热力学统计物理第十二次作业

董建宇

2021.12

1

理想费米（波色）气体的巨配分函数的对数为:

$$\ln \Xi = \pm \sum_l \omega_l \ln\left(1 \pm e^{-\alpha-\beta\varepsilon_l}\right)$$

即:

$$\ln \Xi = \pm g \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} \int \sqrt{\varepsilon} \ln\left(1 \pm e^{-\alpha-\beta\varepsilon}\right) d\varepsilon.$$

在弱兼并条件下，理想费米（波色）气体的压强为:

$$\begin{aligned}
p &= \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V} \ln \Xi \\
&= \pm \frac{2\pi g (2m)^{3/2}}{h^3 \beta} \int \sqrt{\varepsilon} \left(\pm e^{-\alpha-\beta\varepsilon} - \frac{1}{2} e^{-2\alpha-2\beta\varepsilon}\right) d\varepsilon \\
&= \frac{g (2\pi m)^{3/2}}{h^3 \beta^{5/2}} e^{-\alpha} \left(1 \mp \frac{1}{4\sqrt{2}} e^{-\alpha}\right) \\
&= \frac{NkT}{V} \left(1 \pm \frac{1}{4\sqrt{2}} e^{-\alpha}\right)
\end{aligned}$$

其中，利用玻尔兹曼分布近似有:

$$e^{-\alpha} = \frac{N}{V} \frac{h^3}{(2\pi m k T)^{3/2}} \frac{1}{g}.$$

则理想费米（波色）气体的压强为:

$$p = \frac{NkT}{V} \left(1 \pm \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{N}{V} \frac{h^3}{(2\pi m k T)^{3/2}} \frac{1}{g}\right).$$

弱简并理想费米（波色）气体的内能为:

$$U = \frac{3}{2}NkT\left(1 \pm \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{N}{V}\frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}}\frac{1}{g}\right).$$

等容热熔为:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2}Nk\left(1 \mp \frac{1}{8\sqrt{2}}\frac{N}{V}\frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}}\frac{1}{g}\right)$$

则弱简并理想费米（波色）气体的熵为:

$$\begin{aligned} S &= \int \frac{C_V}{T}\,dT + S_0(V) \\ &= \frac{3}{2}Nk\left(\ln T \pm \frac{1}{12\sqrt{2}}\frac{N}{V}\frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}}\frac{1}{g}\right) + S_0(V). \end{aligned}$$

当 $\frac{N}{V}\left(\frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}\right)^3 << 1$ 时，弱简并理想费米（波色）气体趋于经典理想气体，则有:

$$\frac{3}{2}Nk\ln T + S_0(V) = \frac{3}{2}Nk\ln T + Nk\ln\frac{gV}{N} + \frac{3}{2}Nk\left[\frac{5}{3} + \ln\left(\frac{2\pi mk}{h^2}\right)\right]$$

则弱简并理想费米（波色）气体的熵为:

$$S = Nk\left(\frac{5}{2} \pm \frac{1}{8\sqrt{2}}\frac{N}{V}\frac{h^3}{(2\pi mkT)^{3/2}}\frac{1}{g} + \frac{3}{2}\ln\frac{2\pi mkT}{h^2} + \ln\frac{gV}{N}\right)$$

2

约束在磁光陷阱中的理想原子气体，其能级为:

$$\varepsilon_{n_x,n_y,n_z} = \hbar\omega_x\left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_y\left(n_y + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_z\left(n_z + \frac{1}{2}\right).$$

化学式 μ 由下式确定:

$$N = \sum_{n_x n_y n_z} \frac{1}{e^{\frac{1}{kT}(\hbar(\omega_x n_x + \omega_y n_y + \omega_z n_z) + \varepsilon_0 - \mu)} - 1}.$$

