物理原理 I 第三次作业

(Due: 11 月 14 日 23：59 online)

注意:此处以及许多书里为简便起见，使用斜体黑体符号代表矢量，这与斜体带上标箭头的矢量定义是等价的。

第一题 二维弹性碰撞

考虑两个粒子在二维平面内做完全弹性碰撞。

(1) 证明在质心系中观察的完全弹性碰撞，每个粒子碰撞前后其速度**大小**不变。

(2) 假设粒子 P1 以速度 $\boldsymbol{u_1}$ 与处于静止状态的粒子 P2 发生完全弹性碰撞（P1,P2 质量相同），碰撞后速度分别变成了 $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$. 在实验室参考系下进行计算，并证明如下结论

i. $\boldsymbol{v_1}\cdot\boldsymbol{v_2}=0$; 因此碰撞后或者 P1 保持静止，或者 P1, P2 速度相互垂直。

ii.对于 P1, P2 速度相互垂直的情况，证明 $\boldsymbol{u_1}\cdot\boldsymbol{v_1}>0$。由此推断出 P1 被 P2 散射后角度偏转小于 90 度。

(3) 在质心参考系重复(2)的讨论，是否能够用几何方法得到更加容易的证法?

(4) 重复(2)的情形，现在 P1 的质量是 P2 的 4 倍，证明在实验室参考系，P1 被 P2 散射后的角度偏转小于 14.5 度。

第二题 Bertrand 定理和轨道进动

Bertrand 定理阐明，只有两种有心力场可以给出闭合轨道（即物体从某位置移动，经过一段路径能够回到原先的位置）：

i. 线性回复力（如同弹簧振子那样），力与位移关系$\boldsymbol{F}=-k\boldsymbol{r}$.

ii. 平方反比有心力（如同万有引力那样），力与位移关系$\boldsymbol{F}=-\frac{k}{r^2}\boldsymbol{e_r}$.

(1) 证明，物体在线性回复力作用下形成的闭合轨道为椭圆（提示，写出直角坐标系下两分量满足的运动方程，并求解，注意直线也为椭圆一种特殊情形）。

(2)使用数值解法，画出如下几组初始参数开始在平方反比有心力$\boldsymbol{F}=-\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e_r}$下物体运行的轨道（设物体质量为 1）：

(a) x(0)=1, x’(0)=0, y(0)=0, y’(0)=1.

(b) x(0)=2, x’(0)=0, y(0)=0, y’(0)=0.5.

(c) x(0)=0.8, x’(0)=0, y(0)=0, y’(0)=1.25.

(d) x(0)=0.5, x’(0)=0, y(0)=0, y’(0)=2.

(e) x(0)=0.2, x’(0)=0, y(0)=0, y’(0)=5.

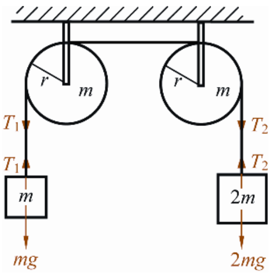
并进一步讨论这些轨道的特点 (提示，圆锥曲线能够分类成为椭圆，圆，抛物线，双曲线这几种，上述轨道分别对应着其中一种)。

(3) 平方反比有心力下的轨道可以严格解出来（课上已有介绍）。一个定性的讨论方法是所谓的有效势的概念（课上已有讨论）。画出(1)和(2)中对应的$U_{eff}(r)$，证明(1)中运动必定为束缚态而(2)中运动可能为非束缚态。通过数值计算(2)中总能量的大小，结合$U_{eff}(r)$的图示，说明(2)中 5 条轨道的特征。

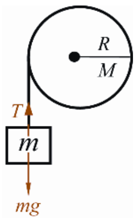
(4) 现在将有心力形式改成$\boldsymbol{F}=-\frac{1}{r^{2.1}}\boldsymbol{e_r}$，对于(2)中的闭合轨道重复数值计算，现在的轨道变成了什么样？此现象叫做轨道进动，经常是由于别的行星的引力影响造成（体现为势能的微扰项）。而对于水星的轨道进动的研究，是广义相对论的直接实验证明。

