固体物理第二次作业

董建宇 2019511017

1 (3.1)

(1) (金属的电导率):

假设在 t 时刻电子动量为 $\vec{p}(t)$，由 Drude 模型假设可知，在 $t+dt$ 时刻，电子动量为:

$$\vec{p}(t+dt) = \frac{dt}{\tau} \times 0 + \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right)\left(\vec{p}(t) - e\vec{E}\,dt\right).$$

忽略高阶小量，整理可得:

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = -e\vec{E} - \frac{\vec{p}(t)}{\tau}.$$

当达到平衡状态时，有 $\frac{d\langle\vec{p}(t)\rangle}{dt} = 0$，即

$$\langle\vec{v}\rangle = -\frac{e\tau\vec{E}}{m}.$$

由电流密度定义可知:

$$\vec{j} = -ne\langle\vec{v}\rangle = \sigma\vec{E}.$$

则金属的电导率为:

$$\sigma = \frac{n\tau e^2}{m}.$$

其中 n 为电子数密度。

(2) (金属的电阻率):

再外加磁场作用下，牛顿第二定律为:

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) - \frac{\vec{p}(t)}{\tau}.$$

当达到平衡状态时，有 $\frac{d\langle\vec{p}(t)\rangle}{dt} = 0$，即对于三个电场分量有

$$E_x = -\frac{m\langle v_x\rangle}{e\tau} - \langle v_y\rangle B_z$$
$$E_y = -\frac{m\langle v_y\rangle}{e\tau} + \langle v_x\rangle B_z$$
$$E_z = -\frac{m\langle v_z\rangle}{e\tau}$$

利用 $\vec{E} = \rho\vec{j} = -ne\rho\langle\vec{v}\rangle$，可知矩阵 ρ 为:

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{m}{ne^2\tau} & \frac{B_z}{ne} & 0 \\ -\frac{B_z}{ne} & \frac{m}{ne^2\tau} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{ne^2\tau} \end{pmatrix}.$$

矩阵的逆为:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \frac{ne^2\tau m}{m^2+\tau^2e^2B_z^2} & -\frac{ne^3\tau^2B_z}{m^2+\tau^2e^2B_z^2} & 0 \\ \frac{ne^3\tau^2B_z}{m^2+\tau^2e^2B_z^2} & \frac{ne^2\tau m}{m^2+\tau^2e^2B_z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ne^2\tau}{m} \end{pmatrix}.$$

(3) (霍尔效应):

霍尔系数被定义为:

$$H = \frac{\rho_{yx}}{|B|} = -\frac{1}{ne}.$$

由题意可知，电子数密度为:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N\rho}{m} = \frac{N_A\rho}{M}.$$

则霍尔系数为:

$$H = -\frac{M}{e\rho N_A}.$$

代入数据可知: $H = -2.38\times 10^{-10}m^3/C$.

霍尔电压为:

$$|U_H| = \frac{HIB}{d} = 4.77\times 10^{-8}V.$$

在测量霍尔电压时，遇到的问题以及解决思路主要有:

霍尔电压极小，不容易被测量到；使用更敏感的电压表。

会导致发热；搭建一套散热系统。

(4) (Drude 模型无法解释的金属的性质):

金属中每个电子的热熔不是 $\frac{3k_B}{2}$。

不同金属加热产生电压不同，即不同金属的 Seebeck 系数不同。

不同材料的霍尔系数符号不同。

在计算过程中只考虑价电子而不考虑内层电子。

(5) (交流电下电导率矩阵):

当散射平均时间 $\tau\to\infty$ 时，在电场磁场作用下牛顿第二定律为:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v}\times\vec{B}.$$

利用电流密度围观表达式 $\vec{j} = -ne\vec{v} = -\frac{ne\vec{p}}{m_e}$ 可得:

$$\vec{E} = -\frac{1}{e}\frac{d\vec{p}}{dt} - \vec{v}\times\vec{B} = \frac{m_e}{ne^2}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{1}{ne}\vec{j}\times\vec{B}.$$

由题意可知:

$$\vec{E} = \vec{E}_0e^{i\omega t},\ \vec{j} = \vec{j}_0e^{i\omega t}.$$

代入上式方程可得:

$$\vec{E} = \frac{i\omega m_e}{ne^2}\vec{j} + \frac{1}{ne}\vec{j}\times\vec{B}.$$

