超导物理第二次作业

董建宇 202328000807038

1. 根据 Ginzburg-Landau 理论自由能，推导相应的 Ginzburg-Landau 方程，并简要讨论边界条件。

$$\frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - q\vec{A})^2\Psi + \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi = 0$$
$$\vec{J}_s = \frac{q\hbar}{2mi}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{q^2}{m^*}|\Psi|^2\vec{A} = \frac{q|\Psi|^2}{m^*}(\hbar\nabla\theta - q\vec{A})$$

其中 $\Psi = |\Psi|e^{i\theta}$。

Proof. 单位体积 Gibbs 自由能为:

$$\begin{aligned} g_{SH} =& f_n + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{2m}|(-i\hbar\nabla - eA)\Psi|^2 + \frac{b^2}{2\mu_0} - \vec{b}\cdot\vec{H} \\ =& f_n + \alpha\Psi\Psi^* + \frac{\beta}{2}\Psi^2\Psi^{*2} + \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - eA)\Psi(i\hbar\nabla - eA)\Psi^* + \frac{(\nabla\times\vec{A})^2}{2\mu_0} - (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{H}. \end{aligned}$$

对 Ψ^* 取变分，即 $\Psi^* \to \Psi^* + \delta\Psi^*$，可得:

$$\begin{aligned} & g_{SH} + \delta g \\ =& f_n + \alpha\Psi(\Psi^* + \delta\Psi^*) + \frac{\beta}{2}\Psi^2(\Psi^* + \delta\Psi^*)^2 + \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - eA)\Psi(i\hbar\nabla - eA)(\Psi^* + \delta\Psi^*) \\ & + \frac{(\nabla\times\vec{A})^2}{2\mu_0} - (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{H} \\ =& g_{SH} + (\alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi)\delta\Psi^* + \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - eA)\Psi(i\hbar\nabla - eA)\delta\Psi^*. \end{aligned}$$

Gibbs 自由能取极值，则有 δg 的积分等于 0，即:

$$\begin{aligned} \int \delta g d\vec{r} =& \int (\alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi)\delta\Psi^* d\vec{r} + \int \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - eA)\Psi(i\hbar\nabla - eA)\delta\Psi^* d\vec{r} \\ =& \int \left(\alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi + \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - eA)^2\Psi\right)\delta\Psi^* d\vec{r} \\ & + \frac{i\hbar}{2m}\int \nabla\cdot(-i\hbar\nabla - eA)\Psi\delta\Psi^* d\vec{r} \\ =& \int \left(\alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi + \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - eA)^2\Psi\right)\delta\Psi^* d\vec{r} \\ & + \frac{i\hbar}{2m}\int (-i\hbar\nabla - eA)\Psi\delta\Psi^*\cdot d\vec{S}. \end{aligned}$$

即当满足边界条件

$$\vec{n}\cdot(-i\hbar\nabla - e\vec{A})\Psi = 0$$

时，δg 积分中第二项为零，则 $\int \delta g d\vec{r}=0$ 得到:

$$\frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla-e\vec{A})^2\Psi+\alpha\Psi+\beta|\Psi|^2\Psi=0.$$

对 $\vec{A}$ 取变分，即 $\vec{A}\to\vec{A}+\delta\vec{A}$，可得:

$$\begin{aligned}
&g_{SH}+\delta g\\
=&f_n+\alpha|\Psi|^2+\frac{\beta}{2}|\Psi|^4+\frac{1}{2m}|(-i\hbar\nabla-e(\vec{A}+\delta\vec{A}))\Psi|^2\\
&+\frac{(\nabla\times(\vec{A}+\delta\vec{A}))^2}{2\mu_0}-\nabla\times(\vec{A}+\delta\vec{A})\cdot\vec{H}\\
=&g_{SH}+\frac{1}{2m}((i\hbar\nabla\Psi+e\vec{A}\Psi)\cdot e\delta\vec{A}\Psi^*-e\delta\vec{A}\Psi\cdot(i\hbar\nabla\Psi^*-e\vec{A}\Psi^*))+(\nabla\times\delta\vec{A})\cdot\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{H}\right)\\
=&g_{SH}+\left(\frac{ie\hbar}{2m}(\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*)+\frac{e^2}{m}|\Psi|^2\vec{A}\right)\cdot\delta\vec{A}+(\nabla\times\delta\vec{A})\cdot\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{H}\right).
\end{aligned}$$

Gibbs 自由能取极值，则对 δg 的积分等于 0，即:

$$\begin{aligned}
\int\delta g d^3\vec{r}=&\int\left(\frac{ie\hbar}{2m}(\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*)+\frac{e^2}{m}|\Psi|^2\vec{A}\right)\cdot\delta\vec{A}d^3\vec{r}+\int(\nabla\times\delta\vec{A})\cdot\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{H}\right)d^3\vec{r}\\
=&\int\left(\frac{ie\hbar}{2m}(\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*)+\frac{e^2}{m}|\Psi|^2\vec{A}\right)\cdot\delta\vec{A}d^3\vec{r}+\int\left(\nabla\times\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{H}\right)\right)\cdot\delta\vec{A}d^3\vec{r}\\
&+\int\nabla\cdot\left(\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{H}\right)\times\delta\vec{A}\right)d^3\vec{r}\\
=&\int\left(\frac{ie\hbar}{2m}(\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*)+\frac{e^2}{m}|\Psi|^2\vec{A}+\vec{J}_s\right)\cdot\delta\vec{A}d^3\vec{r}\\
&+\int\nabla\cdot\left(\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{H}\right)\times\delta\vec{A}\right)d^3\vec{r}
\end{aligned}$$

则当满足边界条件

$$\vec{n}\times\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{H}\right)=0$$

时，δg 积分中第二项为零，则 $\int \delta g d^3\vec{r}=0$ 得到:

$$\vec{J}_s=\frac{q\hbar}{2mi}(\Psi^*\nabla\Psi-\Psi\nabla\Psi^*)-\frac{q^2}{m^*}|\Psi|^2\vec{A}=\frac{q|\Psi|^2}{m^*}(\hbar\nabla\theta-q\vec{A}).$$

□

2. 利用 GL 理论中得到的相干长度 ξ_{GL}，穿透深度 λ_{GL} 以及热力学临界磁场 H_C 的表达式，推导如下关系:

$$H_C=\frac{\Phi_0}{2\sqrt{2}\pi\mu_0\xi_{GL}\lambda_{GL}}.$$

Proof. 相干长度 ξ_{GL}，穿透深度 λ_{GL} 分别为:

$$\xi_{GL}=\sqrt{\frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha(T)|}};\quad \lambda_{GL}=\sqrt{\frac{m^*}{\mu_0 n_S q^2}}.$$

热力学临界磁场 H_C 满足:

$$-\frac{\alpha^2}{2\beta}=-\frac{1}{2}\mu_0 H_C^2.$$

则有:

$$\begin{aligned}H_C^2=&\frac{\alpha^2}{\beta\mu_0}=\frac{|\alpha|}{\mu_0}n_S\\=&\frac{1}{\mu_0}\frac{\hbar^2}{2m^*\xi_{GL}^2}\frac{m^*}{\mu_0 q^2\lambda_{GL}^2}\\=&\frac{\Phi_0^2}{8\pi^2\mu_0^2\xi_{GL}^2\lambda_{GL}^2}.\end{aligned}$$

其中 $\Phi_0=h/e$，两侧开平方可得:

$$H_C=\frac{\Phi_0}{2\sqrt{2}\pi\mu_0\xi_{GL}\lambda_{GL}}.$$

□