PHYS1106 物理原理I第三次作□

董建宇

TOTAL POINTS

83 / 106

QUESTION 1

1 第一□ 12 / 12

✓ **- 0 pts** *Correct*

- **- 2 pts** 几何或瑕疵□程看不懂
- **- 1 pts** 有些乱□程看不懂
- **- 3 pts** 少□
- **- 4 pts** □程不□
- **- 11 pts** 辛苦分
- **- 12 pts** □呢

QUESTION 2

2 第二□ 10 / 12

- **- 0 pts** Correct
- **- 3 pts** 1
- **- 3 pts** 2
- **- 3 pts** 3
- **- 3 pts** 4

✓ **- 2 pts** *Click here to replace this description.*

- **- 1 pts** Click here to replace this description.
- **- 6 pts** 太乱了
- **- 11 pts** 超□

QUESTION 3

3 第三□ 19 / 20

- **- 0 pts** Correct
- **- 2 pts** the resaul is wrong
- **- 5 pts** the result is wrong或者少提
- **- 9 pts** □□略多
- **- 3 pts** Click here to replace this description.
- **- 7 pts** □□略多

✓ **- 1 pts** **□□果或不按要求上□作□**

- **- 10 pts** 辛苦分或□程分
- **- 4 pts** Click here to replace this description.
- **- 16 pts** 找不到□
- **- 7 pts** Click here to replace this description.

QUESTION 4

4 第四□ 2 / 12

- **- 0 pts** Correct
- **- 2 pts** 小□
- **- 6 pts** □□略多
- **- 1 pts** Click here to replace this description.
- **- 8 pts** □太多
- **- 5 pts** □好
- **- 3 pts** 少□或□□

✓ **- 10 pts** **辛苦分**

- **- 0 pts** Click here to replace this description.
- **- 4 pts** Click here to replace this description.
- **- 12 pts** Click here to replace this description.
- **- 9 pts** Click here to replace this description.

QUESTION 5

5 第五□ 10 / 10

- **- 5 pts** Correct
- **- 4 pts** Click here to replace this description.

✓ **- 0 pts** *Click here to replace this description.*

- **- 8 pts** 辛苦分

- **3 pts** Click here to replace this description.
- **0 pts** Click here to replace this description.
- **6 pts** Click here to replace this description.
- **10 pts** □呢

QUESTION 6

6 第六□ **7 / 10**

- **0 pts** Correct
- **3 pts** 关系式
- **2 pts** □程
- ✓ **- 2 pts** 答案
- ✓ **- 1 pts** 受力分析□
- **2 pts** □程

QUESTION 7

7 第七□ **3 / 10**

- **0 pts** Correct
- **3 pts** 关系式
- ✓ **- 2 pts** □程
- ✓ **- 2 pts** 答案
- ✓ **- 1 pts** 受力分析□
- ✓ **- 2 pts** □程

QUESTION 8

8 第八□ **10 / 10**

- ✓ **- 0 pts** *Correct*
- **2 pts** 关系式
- **4 pts** □程
- **1 pts** 答案
- **3 pts** □
- **1 pts** □程
- **2 pts** □程

QUESTION 9

9 第九□ **10 / 10**

- ✓ **- 0 pts** *Correct*
- **2 pts** 分析不同
- **1 pts** Click here to replace this description.
- **2 pts** □算
- **2 pts** □
- **10 pts** Click here to replace this description.

1 第一□ **12 / 12**

✓ **- 0 pts** *Correct*

- 2 pts 几何或瑕疵□程看不懂

- 1 pts 有些乱□程看不懂

- 3 pts 少□

- 4 pts □程不□

- 11 pts 辛苦分

- 12 pts □呢

2 第二□ **10 / 12**

- **- 0 pts** Correct
- **- 3 pts** 1
- **- 3 pts** 2
- **- 3 pts** 3
- **- 3 pts** 4
- ✓ **- 2 pts** *Click here to replace this description.*
- **- 1 pts** Click here to replace this description.
- **- 6 pts** 太乱了
- **- 11 pts** 超□

3 第三□ **19 / 20**

- **- 0 pts** Correct
- **- 2 pts** the resaul is wrong
- **- 5 pts** the result is wrong或者少提
- **- 9 pts** □□略多
- **- 3 pts** Click here to replace this description.
- **- 7 pts** □□略多

✓ **- 1 pts □□果或不按要求上□作□**

- **- 10 pts** 辛苦分或□程分
- **- 4 pts** Click here to replace this description.
- **- 16 pts** 找不到□
- **- 7 pts** Click here to replace this description.

4 第四□ **2 / 12**

- **- 0 pts** Correct
- **- 2 pts** 小□
- **- 6 pts** □□略多
- **- 1 pts** Click here to replace this description.
- **- 8 pts** □太多
- **- 5 pts** □好
- **- 3 pts** 少□或□□

✓ **- 10 pts 辛苦分**

- **- 0 pts** Click here to replace this description.
- **- 4 pts** Click here to replace this description.
- **- 12 pts** Click here to replace this description.
- **- 9 pts** Click here to replace this description.

5 第五 **10 / 10**

- **- 5 pts** Correct
- **- 4 pts** Click here to replace this description.
- ✓ **- 0 pts** *Click here to replace this description.*
- **- 8 pts** 辛苦分
- **- 3 pts** Click here to replace this description.
- **- 0 pts** Click here to replace this description.
- **- 6 pts** Click here to replace this description.
- **- 10 pts** 呢

6 第六□ **7 / 10**

- **- 0 pts** Correct
- **- 3 pts** 关系式
- **- 2 pts** □程
- ✓ **- 2 pts** 答案
- ✓ **- 1 pts** 受力分析□
- **- 2 pts** □程

7 第七□ **3 / 10**

- **- 0 pts** Correct
- **- 3 pts** 关系式

✓ **- 2 pts** □程

✓ **- 2 pts** 答案

✓ **- 1 pts** 受力分析□

✓ **- 2 pts** □程

8 第八□ **10 / 10**

✓ **- 0 pts** *Correct*

- 2 pts 关系式

- 4 pts □程

- 1 pts 答案

- 3 pts □

- 1 pts □程

- 2 pts □程

9 第九□ **10 / 10**

✓ **- 0 pts** *Correct*

- 2 pts 分析不同

- 1 pts Click here to replace this description.

- 2 pts □算

- 2 pts □

- 10 pts Click here to replace this description.

题 二维弹性碰撞.

