

物理原理 I 第四次作业

(Due: 12 月 10 日 23: 59 online)

注意:此处以及许多书里为简便起见,使用斜体黑体符号代表矢量,这与斜体带上标箭头的矢量定义是等价的。

第一题 机械波练习题

1. 两个同方向,同频率的简谐振动,其合振动的振幅为 20cm ,与第一个振动的位相差为 $\frac{\pi}{6}$ 。若第一个振动的振幅为 $10\sqrt{3}\text{cm}$ 。则 (1) 第二个振动的振幅为多少? (2) 两简谐振动的位相差为多少?

2. 弦线上的驻波波动方程为: $y = A \cos(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\pi}{2}) \cos \omega t$. 设弦线的质量线密度为 ρ 。

(1) 分别指出振动势能和动能总是为零的各点位置。(2) 分别计算 $0 \rightarrow \frac{\lambda}{2}$ 半个波段内的振动势能、动能和总能量。

3. S_1 与 S_2 为左、右两个振幅相等相干平面简谐波源,它们的间距为 $d = 5\lambda/4$, S_2 质点的振动比 S_1 超前 $\pi/2$. 设 S_1 的振动方程为 $y_{10} = A \cos \frac{2\pi}{T}t$, 且媒质无吸收, (1) 写出 S_1 与 S_2 之间的合成波动方程; (2) 分别写出 S_1 与 S_2 左、右侧的合成波动方程。

第二题 相对论练习题

(1) 从加速器中以速度 $v = 0.8c$ 飞出的离子在它的运动方向上又发射出光子。求这光子相对于加速器的速度。

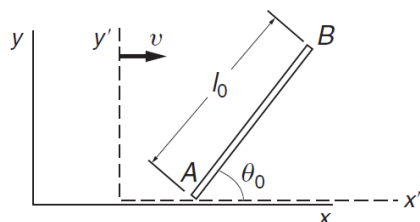
(2) 两个宇宙飞船相对于恒星参考系以 $0.8c$ 的速度沿相反方向飞行,求两飞船的相对速度。

(3) 从 S 系观察到有一粒子在 $t_1 = 0$ 时由 $x_1 = 100\text{m}$ 处以速度 $v = 0.98c$ 沿 x 方向运动, 10s 后到达 x_2 点,如在 S' 系(相对 S 系以速度 $u = 0.96c$ 沿 x 方向运动)观察,粒子出发和到达的时空坐标 t'_1, x'_1, t'_2, x'_2 各为多少? ($t = t' = 0$ 时, S' 与 S 的原点重合),并算出粒子相对 S' 系的速度。

(4) 一飞船静长 l_0 以速度 u 相对于恒星系作匀速直线飞行,飞船内一小球从尾部运动到头部,宇航员测得小球运动速度为 v , 试算出恒星系观察者测得小球的运动时间。

(5) 一个电子从静止开始加速到 $0.1c$, 需对它做多少功? 若速度从 $0.9c$ 增加到 $0.99c$ 又要做多少功?

(6) 如图所示，一根长为 l_0 的木棒在 s' 中保持静止，与 x' 轴成 θ_0 角。 s' 系相对于 s 系以 v 速度向 x 轴正向运动。求在 s 系中测得的木棒长度和倾斜角。



第三题 相对论加速度变换

假设 s' 相对于 s 系向 x 轴正方向以速度 u 运动。一个质点在 s 系中从静止开始以加速度 a_0 向 x 轴正方向加速运动。求它在 s' 中的加速度表示形式。

第四题 迈克尔逊-莫雷实验

迈克尔逊-莫雷实验证实了光速不因地球的高速运动而变化，由此爱因斯坦推广到所有惯性系中光速不变。并把它作为狭义相对论的两大基本原理之一。光速不变性已经被许多实验证实。

课堂上在跟随干涉仪一起运动的参考系里进行了分析（当时是假设光速会因地球相对“以太”的运动而变化）。如果接受了光速不变的结论，并从“以太”坐标系 S （干涉仪相对“以太”坐标系的运动速度为 u ，换句话说，“以太”坐标系就是太阳静止的坐标系）来分析这个实验，可以推导出“运动的尺缩短”和“运动的钟变慢”这样的结论。下面我们来看如何推导。