则电阻率矩阵为:

$$\rho(\omega)=\begin{pmatrix}\frac{i\omega m_e}{ne^2} & \frac{B_z}{ne} & 0\\ -\frac{B_z}{ne} & \frac{i\omega m_e}{ne^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{i\omega m_e}{ne^2}\end{pmatrix}.$$

电导率矩阵为:

$$\sigma(\omega)=\begin{pmatrix}\frac{i\omega m_e ne^2}{B_z^2e^2-\omega^2m_e^2} & -\frac{ne^3B_z}{B_z^2e^2-\omega^2m_e^2} & 0\\ \frac{ne^3B_z}{B_z^2e^2-\omega^2m_e^2} & \frac{i\omega m_e ne^2}{B_z^2e^2-\omega^2m_e^2} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{ine^2}{\omega m_e}\end{pmatrix}.$$

2 (3.2)

(1) (Drude 散射时间):

由第一题可知，金属电阻率为:

$$\rho=\frac{1}{\sigma}=\frac{m_e}{n\tau e^2}.$$

其中，粒子数密度为:

$$n=\frac{N}{V}=\frac{N\rho_m}{m}=\frac{N_A\rho_m}{w}.$$

其中 ρ_m 为金属密度。则有电阻率为:

$$\rho=\frac{m_ew}{\tau e^2N_A\rho_m}.$$

散射时间为:

$$\tau=\frac{m_ew}{e^2N_A\rho_m\rho}.$$

代入表格数据可得银和锂的散射时间分别为（题中电阻率指数应为 (-8)）:

$$\tau_{Ag}=3.80\times10^{-14}s;\ \tau_{Li}=8.31\times10^{-15}s.$$

(2) (气体动理论):

对于氮气分子，质量约为 $m_{N_2}=28m_p$，其中 m_p 为一个质子质量。气体分子数密度约为:

$$n=\frac{N_A}{V_m}\approx2.688\times10^{25}.$$

则散射时间约为:

$$\tau=\frac{1}{n\langle v\rangle\sigma}\approx1.82\times10^{-10}s.$$

氮气分子散射时间远大于金属中电子散射时间，即金属中电子的被散射几率远大于氮气分子的被散射几率，由于金属中自由电子数密度远大于氮气分子数密度。

3 (3.3)

(1) (电阻率):

对于电子而言有:

$$\vec{p}_e(t+dt) = \frac{dt}{\tau_e} \times 0 + \left(1 - \frac{dt}{\tau_e}\right)\left(\vec{p}_e(t) - e\vec{E}\,dt\right)$$

忽略高阶小量, 即

$$\frac{d\vec{p}_e(t)}{dt} = -\frac{\vec{p}_e(t)}{\tau_e} - e\vec{E}.$$

平衡状态下有 $\frac{d\vec{p}_e(t)}{dt} = 0$, 即:

$$\vec{v}_e = \frac{\vec{p}_e}{m_e} = -\frac{e\tau_e\vec{E}}{m_e}.$$

同理, 对于自由离子而言有:

$$\vec{p}_i(t+dt) = \frac{dt}{\tau_i} \times 0 + \left(1 - \frac{dt}{\tau_i}\right)\left(\vec{p}_i(t) + e\vec{E}\,dt\right)$$

忽略高阶小量, 即

$$\frac{d\vec{p}_i(t)}{dt} = -\frac{\vec{p}_i(t)}{\tau_i} + e\vec{E}.$$

平衡状态下有 $\frac{d\vec{p}_i(t)}{dt} = 0$, 即:

$$\vec{v}_i = \frac{\vec{p}_i}{m_i} = \frac{e\tau_i\vec{E}}{m_i}.$$

则电流密度为:

$$\vec{j} = -n_e e\vec{v}_e + n_i e\vec{v}_i = \left(\frac{n_e e^2\tau_e}{m_e} + \frac{n_i e^2\tau_i}{m_i}\right)\vec{E} = \sigma\vec{E}.$$

即电阻率为:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m_e m_i}{e^2(n_e\tau_e m_i + n_i\tau_i m_e)}.$$

(2) (热导系数):

由课本公式可知: 电子热导系数为:

$$\kappa_e = \frac{4}{\pi}\frac{n_e\tau_e k_B^2 T}{m_e}.$$

同理可知, 自由离子的热导系数为:

$$\kappa_i = \frac{4}{\pi}\frac{n_i\tau_i k_B^2 T}{m_i}.$$

则系统热导系数为:

$$\kappa = \kappa_e + \kappa_i = \frac{4k_B^2 T}{\pi}\left(\frac{n_e\tau_e}{m_e} + \frac{n_i\tau_i}{m_i}\right)$$

