物理原理 I 第二次作业

(Due: 10 月 27 日 23：59 online)

注意:此处以及许多书里为简便起见，使用斜体黑体符号代表矢量，这与斜体带上标箭头的矢量定义是等价的。

第一题 空间反演不变性

课上面我们已经通过空间平移不变性和时间反演不变性得出了两体相互作用需要有如下形式：

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} = F(x_1 - x_2)$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} = -F(x_1 - x_2)$$

进一步，如果我们考虑空间反演不变性，即取坐标对于中心反演$x \to -x$操作后物理规律的表述不变，证明$F(x)$为奇函数，即$F(-x) = -F(x)$.

第二题 在静电静磁场中带电粒子的三维运动

一个质量为 m，电荷为 q 的粒子在均匀电场 E=(0,E_y,0)和匀强磁场 B=(0,0,B_z)内受库仑力和洛伦兹力共同作用（忽略重力效果）。受合力为$(-e)(\boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B})$。其位置初始值为 r(0)=(0,0,0), 其速度初始值为$\dot{r}$(0)=(v_0,0,0).

试通过求解动力学方程$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$，也即$(-e)(\boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}) = m\ddot{\boldsymbol{r}}$来求解出此粒子的运动轨迹$\boldsymbol{r}(t)$。并做图描述此轨迹。（提示，使用分量形式解微分方程，先消去 x(t)的部分得到 y(t)的微分方程，通过试探解的方式解出 y(t)：y(t)的函数形式为一余弦函数）。

第三题 科里奥利力

考虑地球自转对自由落体的影响。从一座坐落在地球赤道上，高度为h的塔顶让一块质量为m的石头发生自由落体运动。其中h<<R, R为地球半径，$\boldsymbol{\omega}$为地球自转角速度。证明石头掉落在塔的偏东方向，偏移距离 S $\approx \frac{1}{3}\omega g T^3$，其中T $= \sqrt{\frac{2h}{g}}$。

第四题 求解做功

一个质点在三维力场$F = \alpha(2xy, x^2, 0)$运动，其中 α 为一个常数。

(1) 求当此质点从坐标系原点 O 移动到点 P(1,1,0)时，沿以下路径力场 F 所做的功：

(a) 从 O 点沿直线运动到(1,0,0)，再沿直线运动到 P 点。

(b) 从 O 点沿直线运动到(0,1,0)，再沿直线运动到 P 点。

(c) 从 O 点直接沿直线运动到 P 点。

这三个功大小是否一致?

(2) 用另一个三维力场$G=\alpha(x^2,2xy,0)$重复(1)的计算，并讨论两者的差别。

第五题 两个点质量的引力势能

一个质量为 m 的质点（记为 P）限制在 x 轴上运动，同时受到另两个分别位于(0,a)和(0,-a)，质量均为 M 的质点的引力作用。

(1) 求出在质点 P 上的合力，以及其势能 $E_p(x)$，画出势能与位置的函数关系图。

(2) 定性讨论在不同位置，具有不同初始速度的质点 P 的运动方式。

(3) 假设质点 P 在 x=5a/6 处由静止开始运动，求在接下来运动中它可能具有的最大速度。

第六题 高斯定理与引力场

一个位于坐标系原点，质量为M的质点，产生的重力场为$\mathcal{G}=-\frac{GM}{r^2}\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}}$，

(1) 试计算其在半径r的球面上的通量，说明其正比于M。

(2) 直接在$r\neq 0$处计算$\nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{G}}$。

(3) 根据高斯定理，要求(1)和(2)的体积分相同。这时候，对于$\nabla\cdot\boldsymbol{\mathcal{G}}$在$r=0$处的函数值提出了什么要求?

