热力学统计物理第八次作业

董建宇

2021.11

1

对于一维自由粒子有

$$p_x = \frac{2\pi\hbar}{L} n_x$$

即

$$dn_x = \frac{L}{2\pi\hbar}\, dp_x = \frac{L}{h}\sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}}\, d\varepsilon.$$

由于动量大小相同时方向可以相反，则在 ε 到 $\varepsilon + d\varepsilon$ 的能量范围内，量子态数为:

$$d\Omega = D(\varepsilon)\, d\varepsilon = 2\frac{L}{h}\, dp_x = \frac{2L}{h}\sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}}\, d\varepsilon.$$

2

对于二维粒子有:

$$dn_x\, dn_y = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^2 dp_x\, dp_y = \left(\frac{L}{h}\right)^2 dp_x\, dp_y$$

则在面积 L^2 内，在 ε 到 $\varepsilon + d\varepsilon$ 的能量范围内，量子态数目为

$$d\Omega = D(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{L^2}{\hbar^2} 2\pi p\, dp = \frac{2\pi L^2}{h^2}\, d\left(\frac{1}{2}p^2\right) = \frac{2\pi L^2}{h^2} m\, d\varepsilon$$

3

在极端相对论情形下下有:

$$p = \frac{\varepsilon}{c},\;\; dp = \frac{1}{c}\, d\varepsilon.$$

在体积 V 的范围内，能量从 ε 到 $\varepsilon + d\varepsilon$ 的能量范围内三维粒子的量子态数目为:

$$d\Omega = \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 \, dp = \frac{4\pi V}{h^3} \frac{\varepsilon^2}{c^3} \, d\varepsilon.$$

4

4.1 n=0:

当 n=0 时，量子态只能为 $\vec{n} = (0,0,0)$，即简并度为 $g(0) = 1$。

4.2 n=1:

当 n=1 时，量子态可能为 $\vec{n} = (1,0,0)$、$\vec{n} = (-1,0,0)$、$\vec{n} = (0,1,0)$、$\vec{n} = (0,-1,0)$、$\vec{n} = (0,0,1)$、$\vec{n} = (0,0,-1)$，即简并度为 $g(1) = 3 \times 2^1 = 6$。

4.3 n=2:

当 n=2 时，量子态可能为 $\vec{n} = (1,1,0)$、$\vec{n} = (1,-1,0)$、$\vec{n} = (-1,1,0)$、$\vec{n} = (-1,-1,0)$、$\vec{n} = (1,0,1)$、$\vec{n} = (1,0,-1)$、$\vec{n} = (-1,0,1)$、$\vec{n} = (-1,0,-1)$、$\vec{n} = (0,1,1)$、$\vec{n} = (0,1,-1)$、$\vec{n} = (0,-1,1)$、$\vec{n} = (0,-1,-1)$，即简并度为 $g(2) = 3 \times 2^2 = 12$。

4.4 n=3:

当 n=3 时，量子态可能为 $\vec{n} = (1,1,1)$、$\vec{n} = (-1,1,1)$、$\vec{n} = (1,-1,1)$、$\vec{n} = (1,1,-1)$、$\vec{n} = (-1,-1,1)$、$\vec{n} = (-1,1,-1)$、$\vec{n} = (1,-1,-1)$、$\vec{n} = (-1,-1,-1)$，即简并度为 $g(3) = 1 \times 2^3 = 8$。

4.5 n=4:

当 n=4 时，量子态可能为 $\vec{n} = (2,0,0)$、$\vec{n} = (-2,0,0)$、$\vec{n} = (0,2,0)$、$\vec{n} = (0,-2,0)$、$\vec{n} = (0,0,2)$、$\vec{n} = (0,0,-2)$，即简并度为 $g(4) = 3 \times 2^1 = 6$。

5

5.1

设 Y 为向右移动的步数, 则 X 服从二项分布参数为 (N,p), 则原子在 $t = N\tau$ 时刻的位置为:

$$x = aY - a(N - Y) = 2aY - aN$$

则原子的平均位置为:

$$\bar{x} = 2a\bar{Y} - aN$$

由二项分布的性质可知：$\bar{Y} = Np$，则原子在 $t = N\tau$ 时刻的平均位置为：

$$\bar{x} = aN(2p - 1).$$

5.2

t 时刻原子平均位置的方均偏差为：

$$\mathbf{Var}(x) = \overline{(x - \bar{x})^2} = 4a^2\mathbf{Var}(Y)$$

由二项分布性质可知：$\mathbf{Var}(Y) = Np(1-p)$，则 t 时刻原子平均位置的方均偏差为：

$$\overline{(x - \bar{x})^2} = 4a^2Np(1-p).$$