第三题：刚体转动练习题

1. 如图，一轻绳跨过两个质量为m、半径为r的均匀圆盘状定滑轮，绳的两端分别挂着质量为$2m$和m的重物，绳与滑轮间无相对滑动，滑轮轴光滑，两个定滑轮的转动惯量均为$mr^2/2$，将由两个定滑轮以及质量为$2m$和m的重物组成的系统从静止释放，求重物的加速度和两滑轮之间绳内的张力。

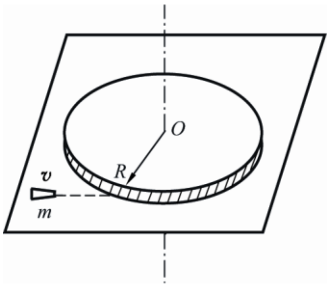


2. 如图所示，一个质量为m的物体与绕在定滑轮上的绳子相联，绳子的质量可以忽略，它与定滑轮之间无滑动。假设定滑轮质量为M、半径为R,其转动惯量为$MR^2/2$，试求该物体由静止开始下落的过程中，下落速度与时间的关系。



3.一质量均匀分布的圆盘，质量为M，半径为R，放在一粗糙水平面上(圆盘与水平面之间的摩擦系数为μ)，圆盘可绕通过其中心O的竖直固定光滑轴转动。开始时，圆盘静止，一质量为m的子弹以水平速度v垂直于圆盘半径打入圆盘边缘并嵌在盘边上，求：(1)子弹击中圆盘后，盘所获得的角速度；(2)经过多少时间后，圆盘停止转动。(圆

盘绕通过O的竖直轴的转动惯量为$\frac{1}{2}MR^2$，忽略子弹重力造成的摩擦阻力矩。)



4. 计算质量为m半径为R的均质球体绕其轴线的转动惯量，计算质量m半径为R的薄球壳绕其轴线的转动惯量。假设两者同时从一个长度为 L，与平面倾角为 θ 的斜面只滚不滑的滚下来，求两者的最终速度以及这两个速度的大小。（提示：将圆球/球壳划分成许多个有一定厚度的圆盘/圆环）。

第四题：角动量守恒

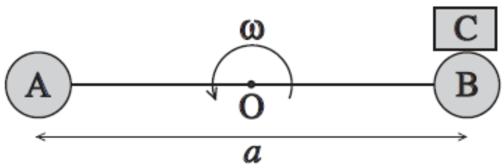
装置如图 1 所示。物体 A 和 B 质量均为 M, 固定在质量可忽略的长度为 a 的刚性杆两端。初始状态杆的中心 O 点速度为 0, A 和 B 以角速度 **ω** 逆时针绕 O 点转动（**ω** 垂直于杆的方向）。由于转动，B 立刻撞上了一个质量为 2M 的物体 C（C 初始状态速度为 0）, 两者粘在一起共同运动。A,B,C 的尺寸均可以忽略。

(1) 求出相撞前后的总角动量，并以此求出相撞后三个物体的角速度。

(2) 求解相撞前后的三个物体的总动能。

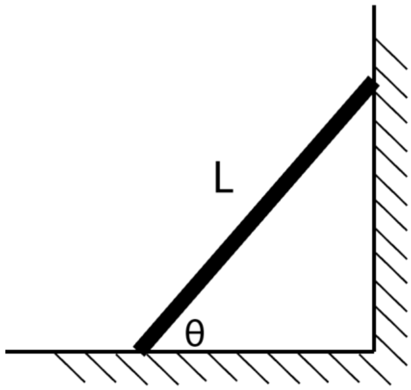
(3) 假设碰撞为完全弹性碰撞，(1)的结果该如何变化?