(1). 证明：设两粒子质量为 m_1, m_2 速度分别为 $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ 则质心速度 $\vec{v}_c = \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$

由于粒子发生弹性碰撞 以质心为参考系

$$m_1(\vec{v}_1-\vec{v}_c) + m_2(\vec{v}_2-\vec{v}_c) = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \quad (\text{动量守恒})$$

$$\frac{1}{2}m_1(\vec{v}_1-\vec{v}_c)^2 + \frac{1}{2}m_2(\vec{v}_2-\vec{v}_c)^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2'^2 \quad (\text{动能守恒})$$

得 $$\vec{v}_1' = \frac{(m_1-m_2)(\vec{v}_1-\vec{v}_c) + 2m_2(\vec{v}_2-\vec{v}_c)}{m_1+m_2} \quad \vec{v}_2' = \frac{2m_1(\vec{v}_1-\vec{v}_c) + (m_2-m_1)(\vec{v}_2-\vec{v}_c)}{m_1+m_2}$$

$$|\vec{v}_1-\vec{v}_c| = \left|\vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}\right| = \left|\frac{m_2(\vec{v}_1-\vec{v}_2)}{m_1+m_2}\right| \quad |\vec{v}_2-\vec{v}_c| = \left|\vec{v}_2 - \frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}\right| = \left|\frac{m_1(\vec{v}_2-\vec{v}_1)}{m_1+m_2}\right|$$

$$|\vec{v}_1'| = \left|\frac{(m_1-m_2)\cdot\frac{m_2(\vec{v}_1-\vec{v}_2)}{m_1+m_2} + 2m_2\cdot\frac{m_1(\vec{v}_2-\vec{v}_1)}{m_1+m_2}}{m_1+m_2}\right| = \left|-\frac{m_2(\vec{v}_1-\vec{v}_2)}{m_1+m_2}\right| = |\vec{v}_1-\vec{v}_c|$$

$$|\vec{v}_2'| = \left|\frac{2m_1\cdot\frac{m_2(\vec{v}_1-\vec{v}_2)}{m_1+m_2} + (m_2-m_1)\frac{m_1(\vec{v}_2-\vec{v}_1)}{m_1+m_2}}{m_1+m_2}\right| = \left|-\frac{m_1(\vec{v}_2-\vec{v}_1)}{m_1+m_2}\right| = |\vec{v}_2-\vec{v}_c|$$

即在质心系中观察完全弹性碰撞，每个粒子碰撞前后速度大小不变。

(2). 证明：(i) 动量守恒得 $m\vec{u}_1 = \cancel{m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2}\ m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$ ①

能量守恒得 $\frac{1}{2}m\vec{u}_1^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}_2^2$ ②

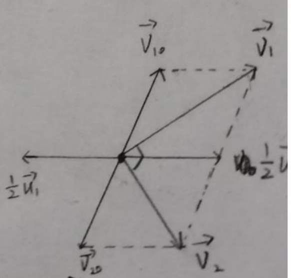
即 $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ 　 $\vec{u}_1^2 = (\vec{v}_1+\vec{v}_2)^2 = \vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 + 2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = \vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2$

即 $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = 0$ 因此碰后 P1 保持静止或 $P_1 P_2$ 速度互相垂直.

(ii) ~~联立①②两式解得~~ 由①式可知 $\vec{v}_2 = \vec{u}_1 - \vec{v}_1$ ③ 代入②可知

$$\vec{u}_1^2 = \vec{v}_1^2 + (\vec{u}_1-\vec{v}_1)^2 = \vec{u}_1^2 + 2\vec{v}_1^2 - 2\vec{u}_1\cdot\vec{v}_1$$

即 $\vec{u}_1\cdot\vec{v}_1 = \vec{v}_1^2 > 0$ 即 P_1 被 P_2 散射后角度偏转小于 90 度



$\vec{v}_c = \dfrac{m\vec{u}_1}{m+m} = \frac{1}{2}\vec{u}_1$ 由于质心系中系统的合动量为 $\vec{0}$

即碰后 P_1, P_2 速度变为 $\vec{V}_{10}$, $\vec{V}_{20}$ 满足 $\vec{V}_{10} = -\vec{V}_{20}$

由能量守恒 $\frac{1}{2}m\cdot(\frac{1}{2}\vec{u}_1)^2 + \frac{1}{2}m(-\frac{1}{2}\vec{u}_1)^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}_{10}^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}_{20}^2$ 得 $|\vec{v}_{10}| = |\vec{v}_{20}| = |\frac{1}{2}\vec{u}_1|$

$\vec{V}_1 = (\vec{V}_{10} + \frac{1}{2}\vec{u}_1)$ 　 $\vec{V}_2 = (\vec{V}_{20} + \frac{1}{2}\vec{u}_1)$ 　 $\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2 = (\vec{V}_{10}+\frac{1}{2}\vec{u}_1)\cdot(\vec{V}_{20}+\frac{1}{2}\vec{u}_1) = (\vec{V}_{10}+\frac{1}{2}\vec{u}_1)\cdot(-\vec{V}_{10}+\frac{1}{2}\vec{u}_1) = 0$

因此碰后 P_1 静止 或 P_1 P_2 速度相互垂直.

(4).

动量守恒 $4m\vec{u}_1 = 4m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$

动能守恒 $\frac{1}{2}\cdot 4m\vec{u}_1^2 = \frac{1}{2}4m\vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}_2^2$

解得 $5\vec{v}_1^2 - 8\vec{v}_1\cdot\vec{u}_1 + 3\vec{u}_1^2 = 0$ 即 $\cancel{(\vec{v}_1-\frac{3}{5}\vec{u}_1)\cdot(\vec{v}_1-\vec{u}_1)=0}$ $\cos(\vec{v}_1,\vec{u}_1) = \frac{1}{8}\cdot(5\frac{|\vec{v}_1|}{|\vec{u}_1|} + 3\frac{|\vec{u}_1|}{|\vec{v}_1|})$

当散射角度最大时 $\cos\langle\vec{v}_1,\vec{u}_1\rangle$ 最小 令 $t=\frac{|\vec{v}_1|}{|\vec{u}_1|}$ $f(t)=\frac{1}{8}(5t+\frac{3}{t}) \geq \frac{1}{8}\cdot 2\sqrt{15} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ 当且仅当 $t=\frac{\sqrt{15}}{5}$ 时等号成

$\arccos\frac{\sqrt{15}}{4} \approx 14.48°$ 所 P_1 被 P_2 散射的角度为小于 $14.5°$

第二题:

(1) 证明: 由牛顿第二定律 $m\ddot{x} = -kx$

$m\ddot{y} = -ky$

解得 ~~x=Acos~~ $x = x_0\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi)$ x_0 为 x 方向上最大位移的大小.

