超导物理第三次作业

董建宇 202328000807038

1. 理想第二类超导体中，平均磁感应强度为 $\mathbf{B}$，计算四方和三角两种磁通点阵的点阵常数 $\mathbf{a}_\square$ 和 $\mathbf{a}_\triangle$，并定型讨论哪一种点阵能量更低。

Proof. 对于三角格子，平均每个三角形面积内有 $\frac{\Phi_0}{2}$ 磁通，则有:

$$B = \frac{Phi_0/2}{\frac{\sqrt{3}}{4}a_\triangle^2}.$$

即

$$a_\triangle = \sqrt{\frac{2\Phi_0}{\sqrt{3}B}}.$$

对于四方格子，平均每个正方形面积内有 Φ_0 磁通，则有:

$$B = \frac{\Phi_0}{a_\square^2}.$$

即

$$a_\square = \sqrt{\frac{\Phi_0}{B}}.$$

设 g_{SH} 为无磁通线时 Gibbs 自由能，g_{MH} 为有磁通线时 Gibbs 自由能，则

$$g_{MH} = g_{SH} + nE_l - BH + \frac{nZ}{2}u_l = g_{SH} + B\left(H_{c1} - H + \frac{Z\Phi_0}{4\pi\mu_0\lambda^2}\sqrt{\frac{\pi\lambda}{2a}}e^{-a/\lambda}\right)$$

只有最后一项与 a 有关，记作 A，带入 $a_\triangle = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}a_\square$ 可得:

$$A_\triangle = \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/4}\exp\left[\left(1-\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)\frac{a_\square}{\lambda}\right]A_\square \approx 1.447e^{-0.075a_\square/\lambda}A_\square.$$

由于 $a_\square \gg \lambda$，则 $A_\triangle < A_\square$。即三角格子能量更低。 $\square$

2. 在第二类超导体混合态，(1) 计算与样品表面平行的磁通线与表面相互作用能。(2) 并根据结果讨论在不同磁场下，相互作用能是如何变化的。(参考章立源《超导物理学》)

提示，考虑 1D 情形，样品表面 $x=0$，磁通线位于 $x=x_L$。边界条件为:$x=0$ 时，$b=\mu_0 H$, $(\nabla\times b)_x = 0$(表面法线方向无电流)。

样品中任意 x 处的磁场，$b_t = b_1 + b_2$, $b_1 = \mu_0 H\exp(-x/\lambda_L)$ 为无磁通线时的磁场。b_2 为磁通线产生的磁场，可以通过镜像法得到，即在 $-x_L$ 有一个反向的磁场，b_2 是磁通线及其镜像位置反平行磁通产生的磁场的总和。

利用推导磁通线能量的方法，可以计算得到单位长度的 Gibbs 自由能为:

$$G = \frac{\Phi_0}{\mu_0}\left[b_1(x_L) - \frac{1}{2}b_2(2x_L) + \mu_0(H_{cl} - H)\right]$$

这里公式中 b 为单个磁通线周围的磁场分布表达式。利用讲过的 b_1 和 b 的表达式可以得到

$$G = \Phi_0 H e^{-x_L/x} - \frac{1}{4\pi\mu_0}\left(\frac{\Phi_0}{\lambda_L}\right)^2 K_0\left(\frac{2x_L}{\lambda_L}\right) + (H_{cl}-H)\Phi_0.$$
$$G = \Phi_0 H e^{-x_L/x} - \frac{1}{4\pi\mu_0}\left(\frac{\Phi_0}{\lambda_L}\right)^2 \ln\left(\frac{2x_L}{\lambda_L}\right) + (H_{cl}-H)\Phi_0. \quad (\xi \le x_L << \lambda_L)$$

Proof. 考虑无限大表面内部 l 处没有 z 方向的磁通线。

无磁通线时，$\vec{B}_1 = \mu_0\vec{H}\exp(-x/\lambda)$，满足

$$\vec{B}_1 - \lambda^2\nabla^2\vec{B}_1 = 0; \quad \vec{B}_1(0) = \mu_0\vec{H}.$$

