超导物理第五次作业

董建宇 202328000807038

1. 从 BCS 基态能隙方程出发推导同位素效应。

Proof. 考虑有限温度情况，能隙方程为

$$\Delta_k(T) = \sum_{k'} V_{kk'} \frac{\Delta_{k'}}{2E_{k'}} \left(1 - \frac{2}{1 + e^{\beta E_k}}\right).$$

取近似 $\Delta_k = \Delta_{k'} = \Delta$, $V_{kk'} = V$，则方程简化为:

$$1 = \frac{V}{2} \sum_k \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2(k) + \Delta^2}} \tanh \frac{\sqrt{\epsilon^2(k) + \Delta^2}}{2k_B T}.$$

求和化为积分，则有:

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}} \tanh \frac{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}}{2k_B T}.$$

当 $T = T_C$ 时，$\Delta(T_C) = 0$，则有:

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\epsilon}{\epsilon} \tanh \frac{\epsilon}{2k_B T_C} \approx \ln \frac{\hbar\omega_D}{2k_B T_C} + \ln \frac{4e^\gamma}{\pi}.$$

整理可得:

$$k_B T_C = 1.13\hbar\omega_D e^{-\frac{1}{N(0)V}}.$$

即 $T_C \propto \omega_D \propto M^{-1/2}$，即超导转变温度与 $\frac{1}{\sqrt{M}}$ 呈正相关。 □

2. 从费米求的图像出发，说明两个电子总动量为零，形成库珀对时，由吸引位势造成能量降低最大。

Proof. 在费米球上两总动量为零的电子 $(k, -k)$ 的吸引位势使能量降低 V。

若考虑两总动量不为零的电子 $(k_1, k_2) = (k' + \delta k, -k' + \delta k)$，其中 $k' = \frac{k_1+k_2}{2}$，$\delta k = \frac{k_1-k_2}{2}$，总可以选取一惯性系 S'，使两电子在 S' 中总动量为零，S' 即质心系，在 S' 系中，$(k'. - k')$ 电子吸引位势造成能量降低，但由于 S' 系相对实验室参考系有非零动量 δk，则导致能量升高 $\frac{1}{2}(2m)\left(\frac{\hbar\delta k}{m}\right)^2 = \frac{\hbar^2\delta k^2}{m} \geq 0$。

则为了最大程度降低能量，令 $\delta k = 0$，即两电子总动量为零时，由吸引位势造成的能量降低最大。 □

3. 试用测不准关系估计传统超导体 Cooper Pair 的尺寸。

Proof. 记形成 Cooper Pair 的两个电子间距为 ξ，则动量不确定度为 $\delta p \sim \frac{\hbar}{\xi}$，动能不确定度为:

$$\delta\left(\frac{p^2}{2m^*}\right) = \frac{p}{m^*}\delta p \sim \frac{p_F}{m^*}\frac{\hbar}{\xi}.$$

只有当 $\delta\left(\frac{p^2}{2m^*}\right) < \Delta(0)$ 时，两电子才能形成稳定的 Cooper Pair，即

$$\xi > \frac{\hbar p_F}{m^*\Delta(0)}.$$

□

4. 从有限温度下的 BCS 能隙方程，推导 T_C 附近能隙随温度变化的关系。

Proof. 有限温度能隙方程为:

$$\Delta_k(T) = \sum_{k'} V_{kk'} \frac{\Delta_{k'}}{2E_{k'}} \left(1 - \frac{2}{1+e^{\beta E_k}}\right).$$

取 $\Delta_k(T) = \Delta_{k'}(T) = \Delta(T)$，$V_{kk'} = V$，则有:

$$1 = \frac{V}{2}\sum_k \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2(k)+\Delta^2}} - V\sum_k \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2(k)+\Delta^2}} \times \frac{2}{1+\exp(\beta\sqrt{\epsilon^2(k)+\Delta^2})}.$$

当 $T \to 0$ 时，有:

$$1 = \frac{V}{2}\sum_k \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2(k)+\Delta^2}} \simeq N(0)V\ln\frac{2\hbar\omega_D}{\Delta(0)}.$$

即

$$N(0)V\ln\frac{2\hbar\omega_D}{\Delta(0)} = N(0)V\ln\frac{2\hbar\omega_D}{\Delta(T)} - 2N(0)V\int_0^{\hbar\omega_D}\frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2(k)+\Delta^2}} \times \frac{1}{1+\exp(\beta\sqrt{\epsilon^2(k)+\Delta^2})}.$$

$$\Longrightarrow \ln\frac{\Delta(0)}{\Delta(T)} = 2\int_0^{\hbar\omega_D}\frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2(k)+\Delta^2}} \times \frac{1}{1+\exp(\beta\sqrt{\epsilon^2(k)+\Delta^2})}.$$

当 $|T_C - T| \ll T_C$ 时，

$$\Delta(T) \propto \Delta(0)\sqrt{\frac{8}{7\xi(3)}}\left(1-\frac{T}{T_C}\right)^{1/2} \propto \left(1-\frac{T}{T_C}\right)^{1/2}.$$

□