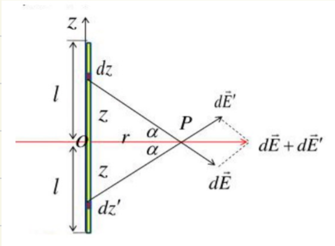
第一周 3月4日 周三作业

1. 求均匀带电细棒中垂面上的场强分布，设棒长为2l. 总带电量为q.



解：由对称性可知，均匀带电细棒中垂面上场强方向为沿中垂面方向，垂直于中垂面方向场强为零。

如右图，令 $d\vec{E_0} = d\vec{E} + d\vec{E'}$ $\lambda = \frac{q}{2l}$ 为电荷线密度

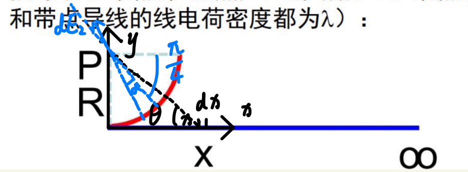
则 $dE_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \cdot dz}{r^2+z^2}\cdot\cos\alpha\cdot 2$

其中 $\cos\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}$ 即 $dE_0 = \frac{2\lambda r}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dz}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

左右两侧积分 $E_0 = \frac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^l \frac{dz}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{l}{r^2\sqrt{r^2+l^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{r^2+l^2}}$

即均匀带电细棒中垂面场强 $\vec{E_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{r^2+l^2}}\hat{r}$ （$\hat{r}$表示沿r方向的单位矢量）

2. 证明：如下图，半无限长带电线在P点的场强等于1/4圆弧在此点产生的场强（1/4圆弧和带电导线的线电荷密度都为λ）：



证明：①半无限长直导线在P产生的场强

建立如图坐标系 设在x处dx长度的点电荷在P处产生沿x轴方向场强为dE_x 沿y轴方向的场强为dE_y 不妨令$\lambda>0$

$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\cdot dx}{R^2+x^2}\cdot\cos\theta$ 其中 $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$ 即 $dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x\cdot dx}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

两侧积分 $E_x = \int_0^\infty \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\cdot dx}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$ 方向沿x轴负方向.

$dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\cdot dx}{R^2+x^2}\sin\theta$ 其中 $\sin\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}$ 即 $dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{R\cdot dx}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

两侧积分 $E_y = \int_0^\infty \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{R\cdot dx}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$ 方向沿y轴正方向.

$E_{p1}=\sqrt{E_x^2+E_y^2}=\dfrac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$ 方向指向左上与y轴夹角$\frac{\pi}{4}$

② $\frac{1}{4}$圆弧在P点产生的场强:

由对称性可知$\frac{1}{4}$圆弧在P点产生的场强方向指向左上与y轴夹角$\frac{\pi}{4}$

$$dE_{p2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\cdot R d\alpha}{R^2}\cos\alpha\cdot 2$$

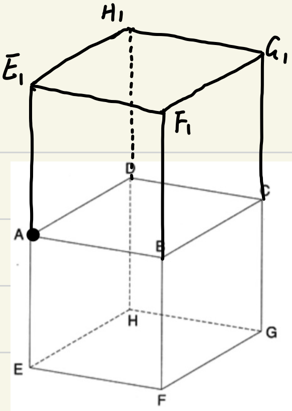
两侧积分 $E_{p2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\cos\alpha\cdot d\alpha=\dfrac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$

即 $\vec{E}_{p2}=\vec{E}_{p1}$ 半无限长带电线在P点的场强等于$\frac{1}{4}$圆弧在该点产生的场强。

如下图，求P点的场强（1/2圆弧和带点导线的线电荷密度都为λ）：

由上一问可知，P点场强为一带电均匀圆形线在其圆心处产生场强大小，故 $E_p=0$

3.



如图，假设一点电荷q放在立方体的顶点A 上，与q相对的三个立方体平面的电通量是多少？

解. 设正方体棱长为a 如图 以A为中心构造棱长为2a的正方体.

则每个小正方体与q相对的三个立方体平面的电通量相等.

由高斯定理 $24\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$

则 $\Phi_E = \frac{q}{24\varepsilon_0}$

即与q相对的三个立方体平面的电通量之和为 $3\Phi_E = \frac{q}{8\varepsilon_0}$

(法二): 以E为原点 $\vec{EF}$为x轴 $\vec{EH}$为y轴 $\vec{EA}$为z轴建立坐标系

考虑平面EFGH: 位置(x,y)处微小面元长、宽分别为dx, dy

$d\Phi_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2+x^2+y^2}\cdot dx\cdot dy\cdot\cos\theta$ 其中 $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}$

两侧积分 $\Phi_E = \int_0^a\int_0^a \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{(a^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx\cdot dy$

$$= \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a \frac{1}{a^2+x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{2a^2+x^2}}dx = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a\left(\frac{\sqrt{2a^2+x^2}}{a^2+x^2} - \frac{1}{\sqrt{2a^2+x^2}}\right)dx$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{q}{24\varepsilon_0}$$

4.

Carved-out sphere **

A sphere of radius a is filled with positive charge with uniform density ρ. Then a smaller sphere of radius $a/2$ is carved out, as shown in Fig. 1.48, and left empty. What are the direction and magnitude of the electric field at A? At B?

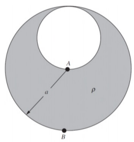


Figure 1.48.

解 假设半径为$\frac{a}{2}$的真空区域内充满均匀分布等量的正、负电荷,体密度为ρ.

则 A、B 两点处的场强为两个均匀带电球体产生的场强之和.

易知,均匀带正电的大球在球心A处场强为零. 即 $E_{A_1}=0$.

$$E_{A_2}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{4}{3}\pi(\frac{a}{2})^3\rho}{(\frac{a}{2})^2}=-\frac{2a}{3\varepsilon_0}\rho$$

即 $E_A=E_{A_1}+E_{A_2}=-\frac{2a}{3\varepsilon_0}\rho$ 即A处场强大小为 $\frac{2a}{3\varepsilon_0}\rho$ 方向指向小球球心.

$$E_{B_1}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{4}{3}\pi a^3\rho}{a^2}=\frac{a}{3\varepsilon_0}\rho$$

$$E_{B_2}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{4}{3}\pi(\frac{a}{2})^3\rho}{(\frac{3}{2}a)^2}=-\frac{a}{54\varepsilon_0}\rho$$

$$E_B=E_{B_1}+E_{B_2}=\frac{17a}{54\varepsilon_0}\rho$$

即B处场强大小为 $\frac{17a}{54\varepsilon_0}\rho$ 方向从大球球心指向B

一维

Potential energy in a one-dimensional crystal **

5. Calculate the potential energy, per ion, for an infinite 1D ionic crystal with separation a; that is, a row of equally spaced charges of magnitude e and alternating sign. *Hint:* The power-series expansion of $\ln(1+x)$ may be of use.

解. 考虑某一个 $-e$

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{a}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-e}{2a}$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{3a}$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n = \frac{(-1)^{n-1}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e}{na}$$

$$E_p = -e\ 2(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n+\cdots)$$

$$= -\frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 a}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)$$

其中 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots = \ln 2$

则 $E_p = -\dfrac{e^2\cdot\ln 2}{2\pi\varepsilon_0 a}$