作业五

截止日期：22.10.23

姓名: 董 建 宇
学号: 2019511017
成绩: ________

第 1 题得分: ________. 证明

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\mathrm{tr}(\not{A}\not{B}) = -(A\cdot B) \equiv A_0B_0 - \vec{A}\cdot\vec{B}\\
&\frac{1}{4}\mathrm{tr}(\not{A}\not{B}\not{C}\not{D}) = (A\cdot B)(C\cdot D) - (A\cdot C)(B\cdot D) + (A\cdot D)(B\cdot C)\\
&\frac{1}{4}\mathrm{tr}(\gamma_5\not{A}\not{B}\not{C}\not{D}) = \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}A_\mu B_\nu C_\rho D_\lambda
\end{aligned}
$$

其中 $\not{A} = -i\gamma_\mu A_\mu$, $\not{B} = -i\gamma_\mu B_\mu$, etc.
全反对称张量

$$
\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} = \begin{cases} 1, & \mu,\nu,\rho,\lambda\text{为}1,2,3,4\text{的偶置换};\\ -1, & \mu,\nu,\rho,\lambda\text{为}1,2,3,4\text{的奇置换};\\ 0, & otherwise. \end{cases}
$$

解: 对于 Pauli 矩阵 σ_i 有:

$$\mathrm{tr}(\sigma_i\sigma_j) = 2\delta_{ij}.$$

则对于 γ 矩阵，可以计算:

$$\mathrm{tr}(\gamma_i\gamma_j) = 2\mathrm{tr}(\sigma_i\sigma_j) = 4\delta_{ij};\quad \mathrm{tr}(\gamma_i\gamma_4) = 0;\quad \mathrm{tr}(\gamma_4\gamma_4) = 4.$$

则可以计算:

$$\frac{1}{4}\mathrm{tr}(\not{A}\not{B}) = \frac{1}{4}\mathrm{tr}(-\gamma_\mu A_\mu\gamma_\nu B_\nu) = -\frac{1}{4}A_\mu B_\nu\mathrm{tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu) = -A_\mu B_\mu = -(A\cdot B) = A_0B_0 - \vec{A}\cdot\vec{B}.$$

其中，利用了 $A_4 = iA_0$, $B_4 = iB_0$。
对于 Pauli 矩阵 σ_i 有:

$$\mathrm{tr}(\sigma_i\sigma_j\sigma_k\sigma_l) = 2\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\delta_{il}\delta_{jk} - 2\delta_{ik}\delta_{jl}.$$

其中 $i,j,k,l = 1,2,3$。
对于 $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda$，若只存在奇数个指标等于 4，则迹为 0。
若有两个指标为 4，则有:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}(\gamma_i\gamma_j\gamma_4\gamma_4) = \mathrm{tr}(\gamma_i\gamma_j) = 4\delta_{ij};\\
&\mathrm{tr}(\gamma_i\gamma_4\gamma_k\gamma_4) = -\mathrm{tr}(\gamma_i\gamma_k) = -4\delta_{ik};\\
&\mathrm{tr}(\gamma_i\gamma_4\gamma_4\gamma_l) = \mathrm{tr}(\gamma_i\gamma_l) = 4\delta_{il};\\
&\mathrm{tr}(\gamma_4\gamma_j\gamma_k\gamma_4) = \mathrm{tr}(\gamma_j\gamma_k) = 4\delta_{jk};\\
&\mathrm{tr}(\gamma_4\gamma_j\gamma_4\gamma_l) = -\mathrm{tr}(\gamma_j\gamma_l) = -4\delta_{jl};\\
&\mathrm{tr}(\gamma_4\gamma_4\gamma_k\gamma_l) = \mathrm{tr}(\gamma_k\gamma_l) = 4\delta_{kl}.
\end{aligned}
$$