(3) (霍尔系数):

由第一题可知：电子与自由离子的电导率矩阵为:

$$\sigma_e = \begin{pmatrix} \frac{n_e e^2 \tau_e m_e}{m_e^2+\tau_e^2 e^2 B_z^2} & -\frac{n_e e^3 \tau_e^2 B_z}{m_e^2+\tau_e^2 e^2 B_z^2} & 0 \\ \frac{n_e e^3 \tau_e^2 B_z}{m_e^2+\tau_e^2 e^2 B_z^2} & \frac{n_e e^2 \tau_e m_e}{m_e^2+\tau_e^2 e^2 B_z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n_e e^2 \tau_e}{m_e} \end{pmatrix}.$$

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} \frac{n_i e^2 \tau_i m_i}{m_i^2+\tau_i^2 e^2 B_z^2} & \frac{n_i e^3 \tau_i^2 B_z}{m_i^2+\tau_i^2 e^2 B_z^2} & 0 \\ -\frac{n_i e^3 \tau_i^2 B_z}{m_i^2+\tau_i^2 e^2 B_z^2} & \frac{n_i e^2 \tau_i m_i}{m_i^2+\tau_i^2 e^2 B_z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n_i e^2 \tau_i}{m_e} \end{pmatrix}$$

总电导率为:

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_i = \begin{pmatrix} \frac{n_e e^2 \tau_e m_e}{m_e^2+\tau_e^2 e^2 B_z^2} + \frac{n_i e^2 \tau_i m_i}{m_i^2+\tau_i^2 e^2 B_z^2} & \frac{n_i e^3 \tau_i^2 B_z}{m_i^2+\tau_i^2 e^2 B_z^2} - \frac{n_e e^3 \tau_e^2 B_z}{m_e^2+\tau_e^2 e^2 B_z^2} & 0 \\ \frac{n_e e^3 \tau_e^2 B_z}{m_e^2+\tau_e^2 e^2 B_z^2} - \frac{n_i e^3 \tau_i^2 B_z}{m_i^2+\tau_i^2 e^2 B_z^2} & \frac{n_e e^2 \tau_e m_e}{m_e^2+\tau_e^2 e^2 B_z^2} + \frac{n_i e^2 \tau_i m_i}{m_i^2+\tau_i^2 e^2 B_z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n_e e^2 \tau_e}{m_e} + \frac{n_i e^2 \tau_i}{m_e} \end{pmatrix}$$

令

$$A_e = \frac{m_e}{n_e e^2 \tau_e},\ A_i = \frac{m_i}{n_i e^2 \tau_i},\ C_e = -\frac{B_z}{n_e e},\ C_i = \frac{B_z}{n_i e}.$$

则总电导率为:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \frac{A_e(A_i^2+C_i^2)+A_i(A_e^2+C_e^2)}{(A_e^2+C_e^2)(A_i^2+C_i^2)} & \frac{C_e(A_i^2+C_i^2)+C_i(A_e^2+C_e^2)}{(A_e^2+C_e^2)(A_i^2+C_i^2)} & 0 \\ -\frac{C_e(A_i^2+C_i^2)+C_i(A_e^2+C_e^2)}{(A_e^2+C_e^2)(A_i^2+C_i^2)} & \frac{A_e(A_i^2+C_i^2)+A_i(A_e^2+C_e^2)}{(A_e^2+C_e^2)(A_i^2+C_i^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_e+A_i}{A_e A_i} \end{pmatrix}.$$

则总电阻率为:

$$\rho = \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_e(A_i^2+C_i^2)+A_i(A_e^2+C_e^2)}{(A_i+A_e)^2+(C_i+C_e)^2} & \frac{C_e(A_i^2+C_i^2)+C_i(A_e^2+C_e^2)}{(A_i+A_e)^2+(C_i+C_e)^2} & 0 \\ -\frac{C_e(A_i^2+C_i^2)+C_i(A_e^2+C_e^2)}{(A_i+A_e)^2+(C_i+C_e)^2} & \frac{A_e(A_i^2+C_i^2)+A_i(A_e^2+C_e^2)}{(A_i+A_e)^2+(C_i+C_e)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_e A_i}{A_e+A_i} \end{pmatrix}.$$