$y = y_0(\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi)$ y_0 为 y 方向上最大位移的大小.

由 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 可知 $\frac{x^2}{x_0^2}+\frac{y^2}{y_0^2}=1$ $(x_0,y_0\neq 0)$ 即闭合轨道为椭圆.

若 $x_0=0$, $y_0>0$ 则轨迹为 ~~y~~ 一条在 y 轴上 从 $-y_0$ 到 y_0 的一条直线.

若 $y_0=0$, $x_0>0$ 则轨迹为 一条在 x 轴上 从 $-x_0$, 到 x_0 的一条直线.

若 $x_0=y_0=0$ 则轨迹为一个点 $(0,0)$

(2). 在平面直角坐标系中 $r^2=x^2+y^2$ $\vec{F} = -\frac{1}{x^2+y^2}\vec{e}_r$

$\vec{F}_x = -\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\cos\theta\cdot\vec{e}_r = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\vec{i}$ $\vec{F}_y = -\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\sin\theta\cdot\vec{j} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\vec{j}$

(a) 轨迹为以 $(0,0)$ 为圆心 1为半径的圆 $\cancel{E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}}$ $E_1=E_{k_1}+E_{p_1}=-\frac{1}{2}J<0$

(b). 轨迹为 ~~x~~ 椭圆, 焦点在 x 轴上 $E_2=E_{k_2}+E_{p_2}=-\frac{3}{8}J<0$

(c) 轨迹为焦点在 x 轴上的椭圆 $E_3=E_{k_3}+E_{p_3}=-\frac{15}{32}J<0$

(d) 轨迹为抛物线 $E_4=E_{k_4}+E_{p_4}=0J$

(e) 轨迹为双曲线 $E_5=E_{k_5}+E_{p_5}=7.5J>0$

这些轨道中运动角动量守恒.

(3) 在有心力场作用下, 角动量守恒 $l=\mu r^2\dot{\theta}$ (2)中 $l=1$

由牛顿第二定律 $\mu\cdot(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=f(r)$

$\mu(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})=0$

$\dot{\theta}=\frac{l}{\mu r^2}$

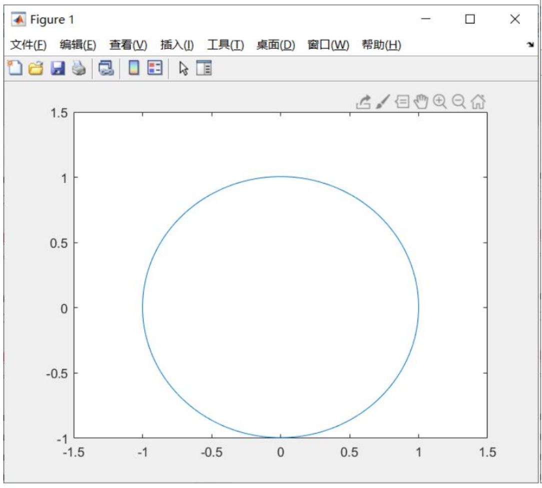
可严格求解出轨道 $r=r(\theta)$

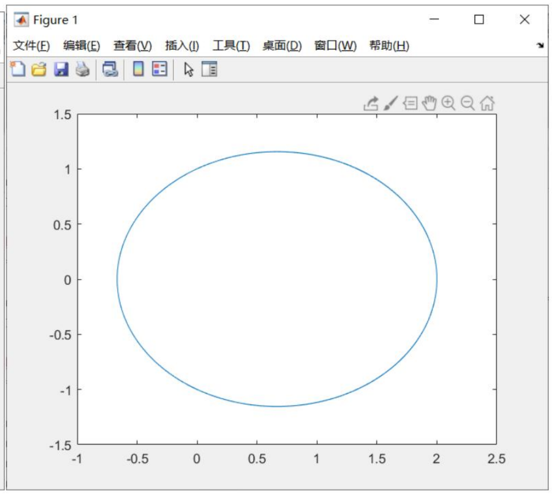
$E=\frac{1}{2}\mu v^2+U(r) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+U(r)$

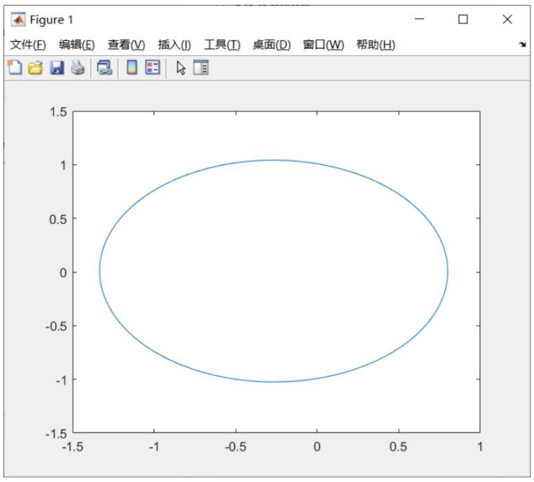
$=\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\frac{l^2}{2\mu r^2}+U(r)$

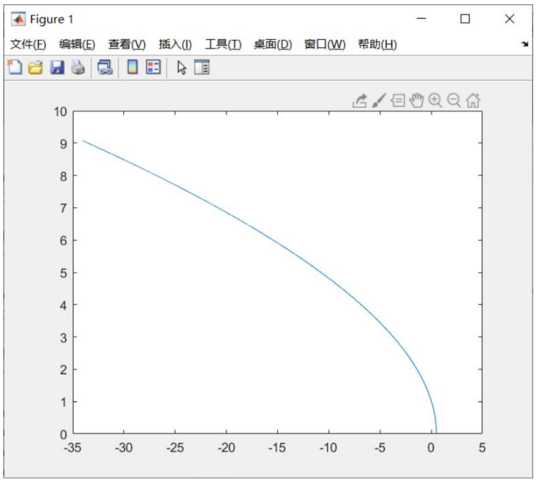
由于角动量 l 守恒 $\frac{l^2}{2\mu r^2}\propto r^{-2}$

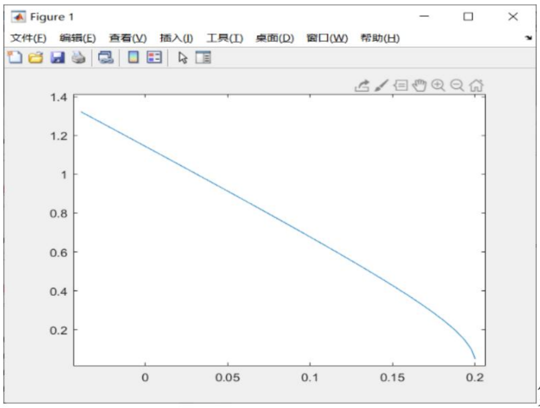
$U_{eff}=\frac{l^2}{2\mu r^2}+U(r)$ 可将二维问题转化为一维.