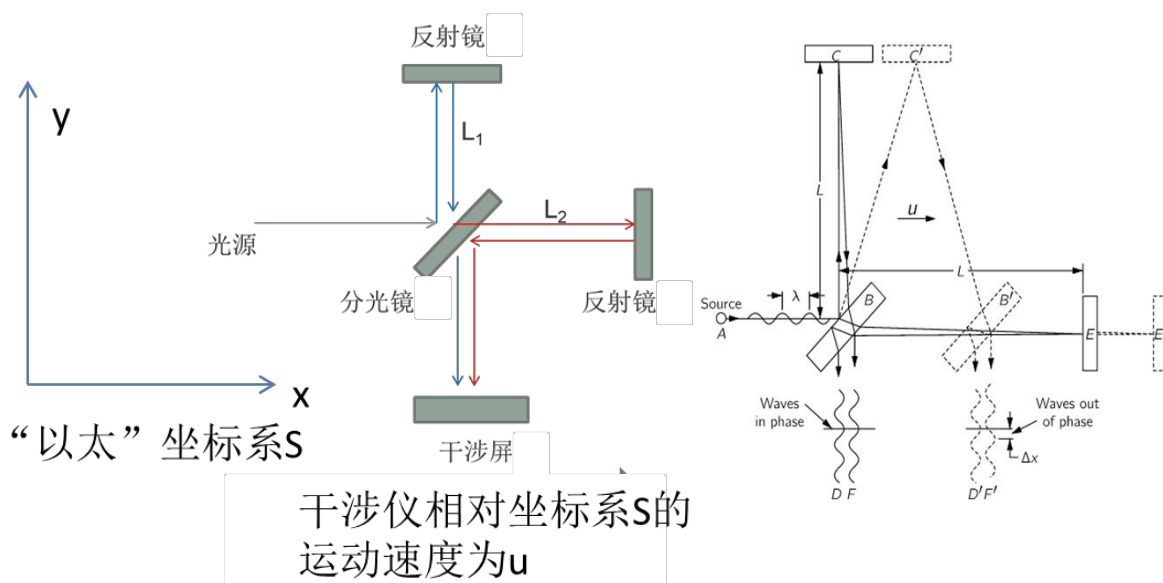


图 迈克尔逊-莫雷实验装置示意图

如图所示，光经过分光镜 B 之后，投射向反射镜 C 和 E。在坐标系 S 中的观察者看来，分光镜 B、反射镜 C 和 E 都在向右运动，因此光从分光镜到反射镜所走过的路程并不简单地等于干涉仪的臂长。比如，光从分光镜到反射镜 C 的路程等于 $ct = \sqrt{L^2 + ut^2}$ ，由此可以求出光从分光镜 B 到被反射镜 C 反射的时间。

- (1) 请求出在坐标系 S 中的观察者看来，光从分光镜 B 运动到反射镜 C 并回到分光镜 B 所需要的时间。以及光从分光镜 B 运动到反射镜 E 并回到分光镜 B 所需要的时间；
- (2) 要使得这两个时间相等（实验测量的确相等，因为干涉条纹不随着旋转干涉仪而发生移动）就必须引入“尺缩效应”，即在坐标系 S 看来，运动的干涉仪的 BE 臂长必须缩短，请证明这一结论；
- (3) 使用洛伦兹变换，重新计算在坐标系 S 中看见的光从分光镜 B 运动到反射镜 C 并回到分光镜 B 所需要的时间，以及光从分光镜 B 运动到反射镜 E 并回到分光镜 B 所需要的时间，并说明这两个时间相等。
- (4) 试证明在相对论的假定下找不到这样一个坐标系，在这个坐标系中观测光到达反射镜 C 或者 E 的事件，发生在光从分光镜 B 发出之前。此结论证明了相对论不改变事件的因果性。

第五题 双生子佯谬及时空图

注：此题的相关讨论和示范解答可以参见赵凯华《新概念物理教程-力学》中的例题

在 2030 年新年的第一天，一位宇航员(A)从地球出发，以 $0.8c$ 的速度向半人马座 α 星（在地球参考系中测量距离地球约 4 光年）航行。抵达后立即折返地球，并于 2040 年第一天（地球时间）回到地球。与此同时，A 有一个双胞胎兄弟 B，在整个期间停留在地球上，两人约定在 A 宇宙航行期间，在每年的第一天互相发送无线电波（微信红包）庆祝新年。

- (1) 证明整个旅程中，A 只送出了 6 次微信红包（包括旅途最后一天的那次），而 B 则送出了 10 次。
- (2) 在地球参考系的时空图中画出 A 星际航行的时空图和世界线，以及 B 发送的微信红包的世界线。通过此时空图说明 A 在抵达半人马座 α 星途中只收到 1 个微信红包，而剩下的 9 个则在归途中收到。
- (3) 在地球参考系的时空图中画出 A 星际航行的时空图和世界线，以及 A 发送的微信红包的世界线。通过此时空图说明 B 在地球时间的前 9 年中，每 3 年收到一个微信红包，而在最后一年收到了剩下的 3 个。

第六题 相对论性的动量和能量

- (1) 考虑相对论性的一维完全非弹性碰撞。实验室参考系中某一物体静止质量为 m_0 ，初速为 v_0 ，撞上了另一静止质量为 m_0 ，初速为 0 的物体。之后两者合为一体运动，复合物体静止质量为 m_1 ，速度为 v_1 。试解出 v_1/v_0 ，以及 m_1/m_0 与 v_0/c (c 为光速) 之间的关

$$\sqrt{2 \frac{1 - \beta^2 + \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta^2}}$$

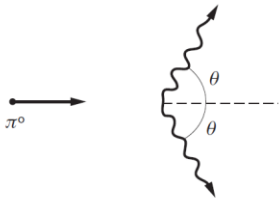
系，并作图。以图来说明 $v_0 \ll c$ 以及 $v_0 \approx c$ 时的极限情况。静止质量的增加说明了什么？



图: 相对论性的一维非弹性碰撞

(2) 反过来我们也可以证明: 粒子分裂时其静质量总和必然减少。请对初始粒子分裂成两个相同部分的特殊情况做出证明。

(3) 利用能动能守恒，求解以下 π^0 介子衰变问题: π^0 介子静能为 135MeV ($1\text{eV}=1.6 \times 10^{-19}\text{J}$)，一个高速运动的 π^0 介子衰变成两个光子，在实验室参考系下每个光子能量为 100MeV 。试求出 π^0 介子的速度 v (以 v/c 形式表达) 以及实验室参考系下光子与衰变前 π^0 介子运动方向夹角 θ 。



$$\frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2E_{\gamma 0}$$