第七题 守恒量与运动积分

两个质点质量均为 m，由轻质，不可伸长的绳相连，绳长为 s。其中一个质点在光滑无摩擦桌面上运动，桌面上有一个小孔，通过小孔后绳子垂直向下，与另一个质点相连。如图 1 所示。

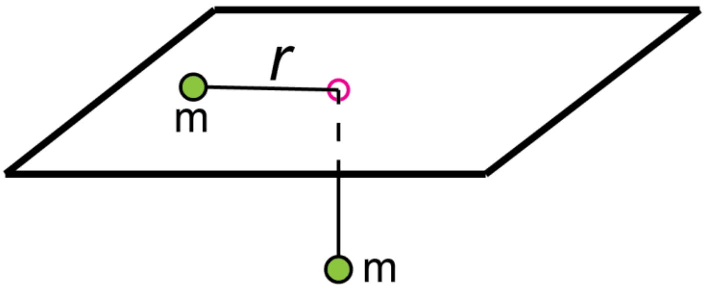

图 1. 相连的质点

(1) 利用守恒定律（角动量和能量）证明如下等式

$$\dot{r}^2 = A - B/r^2 - gr$$

其中 r(t)是桌面上的质点到孔的距离，A,B 为两个常数, g 是重力加速度。现在我们给定初始条件(t=0 时桌面质点到孔的距离为 s/2，桌面质点以速度 v_0 与绳垂直运动)，请写出 A 和 B 的表达式。说明桌上质点做圆周运动的条件是$\frac{v_0^2}{gs} = \frac{1}{2}$。

(2)试从动力学方程$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$出发，推导出(1)中的表达式，包括 A,B。（提示：使用极坐标系，对动力学方程凑全微分后积分。）此题的物理意义是守恒量是动力学方程的一次积分，因此找到守恒量能够大大简化动力学问题。

第八题：火箭发射（变质量问题）

1. 两个质点（质量分别为m和δm，$\delta m \ll m$）粘在一起以速度v在某惯性系中运动。某个时刻两质点由于内部相互作用分开，相对运动速度为V。此时质量m速度变为$v + \delta v$。证明，如果小质量质点向v的反方向运动，则有

$$m\delta v = V\delta m$$

如果小质量质点依旧沿着v的同方向运动，上述式子是否仍然成立？

2. 现在我们讨论火箭。火箭在飞行时燃烧燃料，相对箭体的喷气速度为V。质量为$m(t)$。证明火箭的加速度满足：$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{V}{m}\frac{dm}{dt}$。说明与(1)相比负号的来源。写出在恒定引力场下火箭加速度的表达式。

3. 求解一个简单的情形。火箭初始质量为 M，其中一半为燃料。在 t=0 时垂直向上发射，燃料单位时间消耗 α （α>0）,燃烧后以相对火箭速度 V 喷出。证明火箭向上速度 v 满足微分方程

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{\alpha V}{M - \alpha t}$$

，并写出火箭能起飞的条件。求出燃料消耗完时火箭的末速度和火箭飞到的最高点。

（积分公式 $\int \ln x \, dx = x \ln x - x.$）

第九题 对称性自发破缺

考虑一个质量为 1 的质点在一维力场中运动，其势能曲线为$E_p(\mathrm{x}) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2$，其中 a 为参数。

(1) 用数值模拟的方法，对如下初始位置和速度计算在 a=200 时 x(t)（位置）与 v(t)（速度）（由于积累误差效果，建议选择较小的 Δt 间隔，比如 0.0001s）。并挑选其中几个做 x(t)-t 和 v(t)-t 的图，描述所看到的运动是否符合你对势能曲线的理解。

x(0)=-15, v(0)=100; x(0)=-10, v(0)=100; x(0)=-5, v(0)=100; x(0)=0, v(0)=100; x(0)=5, v(0)=100; x(0)=10, v(0)=100; x(0)=15, v(0)=100;

x(0)=-15, v(0)=300; x(0)=-10, v(0)=300; x(0)=-5, v(0)=300; x(0)=0, v(0)=100; x(0)=5, v(0)=300; x(0)=10, v(0)=300; x(0)=15, v(0)=300;

对**每一组参数**，画一条 x(t)-v(t)的参数曲线，将所有曲线画在一张图上（用 Matlab hold on 命令），得到的这一族曲线叫做这个微分方程的**相图**（可以增加更多的初始条件，画更多的曲线使得相图更完整）。简单介绍这张图的物理意义。

(2) 现在将参数变为 a=-200, 重复(1)中的工作，请问，现在的势能曲线下，得到的这些 x(t)和(1)中有哪些明显的不同。相图的形状又有了哪些明显的不同。

(1)和(2)中，由于参数调节导致的运动对称性发生的变化叫做**对称性自发破缺**，伴随着这个变化，(1)和(2)相图发生了**相变**，此处是一个分叉(bifurcation).