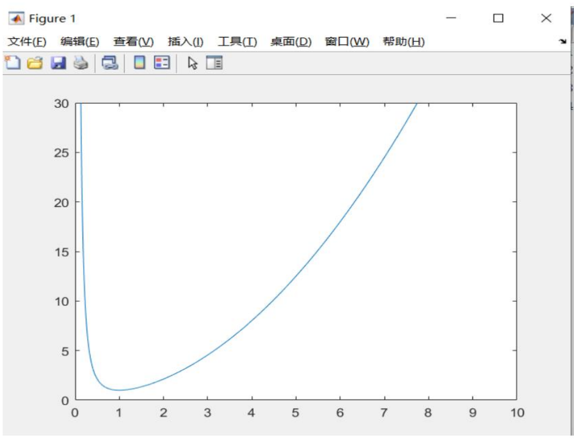


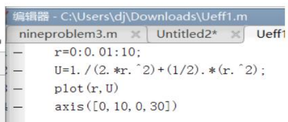






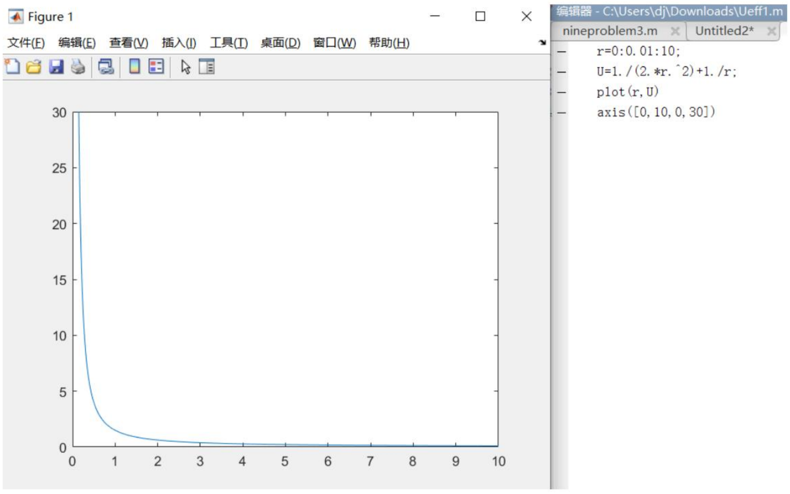
第二问分析见上面纸上！轨道能量在上面纸上！



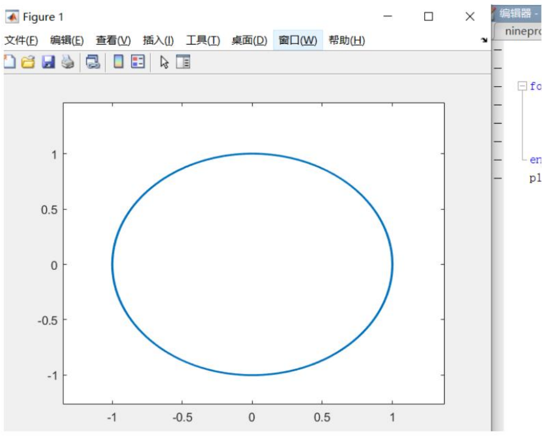


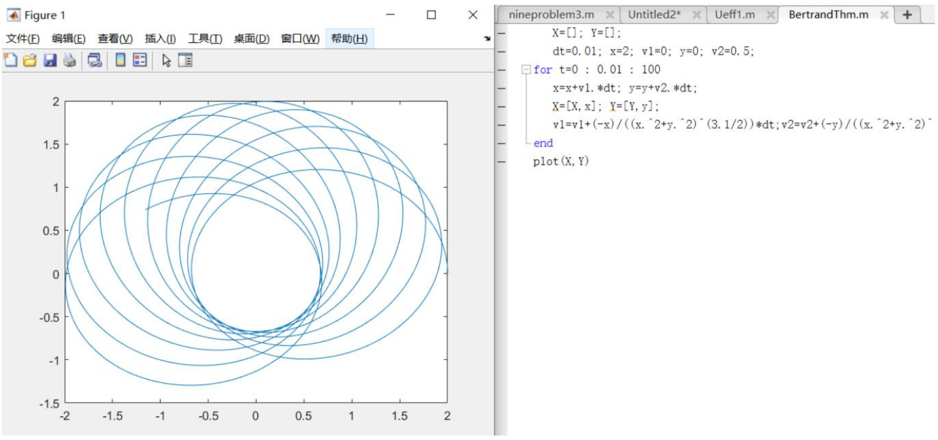
此图为线性回复力对应的有效势能与 r 的图线。其运动必定为束缚态。

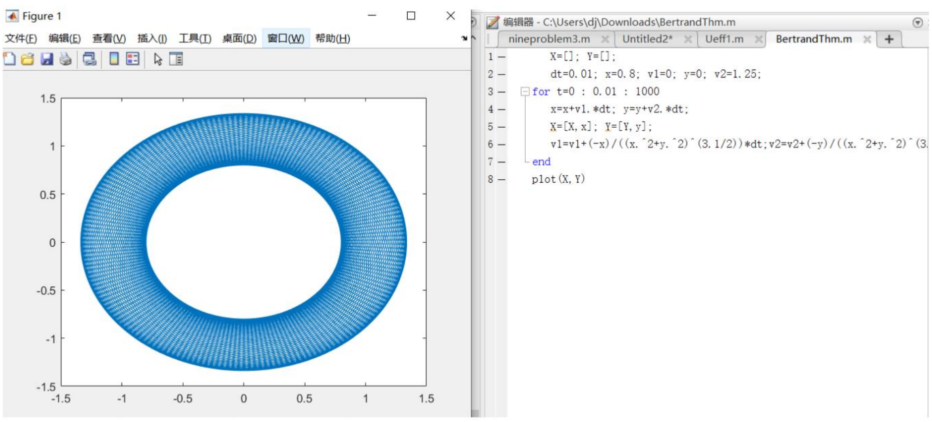
此图为平方反比有心力对应的有效势能与 r 的关系。其运动可能为束缚态（比如 圆周运动，椭圆运动）可能为



非束缚态(比如 抛物线,双曲线)。







第四小问：轨道如上图。存在进动现象。

第3题 刚体转动练习题

1. 设重物加速度大小为a，两滑轮之间张力大小为T_0

由于绳与滑轮无摩擦 $a=\beta\cdot r$ β为滑轮角加速度大小.