其中 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\hbar(\omega_x + \omega_y + \omega_z)$。
当 μ 趋向于 ε_0- 时，临界温度 T_C 由下式确定:

$$
\begin{aligned}
N &= \sum_{n_x n_y n_z} \frac{1}{e^{\frac{\hbar}{kT_C}(\omega_x n_x + \omega_y n_y + \omega_z n_z)} - 1} \\
&= \iiint_0^{+\infty} \frac{dn_x dn_y dn_z}{e^{\frac{\hbar}{kT_C}(\omega_x n_x + \omega_y n_y + \omega_z n_z)} - 1} \\
&= \left(\frac{kT_C}{\hbar\overline{\omega}}\right)^3 \iiint_0^{+\infty} \frac{dn'_x dn'_y dn'_z}{e^{n'_x + n'_y + n'_z} - 1} \\
&= \left(\frac{kT_C}{\hbar\overline{\omega}}\right)^3 \iiint_0^{+\infty} dn'_x dn'_y dn'_z \sum_{l=1}^{+\infty} e^{-l(n'_x + n'_y + n'_z)} \\
&= \left(\frac{kT_C}{\hbar\overline{\omega}}\right)^3 \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{l^3} \\
&= 1.202 \left(\frac{kT_C}{\hbar\overline{\omega}}\right)^3.
\end{aligned}
$$

其中 $n'_i = \frac{\hbar\omega_i}{kT_C} n_i (i = x; y; z)$，$\overline{\omega}^3 = \omega_x \omega_y \omega_z$。在 $T \leq T_C$ 时，原子气体的化学势趋于 $\frac{\hbar}{2}(\omega_x + \omega_y + \omega_z) = \varepsilon_0$，则有:

$$
\begin{aligned}
N &= N_0 + \iiint_0^{+\infty} \frac{dn_x dn_y dn_z}{e^{\frac{\hbar}{kT}(\omega_x n_x + \omega_y n_y + \omega_z n_z)} - 1} \\
&= N_0 + 1.202 \left(\frac{kT}{\hbar\overline{\omega}}\right)^3 \\
&= N_0 + N \left(\frac{T}{T_C}\right)^3.
\end{aligned}
$$

则有:

$$
\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^3.
$$

即 $T \leq T_C$ 时有宏观量级的原子凝聚在基态。

3

在体积 V，圆频率 ω 到 $\omega + d\omega$ 内光子数为:

$$
a(\omega) = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^2 \, d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}
$$

则温度为 T，体积 V 内的光子气体的平均总光子数为:

$$N = \int_0^\infty a(\omega)\, d\omega = 2.404 \frac{V}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar} \right)^3$$

光子数密度为:

$$n = \frac{N}{V} = 2.404 \frac{1}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar} \right)^3$$

3.1

温度为 1000K 时:

$$n_1 = 2.03 \times 10^{16} m^{-3}.$$

3.2

温度为 3K 时:

$$n_2 = 5.48 \times 10^{8} m^{-3}.$$

4

光子气体内能为:

$$U = \frac{\pi^2 k^4}{15 c^3 \hbar^3} V T^4.$$

则其等容热熔为:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{4\pi^2 k^4}{15 c^3 \hbar^3} V T^3.$$

则光子气体的熵为:

$$S = \int \frac{C_V}{T}\, dT = \frac{4\pi^2 k^4}{45 c^3 \hbar^3} V T^3 + S_0.$$

因为 $T = 0$ 时有 $S = 0$，则 $S_0 = 0$。即光子气体的熵为:

$$S = \frac{4\pi^2 k^4}{45 c^3 \hbar^3} V T^3.$$

5

室温下有：$T = 300K$，则有：

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}} = 4.30 \times 10^{-9} m.$$

对于金属中自由电子气体：数密度 $n_1 = 6 \times 10^{28} m^{-3}$，有：

$$n_1 \lambda^3 = 4.78 \times 10^3 >> 1.$$

即金属中自由电子是简并气体。
对于半导体中导电电子：数密度 $n_2 = 10^{20} m^{-3}$，有：

$$n_2 \lambda^3 = 7.97 \times 10^{-6} << 1.$$

即金属中的电子是非简并气体。