姓名：

学号：

学院：

年级：

上海科技大学

2022-2023 学年第一学期期末考试卷

开课单位：物质科学与技术学院

授课教师：任海沧

考试科目：相对论量子场论

课程序号：PHYS2124

考生须知：

1. 请严格遵守考场纪律，禁止任何形式的作弊行为。
2. 参加闭卷考试的考生，除携带必要考试用具外，书籍、笔记、掌上电脑和其他电子设备等物品一律按要求放在指定位置。
3. 参加开卷考试的考生，可以携带教师指定的材料独立完成考试，但不准相互讨论，不准交换材料。

考试成绩录入表：

题目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**总分**
计分											
复核											

评卷人签名： **复核人签名：**

日期： **日期：**

编写说明:

1. 试卷内页和答题纸编排格式由各学院和出题教师根据实际需要自定，每页须按顺序标注页码（除封面外），要求排版清晰、美观，便于在页面左侧装订。为方便印刷归档，建议使用 A4 双面印刷（学校有印刷一体机提供）。
2. 主考教师编写试卷时尽可能保证试题科学、准确、合理，如考试过程中发现试题有误，主考教师需负责现场解释，此类情况学校将作为教学评估记录的一部分。

课堂上和作业里推导过的公式均不需要重新推导。

1. Dirac 场 $\psi(\vec{r})$ 的自旋算符为：

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{2}\int d^3\vec{r} :\psi^\dagger(\vec{r})\vec{\sigma}\psi(\vec{r}):$$

   1） 证明

$$\vec{S} = \frac{i}{2}\int d^3\vec{r} :\bar{\psi}(\vec{r})\gamma_5\vec{\gamma}\psi(\vec{r}): \quad （4 分）$$

   2） 证明单个自由粒子态 $a^\dagger_{\vec{p},s}|0\rangle$ 和单个自由反粒子态 $b^\dagger_{\vec{p},s}|0\rangle$ 的平均自旋分别为 $\frac{1}{2}u^\dagger_{\vec{p},s}\vec{\sigma}u_{\vec{p},s}$ 和 $-\frac{1}{2}v^\dagger_{\vec{p},s}\vec{\sigma}v_{\vec{p},s}$，其中 $(\vec{p},s)$ 为动量和螺旋度。（8 分）

   3）计算上述旋量波函数对应的平均自旋，并动量和螺旋度表示出来。（8 分）

2. Heisenberg 表象与相互作用表象

   1） 证明 Heisenberg 表象（H）与相互作用表象（I）的下列关系（10 分）

$$|t\rangle_I = U(t,0)|t\rangle_H$$
$$O_I(t) = U(t,0)O_H(t)U(0,t)$$

   其中 $U(t,t')$ 对应于 $S-$矩阵的 $U-$算符，即 $S = U(\infty,-\infty)$。

   2） 令 $|i\rangle$ & $|f\rangle$ 分别为相互作用表象中某一散射过程的初态（initial state）和末态（final state）。求它们各自的 Heisenberg 表象并分别记作 $|\text{in}\rangle$ & $|\text{out}\rangle$，证明散射矩阵元

$$\langle f|S|i\rangle = \langle \text{out}|\text{in}\rangle。（10 分）$$

3. 电子-μ轻子的散射过程为

$$e(\vec{p},s) + \mu\left(\vec{k},r\right) \longrightarrow e(\vec{p}',s') + \mu\left(\vec{k}',r'\right)。$$

其中括号内为初态末态粒子的动量和极化。按 QED 的费曼规则给出

   1） 该过程领头阶的费曼图，并标出内线与外线的 4-动量以及外线粒子的极化与类别。（8 分）

   2） 领头阶的散射振幅 $\mathcal{M}$。（8 分）

   3） 证明在高能近似下，即忽略电子与 $\mu-$ 轻子的质量，有

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{8|\vec{k}||\vec{k}'||\vec{p}||\vec{p}'|}\frac{s^2+u^2}{t^2}$$

其中 $s=-(p+k)^2$, $t=-(p'-p)^2$, $u=-(p-k')^2$；$\overline{(\ldots)}$ 代表对初态极化求平均和对末态极化求和。（14 分）

4．描述 $\pi^{\pm}$ 的带电标量场 φ 与电磁场 A_μ 相互作用的 Lagrangian 密度为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \left(D_\mu\varphi\right)^{\dagger}D_\mu\varphi - m^2\varphi^{\dagger}\varphi$$

其中协变导数

$$D_\mu\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieA_\mu\right)\varphi$$

m 为质量。

1） 推导电磁场与标量场满足的场方程。（10 分）

2） 证明 Lagrangian 密度的规范不变性。即 $\mathcal{L}$ 在下列变换下的不变性（10 分）

$$\varphi \longrightarrow e^{ie\theta}\varphi \qquad A_\mu \longrightarrow A_\mu + \frac{\partial\theta}{\partial x_\mu}$$

3） 求带电标量场的电流密度并证明其守恒律。（5 分）

4） 此相互作用 Lagrangian 是否可以重整化？（5 分）