对左侧重物由牛顿第二定律 $T_1 - mg = ma$

对左侧定滑轮 ~~由牛顿第~~ $T_0 r - T_1 r = I\beta$ （其中$I=\frac{1}{2}mr^2$）

对右侧定滑轮 $T_2 r - T_0 r = I\beta$ （$I=\frac{1}{2}mr^2$）

对右侧重物 由牛顿第二定律得 $2mg - T_2 = 2ma$

联立上式解得 $a=\frac{1}{4}g$ $T_0=\frac{11}{8}mg$

即左侧重物加速度$\frac{1}{4}g$方向竖直向上，右侧重物加速度$\frac{1}{4}g$方向竖直向下.

两滑轮之间绳内张力 $\frac{11}{8}mg$ 方向沿绳方向.

2. 对物体由牛顿第二定律 $mg - T = ma$

对滑轮由刚体定轴转动 $T\cdot R = I\beta$

由于绳与滑轮无滑动得 $a=\beta\cdot R$

得 $a=\frac{2m}{M+2m}g$ $v=a\cdot t=\frac{2m}{M+2m}gt$ 即下落速度与时间关系为 $v=\frac{2m}{M+2m}gt$ 方向竖直向下.

3. 解 (1). 击中瞬间，系统角动量守恒（原因：在极短时间内有限大小的力冲量为0）

$$mvR = m\omega R^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega$$

得 $\omega=\dfrac{2mvR}{2mR^2+MR^2}$

(2) $df_r = \mu\, dm\cdot g$ 其中 $dm=\frac{M}{\pi R^2}\cdot 2\pi r\,dr = \frac{2M}{R^2}r\cdot dr$

$df_r = \frac{2\mu Mg}{R^2}r\,dr$ $\Phi=\int_0^r r\cdot df_r = \frac{2\mu Mg}{R^2}\int_0^R r^2 dr = \frac{2\mu Mg}{3R^2}\cdot R^3 = \frac{2}{3}\mu MgR$

~~$Mt = mvR$~~ $\Phi\cdot t = mvR$

得 $t=\dfrac{3mv}{2\mu Mg}$

4. 球体：$I_1 = 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}\pi\cdot(R\cos\theta)^2\cdot(R\cos\theta\cdot d\theta)\cdot(R\cos\theta)^2 = \frac{3m}{4}R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\, d\theta = \frac{3m}{4}R^2\cdot\frac{8}{15}=\frac{2}{5}mR^2$

球壳：$I_2 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{m}{4\pi R^2}\cdot 2\pi(R\cos\theta)\cdot(R\,d\theta)\cdot(R\cos\theta)^2 = mR^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\, d\theta = \frac{2}{3}mR^2$

球体 由动能定理 $mgL\sin\theta = \frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}I_1\omega_1^2$ 由只滚不滑 $v_1=\omega R$

得 $v_1=\sqrt{\frac{10}{7}gL\sin\theta}$ 方向沿斜面向下

球壳. 由动能定理 $mgL\sin\theta = \frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2^2$ 由只滚不滑 $v_2=\omega R$

得 $v_2=\sqrt{\frac{6}{5}gL\sin\theta}$ 方向沿斜面向下.

第四题　角动量守恒

解 (1). $L_0 = M\omega\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} + M\omega\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} = \frac{1}{2}M\omega a^2$

由角动量守恒 $L_0 = M\omega'\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} + (M+2M)\omega'\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} = M\omega' a^2$

得 $\omega' = \frac{1}{2}\omega$　方向垂直于纸面向外.　总角动量 $\frac{1}{2}M\omega a^2$

~~(2).~~ $\cancel{I = M(\frac{a}{2})^2 + 3M(\frac{a}{2})^2 = Ma^2}$　$\cancel{I = M(\frac{a}{2})^2 + M(\frac{a}{2})^2 = \frac{1}{2}Ma^2}$　~~动量守恒~~ $\cancel{v_c = \frac{2M\cdot\frac{1}{4}\omega a}{4M} = \frac{1}{8}\omega a}$

$\cancel{E_1 = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{4}Ma^2\omega^2}$　$\cancel{E_2 = \frac{1}{2}I'\omega'^2 = \frac{1}{8}Ma^2\omega^2}$　$\cancel{E_2 = \frac{1}{2}[M(\frac{3}{4}a)^2 + 3M(\frac{1}{4}a)^2]\omega'^2 = \frac{3}{32}Ma^2\omega^2 + \frac{1}{2}4M\cdot(\frac{1}{4}\omega a)^2 = \frac{7}{32}Ma^2\omega^2}$

~~碰撞前总动能~~ $\cancel{\frac{1}{4}Ma^2\omega^2}$　~~碰撞后总动能~~ $\cancel{\frac{1}{8}Ma^2\omega^2}$ $\cancel{\frac{7}{32}Ma^2\omega^2}$

(3). 系统角动量守恒　$L_0 = \frac{1}{2}M\omega_1 a^2 + 2M\cdot v_c\cdot\frac{a}{2}$　　ω_1为碰后A、B的角速度大小.