(4) 说明在质心参考系和实验室惯性参考系中解问题（1-2），能够得到一致的结果。



第五题：光滑杆的自由滑落

如图所示，一根长度为 L，质量为 M 的光滑刚性杆，一端沿着墙面，一端贴着地面从竖直状态滑落，在下落某一时刻设杆与地面成的角度为 θ，所有摩擦均可忽略。

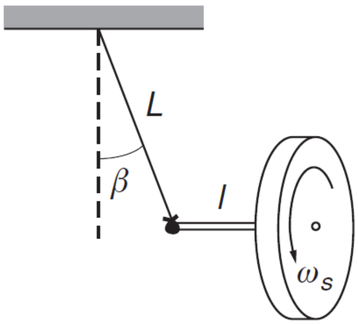


（1）在杆两端点均不离开墙面或地面的假设下，根据能量守恒求出杆转动的角速度，并建立关于 θ 的一阶微分方程。

（2）写出杆的质心在角度为 θ 时的速度，并讨论在什么角度杆靠墙面端与墙面脱离接触。

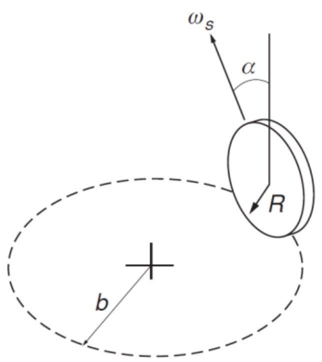
第六题：悬垂陀螺仪

如下图所示一个陀螺仪绕中心固定轴转动，轴为可忽略质量刚性杆，长度为 l。杆另一端通过长度为 L 的细线悬垂。此陀螺仪质量为 M，绕中心固定轴转动惯量为 I_0。在陀螺仪转速为 ω_s 时，此陀螺仪绕过细线悬挂点的垂线开始在水平面内匀速进动。求出此时细线与垂线的夹角 β（求解时可以使用 β 的小角近似）。



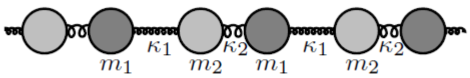
第七题 滚动的硬币

一个半径为 R，质量 M 的硬币在水平桌面上以速度 V 滚动。如果硬币垂直，硬币滚动轨迹为实线，如果硬币倾斜，硬币滚动轨迹则为半径为 b 的圆。请找出硬币的倾斜角 α 的表达式。（硬币质心与硬币-桌面接触点的轨迹半径差异可以忽略）



第八题 原子链

现实中的原子链可能有多种原子构成，为此考虑如下原子链。每个重复单元含有两种原子，质量分别为 m_1, m_2, 劲度系数分别为 k_1,k_2。简单起见，此处考虑 $k_1=k_2$.



类似课堂上的做法，建立微分方程，解出 ω 与 k 之间的色散关系并做图。此处应出现一个 k 对应两个 ω 的函数形式，这两种振动模式（简振模）分别称作光学声子和声学声子。对于同样的波数 k，光学声子能量较高，对一般的材料需要与光的耦合才能够激发。

第九题 群速度

按照第一次作业中的做法，我们可以从平面波 cos(kx)，通过一组具有不确定度的 k 构造出波包。与此类似，在空间中传递的平面波 cos(kx-wt)也能够构造波包，并且讨论波包随着时间的传播。此时我们要注意，由于 k 有不确定度，w 也有相应的不确定度，w 与 k 的关系称为色散关系。

(1) 色散关系为 w=2k（线性色散），我们取 k 的不确定度为 Δk=0.02。在 k=2 附近取一组 k 值覆盖[k-Δk,k+Δk]。求出 t=0, t=500, t=1000 时候的空间分布波形。是否看见了波包的传播？对比几张图，找出波包的传播速度。

(2) 色散关系为 $w=k^3$ (非线性色散)，与(1)一样，再次求出 t=0, t=500, t=1000 时候的空间分布波形。波包的传播与(1)相比有什么不同？对比几张图找出波包的传播速度，证明其等于$\frac{d\omega}{dk}|_{k=2}$，而不是$\frac{\omega}{k}|_{k=2}$。

波包描述了一个脉冲，波包的运动速度直接描述了能量传播的速度，因此即为课上讨论的群速度(Group velocity)，与单个平面波传递的相速度是有差别的。题(2)中描述的是有非线性色散关系时，波包的“弥散”现象。