若四个指标全为 4，则有:

$$\mathrm{tr}(\gamma_4\gamma_4\gamma_4\gamma_4) = 4.$$

则可以计算:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\mathrm{tr}(\not{A}\not{B}\not{C}\not{D}) =&\frac{1}{4}A_\mu B_\nu C_\rho D_\lambda\mathrm{tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda)\\
=&\frac{1}{4}A_iB_jC_kD_l\left(4\delta_{ij}\delta_{kl} + 4\delta_{il}\delta_{jk} - 4\delta_{ik}\delta_{jl}\right) + A_4B_4(C_iD_i) + C_4D_4(A_iB_i)\\
&- A_4C_4(B_iD_i) - B_4D_4(A_iC_i) + A_4D_4(B_iC_i) + B_4C_4(A_iD_i) + A_4B_4C_4D_4\\
=&(A_\mu B_\mu)(C_\nu D_\nu) - (A_\alpha C_\alpha)(B_\beta D_\beta) + (A_\rho D_\rho)(B_\lambda C_\lambda)\\
=&(A\cdot B)(C\cdot D) - (A\cdot C)(B\cdot D) + (A\cdot D)(B\cdot C).
\end{aligned}
$$

接下来计算 $\mathrm{tr}(\gamma_5\not{A}\not{B}\not{C}\not{D})$:

$$\mathrm{tr}(\gamma_5\not{A}\not{B}\not{C}\not{D}) = A_\mu B_\nu C_\rho D_\lambda\mathrm{tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda).$$

当四个参数 μ,ν,ρ,λ 至少存在两个相同时，不妨令 $\mu=\nu$，容易计算 $\mathrm{tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda)=0$。容易计算：

$$\mathrm{tr}(\gamma_5\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4)=4.$$

由于 $\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=0,\ \mu\neq\nu,\ \mu,\nu=1,2,3,4,5$，即当 μ,ν,ρ,λ 为 $1,2,3,4$ 的偶置换时 $\mathrm{tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda)=4$；当 μ,ν,ρ,λ 为 $1,2,3,4$ 的奇置换时 $\mathrm{tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\lambda)=-4$。
则有：

$$\frac{1}{4}\mathrm{tr}(\gamma_5\not{A}\not{B}\not{C}\not{D})=\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}A_\mu B_\nu C_\rho D_\lambda$$

其中全反对称张量

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}=\begin{cases}1, & \mu,\nu,\rho,\lambda\text{为}1,2,3,4\text{的偶置换};\\ -1, & \mu,\nu,\rho,\lambda\text{为}1,2,3,4\text{的奇置换};\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

□

第 2 题得分: ________. 考虑 Lee-Yang 的 β-衰变相互作用 $H_{int.}$。
令 β-衰变所涉及的粒子的空间反演变换律为

$$\mathcal{P}\psi_a(\vec{r},t)\mathcal{P}^\dagger=\eta_a\gamma_4\psi_a(-\vec{r},t),\quad a=n,p,e,\nu$$

证明: 如果任意一对 (C,C') 同时非零, 即 (C_s,C_s') 同时非零, 或 (C_V,C_V') 同时非零, 或 (C_T,C_T') 同时非零, 或 (C_A,C_A') 同时非零，或 (C_P,C_P') 同时非零，则不存在一组相因子 $(\eta_n,\eta_p,\eta_e,\eta_\nu)$ 使得宇称在相互作用下守恒，即

$$[\mathcal{P},H_{int.}]\neq 0.$$

解: 当 (C_S,C_S') 同时非零，其余耦合常数均为 0 时，可以计算：

$$[\mathcal{P},H_{int}]=-\int d^3\vec{r}[\mathcal{P},\mathcal{L}_{int}].$$

令 $A=\bar{\psi}_p\psi_n(C_S\bar{\psi}_e\psi_\nu+C_S'\bar{\psi}_e\gamma_5\psi_\nu)$，则 $\mathcal{L}_{int}=A+A^\dagger$。如果 $[\mathcal{P},\mathcal{L}_{int}]=0$，则有：$\mathcal{P}\mathcal{L}_{int}\mathcal{P}^\dagger=\mathcal{L}_{int}$。下面计算 $\mathcal{P}A\mathcal{P}^\dagger$：