系统机械能守恒　$E_1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}Ma^2)\omega_1^2 + \frac{1}{2}\cdot 2Mv_c^2$

联立解得　$\omega_1 = 0$　　$v_c = \frac{1}{2}\omega a$

即A、B停止转动角速为0，C处速度 $\frac{1}{2}\omega a$ 方向与B的瞬时速度方向相同

~~(4). 以AB瞬时方向为轴~~ $\cancel{x_c = \frac{M\frac{a}{2} + 3M\cdot\frac{a}{2}}{4M} = \frac{1}{4}a}$

~~在质心系中 碰前角动量~~ $\cancel{L_1 = M\cdot(\frac{1}{4}a)^2\omega + M(\frac{3}{4}a)^2\omega = \frac{5}{8}Ma^2\omega - 2M\cdot\frac{1}{4}\omega a\cdot\frac{1}{4}a = \frac{1}{2}M\omega a^2 = L_0}$

~~碰撞前后角动量守恒~~ $\cancel{L_1 = M(\frac{3}{4}a)^2\omega_2 + 3M\cdot(\frac{1}{4}a)^2\omega_2}$　~~得~~ $\cancel{\omega_2 = \frac{2}{3}\omega}$

质心系中: $L_0' = M\cdot\frac{1}{4}a\cdot(\frac{1}{4}\omega a) + M\cdot\frac{3}{4}a\cdot(\frac{3}{4}\omega a) - 2M\cdot$

(2). $v_0 = 0$ 动量守恒 $2Mv_0 = 4Mv_c$　得 $v_c = 0$

$E_1 = \frac{1}{2}\cdot[M(\frac{a}{2})^2 + M(\frac{a}{2})^2]\omega^2 = \frac{1}{4}Ma^2\omega^2$

$E_2 = \frac{1}{2}[M(\frac{3a}{4})^2 + 3M(\frac{a}{4})^2]\omega'^2 = \frac{3}{32}Ma^2\omega^2$

即碰前动能 $\frac{1}{4}Ma^2\omega^2$　碰后动能 $\frac{3}{32}Ma^2\omega^2$

~~(4). 质心系中碰撞前后角动量守恒~~ $\cancel{M(\frac{1}{4}a)^2\omega + M(\frac{3}{4}a)^2\omega - 2M\frac{1}{4}\omega a\cdot\frac{1}{4}a = [M(\frac{3}{4}a)^2 + 3M(\frac{1}{4}a)^2]\omega''}$

~~得~~ $\cancel{\omega'' = \frac{1}{2}\omega}$　~~绕质心总角动量为~~ $\cancel{\frac{3}{8}Ma^2\omega^2}$

$\cancel{E_1' = E_1 = \frac{1}{4}Ma^2\omega^2}$　$E_1' = E_1 = \frac{1}{4}Ma^2\omega^2$

$\cancel{E_2' = \frac{1}{2}[M(\frac{3a}{4})^2 + 3M(\frac{a}{4})^2]\omega''^2 = \frac{3}{32}Ma^2\omega^2}$

~~即质心系中~~

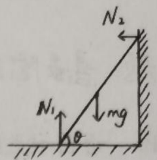
(4) 由平行轴定理　$I = I_c + md^2$

I_c为绕质心转动惯量

m为总质量　d为质心到转轴距离

可得到在质心参考系中与实验室惯性参考系得到一致结果.

第五题 光滑杆的自由滑落



解 (1). 由能量守恒 以地面为重力势能零势能点

$$Mg\cdot\frac{L}{2} = Mg\frac{L}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$I=\frac{1}{12}ML^2 \qquad v_c = \omega\cdot\frac{L}{2}\cdot\cancel{\cos\theta}$$

解得 $\omega=\sqrt{\frac{3g}{L}(1-\sin\theta)}$

即 $\dot\theta=\sqrt{\frac{3g}{L}(1-\sin\theta)} \qquad \dot\theta^2=\frac{3g}{L}(1-\sin\theta)$

(2). 杆与地面接触点竖直方向速度为0 得

$v_{cy}=\omega\cdot\frac{L}{2}\cdot\cos\theta$ 向下

杆与墙接触点水平方向速度为0 得

$v_{cx}=\omega\frac{L}{2}\sin\theta$ 向左.

$v_c=\sqrt{v_{cy}^2+v_{cx}^2}=\omega\cdot\frac{L}{2}=\sqrt{\frac{3}{4}gL(1-\sin\theta)}$ 方向指向左下 与竖直方向成θ角度

靠墙端与墙脱离~~条件~~临界状态为 $N_2=0$

即 $\dot v_{cx}=0 \qquad \frac{dv_{cx}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{3}{4}gL(1-\sin\theta)}\cdot\sin\theta\right)=\sqrt{\frac{3gL}{4}}\ \frac{d}{dt}\left(\sin\theta\cdot\sqrt{1-\sin\theta}\right)$

$$=\sqrt{\frac{3gL}{4}}\left(\cos\theta\cdot\dot\theta\cdot\sqrt{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\dot\theta}{2\sqrt{1-\sin\theta}}\right)=0$$

即 $\sqrt{1-\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{2\sqrt{1-\sin\theta}}$ 得 $\sin\theta=\frac{2}{3}$ $\theta=\arcsin\frac{2}{3}$

即在 $\theta=\arcsin\frac{2}{3}$ 时靠墙面端与墙面脱离接触。
$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$

第六题：悬垂陀螺仪

解　由回转运动 $Mg(l+L\sin\beta)=\Omega\cdot I_0 w_s$　其中 Ω 为陀螺仪在水平面进动的角速度.

竖直方向系统合外力为0　得 $T\cdot\cos\beta=Mg$

水平方向由牛顿第二定律　$T\cdot\sin\beta=M\Omega^2\cdot\cancel{l+(L\sin\beta)}(l+L\sin\beta)$

联立上述式　$I_0^2 w_s^2\cdot\tan\beta=M^2g(l+L\sin\beta)^3$

由于 β 为小角度，利用小角度近似得　$\tan\beta=\beta$　$\sin\beta=\beta$　$(l+L\sin\beta)^3=l^3\cdot(1+\frac{L}{l}\sin\beta)^3$

$$=l^3(1+\frac{3L}{l}\beta)$$

即 $I_0^2 w_s^2\cdot\beta=M^2gl^3\cdot(1+\frac{3L}{l}\beta)$

解得 $\beta=\dfrac{M^2gl^3}{I_0^2w_s^2-3M^2gl^2L}$　此时要求 $I_0^2w_s^2-3M^2gl^2L>>M^2gl^3$

第七题．硬币进动

硬币进动　$MgR\sin\alpha=\frac{1}{2}MR^2w\cdot(w_s\cos\alpha)$

$$V=w\cdot R$$

$$V=(w_s\cos\alpha)\cdot b$$

得　$\alpha=\arcsin\dfrac{V^2}{2gb}$

第八题 原子链. 令每根弹簧原始长度为 a.

