab 等做图工具，画出珠子的运动轨迹。

3. 这种运动轨迹称做阿基米德螺线，在生活中随处可见。老唱片上留下的刻槽，盘状蚊香，等螺距的螺钉的投影，机械缝纫机凸轮的轮廓等等都是阿基米德螺线形状.下图所示为两条阿基米德螺线组成的凸轮，通过凸轮转动传动一根直杆上下运动。试通过分析 1 中得出的速度和加速度，讨论这样传动装置有什么特点。

4. 另一个经常见到的螺线叫做等角螺线。首先从这道趣味问题开始引入: 在边长为 a 的正方形四个角，有四个人 A,B,C,D，在同一时刻开始，他们分别时时刻刻朝着下一个人(A 朝着 B，B 朝着 C，C 朝着 D，D 朝着 A)，以相同的速率 v 运动。请问需要多少时间他们会相互追上别人?(提示，使用合适的参考系)。

5. 下面我们来分析四人的运动轨迹，如图 4 所示。以正方形的中心建立极坐标系的话，试从四个人运动完全对称的角度考虑，说明任意时刻，某一人运动轨迹的速度矢量与此人的位置矢量形成的角度为常数。

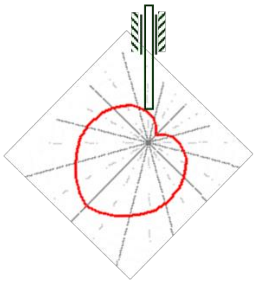

图 3.两条阿基米德螺线构成的凸轮

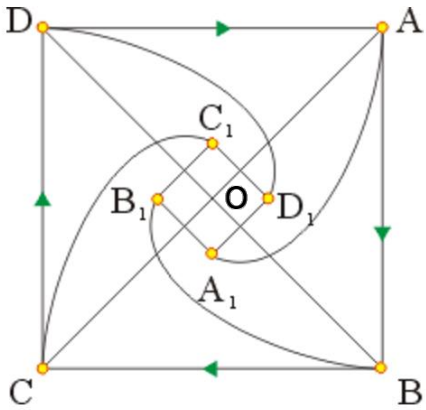

图 4.四个人相互追逐问题的轨迹

6. 描述 5 问题的运动轨迹叫做等角螺线（对数螺线）。其通式为$\boldsymbol{r} = ae^{b\theta}\boldsymbol{e_r}$

,其中 a,b 为参数，θ（矢径的角度）为 t 的函数。请计算在轨迹上任一点的速度矢量和位置矢量大小，并通过两者点乘的方式计算两者的夹角，验证此角度大小为 $\arccos\frac{b}{\sqrt{1+b^2}} = \arctan\frac{1}{b}$。

等角螺线是自然界最重要的螺线之一，常见例子包括向日葵的种子排布，鹦鹉螺的纹路，蜘蛛网的形状，以及银河系的悬臂形状（夹角为 12 度）。

更多关于各种重要的螺线的介绍，请参考链接：http://www.guokr.com/article/67148/。