$$\begin{aligned}\mathcal{P}A\mathcal{P}^\dagger=&(\mathcal{P}\psi_p^\dagger\mathcal{P}^\dagger)^\dagger\gamma_4(\mathcal{P}\psi_n\mathcal{P}^\dagger)(C_S(\mathcal{P}\psi_e\mathcal{P}^\dagger)^\dagger\gamma_4(\mathcal{P}\psi_\nu\mathcal{P}^\dagger)+C_S'(\mathcal{P}\psi_e\mathcal{P}^\dagger)^\dagger\gamma_4\gamma_5(\mathcal{P}\psi_\nu\mathcal{P}^\dagger))\\ =&\eta_p^*\eta_n\eta_e^*\eta_\nu\bar{\psi}_p(-\vec{r},t)\psi_n(-\vec{r},t)[C_S\bar{\psi}_e(-\vec{r},t)\psi_\nu(-\vec{r},t)-C_S'\bar{\psi}_e(-\vec{r},t)\gamma_5\psi_\nu(-\vec{r},t)]\end{aligned}$$

其中，场算符 ψ 的自变量从 $\vec{r}$ 变成 $-\vec{r}$ 的影响在全空间积分中被去除。所以如果有 $\mathcal{P}\mathcal{L}_{int}\mathcal{P}^\dagger=\mathcal{L}_{int}$，则只有两种可能：
1:$\eta_p^*\eta_n\eta_e^*\eta_\nu=1$ 并且 $C_S'=0$;
2:$\eta_p^*\eta_n\eta_e^*\eta_\nu=-1$ 并且 $C_S=0$;
令 $B=\bar{\psi}_p\gamma_\mu\psi_n(C_V\bar{\psi}_e\gamma_\mu\psi_\nu+C_V'\bar{\psi}_e\gamma_\mu\gamma_5\psi_\nu)$，可以计算：

$$\begin{aligned}\mathcal{P}B\mathcal{P}^\dagger=&(\mathcal{P}\psi_p^\dagger\mathcal{P}^\dagger)^\dagger\gamma_4\gamma_\mu(\mathcal{P}\psi_n\mathcal{P}^\dagger)(C_V(\mathcal{P}\psi_e\mathcal{P}^\dagger)^\dagger\gamma_4\gamma_\mu(\mathcal{P}\psi_\nu\mathcal{P}^\dagger)+C_V'(\mathcal{P}\psi_e\mathcal{P}^\dagger)^\dagger\gamma_4\gamma_\mu\gamma_5(\mathcal{P}\psi_\nu\mathcal{P}^\dagger))\\ =&-\eta_p^*\eta_n\eta_e^*\eta_\nu\bar{\psi}_p(-\vec{r},t)\psi_n(-\vec{r},t)[-C_V\bar{\psi}_e(-\vec{r},t)\gamma_\mu\psi_\nu(-\vec{r},t)+C_V'\bar{\psi}_e(-\vec{r},t)\gamma_\mu\gamma_5\psi_\nu(-\vec{r},t)]\\ =&\eta_p^*\eta_n\eta_e^*\eta_\nu\bar{\psi}_p(-\vec{r},t)\psi_n(-\vec{r},t)[C_V\bar{\psi}_e(-\vec{r},t)\gamma_\mu\psi_\nu(-\vec{r},t)-C_V'\bar{\psi}_e(-\vec{r},t)\gamma_\mu\gamma_5\psi_\nu(-\vec{r},t)]\end{aligned}$$