令 $k_1=k_2=k_0$

$\cancel{m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}=k(x_2-x_1)}$ $$m_1\frac{d^2x_{2n-1}}{dt^2}=k_0(x_{2n}-x_{2n-1})-k_0(x_{2n-1}-x_{2n-2}) \quad ①$$

$\cancel{m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}=-k(x_2-x_1)}$ $$m_2\frac{d^2x_{2n}}{dt^2}=k_0(x_{2n+1}-x_{2n})-k_0(x_{2n}-x_{2n-1}) \quad ②$$

令 $w_1=\sqrt{\frac{k_0}{m_1}}$ $\quad w_2=\sqrt{\frac{k_0}{m_2}}$

$$\frac{d^2x_{2n-1}}{dt^2}=w_1^2(x_{2n}-2x_{2n-1}+x_{2n-2})$$

$$\frac{d^2x_{2n}}{dt^2}=w_2^2(x_{2n+1}-2x_{2n}+x_{2n-1})$$

$$x_{2n-1}=\tilde{A}e^{i(wt-(2n-1)ka)} \qquad x_{2n}=\tilde{B}e^{i(wt-2nka)}$$

$$\cancel{-w^2\tilde{A}e^{i(wt-(2n-1)ka)}=w_1^2\cdot\tilde{A}e^{i(wt-(2n-1)ka)}\cdot(e^{-ika}-2+e^{ika})}$$

$$=\cancel{w_1^2\tilde{A}e^{i(wt-(2n-1)ka)}\cdot(2\cos ka-2)}$$

$$\cancel{=-2w_1^2\tilde{A}e^{i(wt-(2n-1)ka)}\cdot 2\sin^2\frac{ka}{2}}$$

即 $\cancel{w^2=4w_1^2\cdot\sin^2\frac{ka}{2}}$

~~同理~~

得到 $$-w^2\tilde{A}e^{i(wt-(2n-1)ka)}=w_1^2e^{i(wt-(2n-1)ka)}\cdot(\tilde{B}e^{-ika}-2\tilde{A}+\tilde{B}e^{ika})$$

$$-w^2\tilde{B}e^{i(wt-2nka)}=w_2^2e^{i(wt-2nka)}\cdot(\tilde{A}e^{ika}-2\tilde{B}+\tilde{A}e^{-ika})$$

$$(w^2-2w_1^2)\tilde{A}+2w_1^2\tilde{B}\cos(ka)=0$$

$$2w_2^2\tilde{A}\cos ka+(w^2-2w_2^2)\tilde{B}=0$$

得到 $$(w^2-2w_1^2)(w^2-2w_2^2)-(2w_1^2\cos ka)(2w_2^2\cos ka)=0$$

$$w^4-2(w_1^2+w_2^2)w^2+4w_1^2w_2^2\sin^2ka=0$$

$$w^2=w_1^2+w_2^2\pm\frac{\sqrt{4(w_1^2+w_2^2)^2-16w_1^2w_2^2\sin^2ka}}{2}$$

即 $w^2=\frac{k_0}{m_1}+\frac{k_0}{m_2}+\sqrt{k_0^2(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2})^2-4\frac{k_0^2}{m_1m_2}\cdot\sin^2ka}$ $\qquad$ k_0 为弹簧劲度系数

或 $w^2=\frac{k_0}{m_1}+\frac{k_0}{m_2}-\sqrt{k_0^2(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2})^2-4\frac{k_0^2}{m_1m_2}\cdot\sin^2ka}$ $\qquad$ k 为波数.

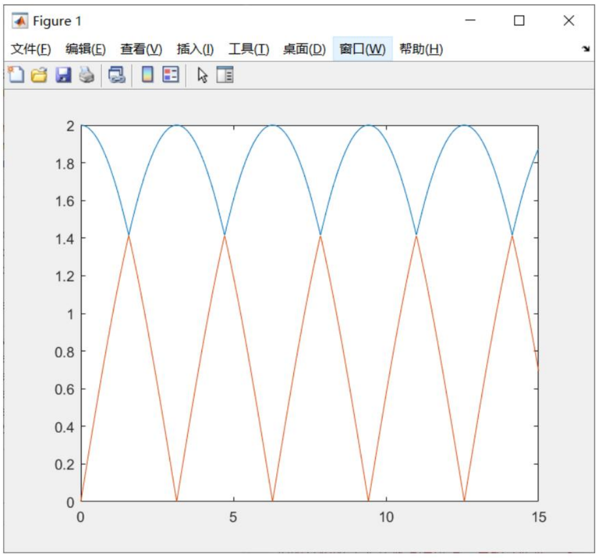
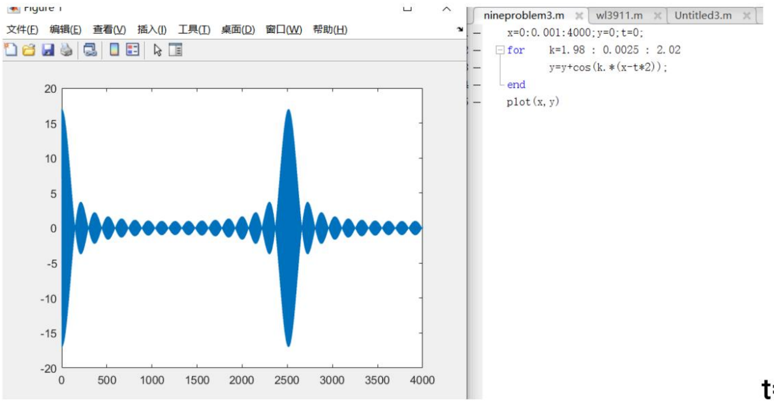


Figure 1
文件(F) 编辑(E) 查看(V) 插入(I) 工具(T) 桌面(D) 窗口(W) 帮助(H)