有磁通线时，超导体内部磁感应强度满足:

$$\vec{B} - \lambda^2\nabla^2\vec{B} = \Phi_0\delta_z(\vec{x}-\vec{x}_L).$$

则有:

$$\vec{B}_2 = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}K_0((x-x_L)/\lambda)\vec{e}_z; \quad \vec{J}_2 = \frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0\lambda^2}K_1((x-x_L)/\lambda)\left(\vec{e}_z \times \frac{\vec{x}-\vec{x}_L}{|\vec{x}-\vec{x}_L|}\right).$$

但其不满足 $J_\perp(0) = 0$ 的边界条件。

考虑在无穷大超导体内部 $-\vec{x}_L$ 处反向磁通产生的磁场 $\vec{B}_3$，$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$ 在 $x > 0$ 处满足

$$\vec{B} - \lambda^2\nabla^2\vec{B} = \Phi_0\delta_z(\vec{x}-\vec{x}_L).$$

且满足 $\vec{B}(0) = \mu_0\vec{H}$; $\vec{J}_\perp(0) = 0$。

已知对于相距 a 的两磁通线相互作用能为:

$$u_L = \lambda^2 \iint (\vec{b}_1 \times \vec{J}_{s2})\cdot d\vec{S} = b_1(a)\Phi_0/\mu_0.$$

则可以计算:

$$\begin{aligned} E_L =& E_{L0} - \int_{x_L}^{\infty}(B_1'(x) + B_{relative}'(2x))\frac{\Phi_0}{\mu_0}dx \\ =& E_{L0} + \mu_0 H\exp\left(-\frac{x_L}{\lambda}\right)\frac{\Phi_0}{\mu_0} - \frac{1}{2}\frac{\Phi_0}{\mu_0}\int_{x_L}^{\infty} dB_{relative}(2x) \\ =& E_{L0} + \mu_0 H\exp\left(-\frac{x_L}{\lambda}\right)\frac{\Phi_0}{\mu_0} + \frac{\Phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda^2} \end{aligned}$$

$$E_L = \iint \frac{\lambda^2}{2}(\vec{B}\times\vec{J}_s)\cdot d\vec{S} = \frac{1}{2}\Phi_0 H\exp(-x_L/\lambda) + \frac{\Phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda^2}K_0(2x_L/\lambda) + \Phi_0 H_{c1}.$$

$$g = nE_l - BH = n\left(\frac{1}{2}\Phi_0 H\exp(-x_L/\lambda) + \frac{\Phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda^2}K_0(2x_L/\lambda) + \Phi_0(H_{c1}-H)\right)$$

则每个磁通线与边界相互作用能为:

$$\frac{1}{2}\Phi_0 H\exp(-x_L/\lambda) + \frac{\Phi_0^2}{4\pi\mu_0\lambda^2}K_0(2x_L/\lambda) + \Phi_0(H_{c1}-H).$$

□

3. 对于一个直径为 D 的球形非理想第二类超导体，利用临界态模型计算磁滞回线得到的磁化强度差 ΔM 和临界电流密度 J_C 之间有关系:J_C $3.4\Delta M/D$(单位用国际单位制：$J_C : A/m^2$, $\Delta M : A/m$, $D : m$)

Proof. 由对称性可得:

$$\vec{H} = H_r(r,\theta)\vec{e}_r + H_\theta(r,\theta)\vec{e}_\theta$$

则电流密度为:

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{H} = \vec{e}_\phi \left(\frac{\partial}{\partial r} H_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} H_r + \frac{1}{r} H_\theta \right) \propto \vec{e}\phi.$$

即超导球内只有 $\vec{e}_\phi$ 方向电流密度，且大小为定值 J_c。则

$$\vec{J} = \begin{cases} -J_c\vec{e}_\phi, & H\uparrow; \\ J_c\vec{e}_\phi, & H\downarrow. \end{cases}$$

则磁化强度的差为:

$$\Delta m = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} 2 \int_0^{\pi/2} J_c \pi (R\sin\theta)^2 2R\cos\theta d(R\sin\theta) = \frac{3}{16}\pi J_c R = \frac{3}{32}\pi J_c D.$$

即

$$J_c = \frac{32}{3\pi}\frac{\Delta m}{D} \sim 3.4\frac{\Delta m}{D}.$$

□