其中，场算符 ψ 的自变量从 $\vec{r}$ 变成 $-\vec{r}$ 的影响在全空间积分中被去除。所以如果有 $\mathcal{P}\mathcal{L}_{int}\mathcal{P}^\dagger=\mathcal{L}_{int}$，则只有两种可能：
1:$\eta_p^*\eta_n\eta_e^*\eta_\nu=1$ 并且 $C_S'=0$;
2:$\eta_p^*\eta_n\eta_e^*\eta_\nu=-1$ 并且 $C_S=0$;
令 $C=\bar{\psi}_p\sigma_{\lambda\mu}\psi_n(C_T\bar{\psi}_e\sigma_{\lambda\mu}\psi_\nu+C_T'\bar{\psi}_e\sigma_{\lambda\mu}\gamma_5\psi_\nu)$，可以计算：

$$\mathcal{P}C\mathcal{P}^\dagger=\eta_p^*\eta_n\eta_e^*\eta_\nu\bar{\psi}_p(-\vec{r},t)\sigma_{\lambda\mu}\psi_n(-\vec{r},t)[C_T\bar{\psi}_e(-\vec{r},t)\sigma_{\lambda\mu}\psi_\nu(-\vec{r},t)-C_T'\bar{\psi}_e(-\vec{r},t)\sigma_{\lambda\mu}\gamma_5\psi_\nu(-\vec{r},t)]$$

其中，场算符 ψ 的自变量从 $\vec{r}$ 变成 $-\vec{r}$ 的影响在全空间积分中被去除。所以如果有 $\mathcal{P}\mathcal{L}_{int}\mathcal{P}^\dagger=\mathcal{L}_{int}$，则只有两种可能：
1:$\eta_p^*\eta_n\eta_e^*\eta_\nu=1$ 并且 $C_S'=0$;

2:$\eta_p^*\eta_n\eta_e^*\eta_\nu = -1$ 并且 $C_S = 0$;
令 $D = \bar{\psi}_p\gamma_\mu\gamma_5\psi_n(C_A\bar{\psi}_e\gamma_\mu\gamma_5\psi_\nu + C'_A\bar{\psi}_e\gamma_\mu\psi_\nu)$，可以计算：

$$\mathcal{P}D\mathcal{P}^\dagger = \eta_p^*\eta_n\eta_e^*\eta_\nu\bar{\psi}_p(-\vec{r},t)\gamma_\mu\gamma_5\psi_n(-\vec{r},t)[C_A\bar{\psi}_e(-\vec{r},t)\gamma_\mu\gamma_5\psi_\nu(-\vec{r},t) - C'_A\bar{\psi}_e(-\vec{r},t)\gamma_\mu\psi_\nu(-\vec{r},t)]$$

其中，场算符 ψ 的自变量从 $\vec{r}$ 变成 $-\vec{r}$ 的影响在全空间积分中被去除。所以如果有 $\mathcal{P}\mathcal{L}_{int}\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{L}_{int}$，则只有两种可能：
1:$\eta_p^*\eta_n\eta_e^*\eta_\nu = 1$ 并且 $C'_S = 0$;
2:$\eta_p^*\eta_n\eta_e^*\eta_\nu = -1$ 并且 $C_S = 0$;
令 $E = \bar{\psi}_p\gamma_5\psi_n(C_P\bar{\psi}_e\gamma_5\psi_\nu + C'_P\bar{\psi}_e\psi_\nu)$，可以计算：

$$\mathcal{P}E\mathcal{P}^\dagger = \eta_p^*\eta_n\eta_e^*\eta_\nu\bar{\psi}_p(-\vec{r},t)\gamma_5\psi_n(-\vec{r},t)[C_P\bar{\psi}_e(-\vec{r},t)\gamma_5\psi_\nu(-\vec{r},t) - C'_P\bar{\psi}_e(-\vec{r},t)\psi_\nu(-\vec{r},t)]$$

其中，场算符 ψ 的自变量从 $\vec{r}$ 变成 $-\vec{r}$ 的影响在全空间积分中被去除。所以如果有 $\mathcal{P}\mathcal{L}_{int}\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{L}_{int}$，则只有两种可能：
1:$\eta_p^*\eta_n\eta_e^*\eta_\nu = 1$ 并且 $C'_S = 0$;
2:$\eta_p^*\eta_n\eta_e^*\eta_\nu = -1$ 并且 $C_S = 0$;
综上所述，如果任意一对 (C, C') 同时非零，则不存在一组相因子使得宇称在相互作用下守恒。 □