第九题

（1）


文件(F) 编辑(E) 查看(V) 插入(I) 工具(T) 桌面(D) 窗口(W) 帮助(H)
nineproblem3.m
wl3911.m
Untitled3.m
x=0:0.001:4000;y=0;t=0;
for k=1.98 : 0.0025 : 2.02
y=y+cos(k.*(x-t*2));
end
plot(x,y)

t=0

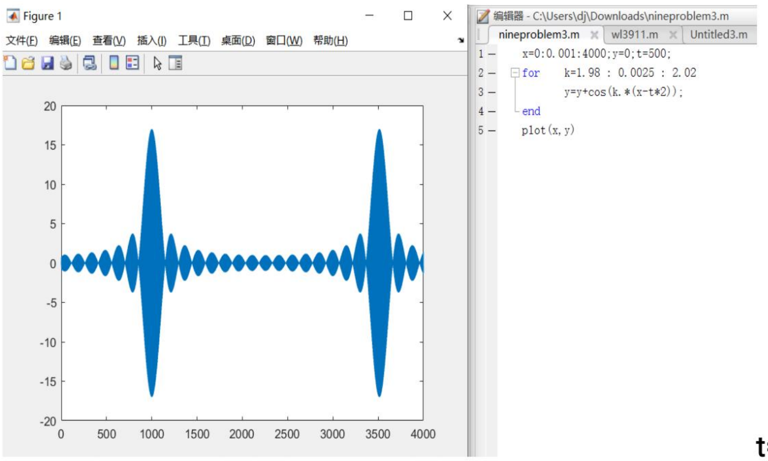
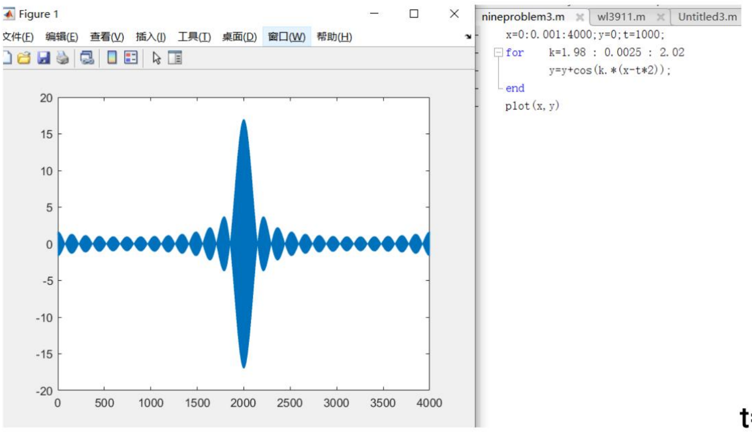


Figure 1
文件(F) 编辑(E) 查看(V) 插入(I) 工具(T) 桌面(D) 窗口(W) 帮助(H)
编辑器 - C:\Users\dj\Downloads\nineproblem3.m
nineproblem3.m
wl3911.m
Untitled3.m
x=0:0.001:4000;y=0;t=500;
for k=1.98 : 0.0025 : 2.02
y=y+cos(k.*(x-t*2));
end
plot(x,y)

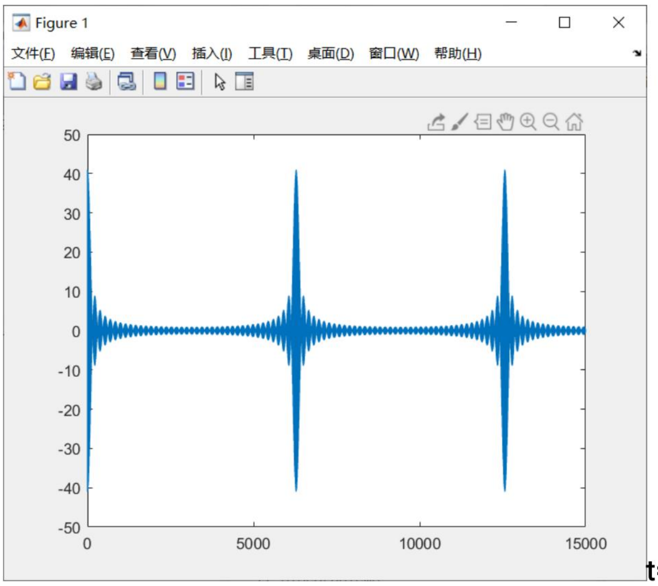
t=500



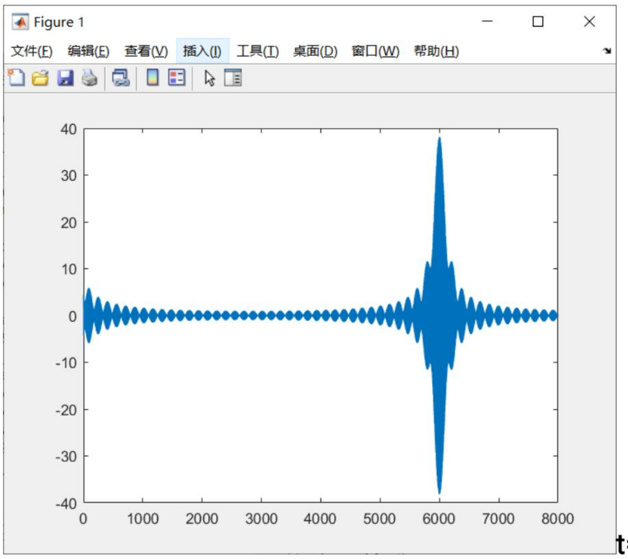
t=1000

看到了波包的传播。传播速度约为 2m/s。

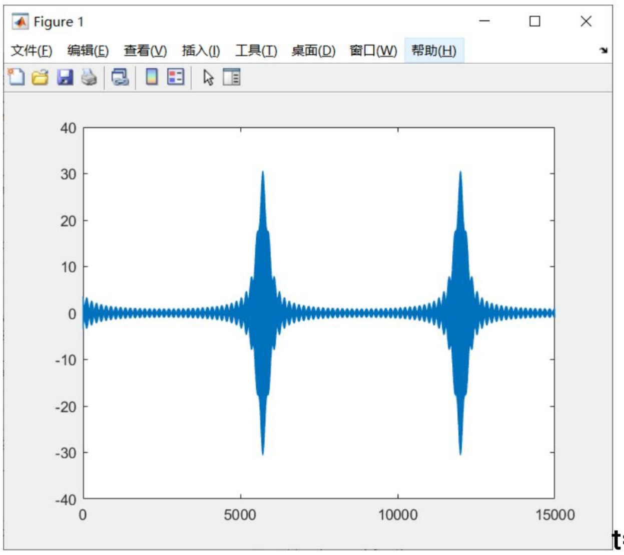
（2）



t=0



t=500



t=1000

波包传播速度变为 12m/s。间延长每个波包中间的峰值越来越低。

$$\frac{dw}{dk} = \frac{d}{dk}k^3 = 3k^2 = 12\ m/s$$

$$\frac{w}{k} = k^2 = 4m/s$$

显然 $\left.\frac{dw}{dk}\right|_{k=2}$ 符合“题意”为波包传播速率