高等数学 2016 级下册试卷

2017．7．3

姓名：__________ 学院与专业：____________________

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，全增量与全微分分别为 Δz 与 dz。则 Δz 与 dz 的关系为 $\underline{\Delta z=dz+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)}$

2、函数 $z=4x^2+9y^2$ 在点 $(2,1)$ 处的梯度为 $\underline{\{16,18\}}$

3、曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,-2,2)$ 处的法线方程为 $\underline{\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-2}{6}}$

4、设 L 为圆 $x^2+y^2=a^2\ (a>0)$，则 $\oint\limits_L (x+y)^2 ds=\underline{2\pi a^3}$

5、设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 $D:x^2+y^2\le a^2\ (a>0)$ 上的连续函数，$f(0,0)=3$，则当 $a\to 0$ 时，$\dfrac{1}{\pi a^2}\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 的极限为 $\underline{3}$

二、（本题 8 分）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 $\varphi(x)$ 可导，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解 1　设 $F=\varphi+z-x^2-y^2$，则 $F_x=\varphi'\cdot 1-2x=\varphi'-2x, F_y=\varphi'-2y, F_z=\varphi'+1$，

从而 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{2x-\varphi'}{\varphi'+1},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=\dfrac{2y-\varphi'}{\varphi'+1}$

解 2　方程两边分别对 x,y 求导，得方程组

$$2x+0-\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'\cdot\left(1+0+\frac{\partial z}{\partial x}\right),0+2y-\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi'\cdot\left(0+1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

从而解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x-\varphi'}{\varphi'+1},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y-\varphi'}{\varphi'+1}$

解 3　方程两边求微分，得方程 $2xdx+2ydy-dz=\varphi'\cdot(dx+dy+dz)$，

进而 $2xdx-\varphi'\cdot dx+2ydy-\varphi'\cdot dy=\varphi'\cdot dz+dz, dz=\dfrac{(2x-\varphi')dx+(2y-\varphi')dy}{\varphi'+1}$

从而 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x-\varphi'}{\varphi'+1},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y-\varphi'}{\varphi'+1}$

三、（本题 8 分）求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+y$ 的极值，并说明是极大值还是极小值。

解　由函数可令 $\begin{cases} f_x=2x-y-2=0 \\ f_y=-x+2y+1=0 \end{cases}$，解得驻点 $(1,0)$，

再由 $f_{xx}=2,f_{xy}=-1,f_{yy}=2$ 得驻点处有 $A=2>0,B=-1,C=2,AC-B^2>0$，

从而该函数在驻点 $(1,0)$ 处有极小值 $f(1,0)=1-2=-1$

四、（本题 8 分）计算二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{\sin y}{y}d\sigma$，其中 D 是抛物线 $x=y^2$ 与直线 $y=x$ 所围成的闭区域（注：在原点处，补充定义被积函数的值为 1）

解　$\iint\limits_D \dfrac{\sin y}{y}d\sigma=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\dfrac{\sin y}{y}dx=\int_0^1\dfrac{\sin y}{y}(y-y^2)dy=\int_0^1(y-1)d\cos y$

$=(y-1)\cos y\Big|_0^1-\int_0^1\cos ydy=0-(0-1)\cos 0-\sin y\Big|_0^1=1-\sin 1$

五、（本题 8 分）计算 $I=\int\limits_L\dfrac{xy^2dy-x^2(y+x)dx}{x^2+y^2}$，其中 $L:x^2+y^2=1(y\ge 0)$ 沿顺时针方向。

解　利用在曲线上积分，得 $I=\int\limits_L xy^2dy-x^2(y+x)dx$

补 $L_1:y=0,x:1\to -1$，与原曲线一起形成上半圆的负向边界曲线，

$I=\int\limits_{L+L_1}xy^2dy-x^2(y+x)dx-\int\limits_{L_1}xy^2dy-x^2(y+x)dx=-\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy-\int_1^{-1}(-x^3)dx$

$=-\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot rdr-0=-\pi\cdot\dfrac{1^4}{4}=-\dfrac{\pi}{4}$

六、（本题 8 分）设 Σ 是平面 $x+y+z=4$ 被圆柱面 $x^2+y^2=1$ 截出的有限部分，求曲面积分 $\iint\limits_\Sigma zdS$

解　$z=4-x-y, z_x=z_y=-1, dS=\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}dxdy=\sqrt{3}dxdy$

$$\iint\limits_{\Sigma} zdS=\sqrt{3}\iint\limits_{D}(4-x-y)d\sigma=\sqrt{3}\iint\limits_{D}4d\sigma=4\sqrt{3}\pi$$

七、（本小题 8 分）计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz+zdxdy$，其中 Σ 为旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 下侧介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间的部分。

解　补曲面 $\Sigma_1: z=2(x^2+y^2\le 4)$，取上侧与原来曲面一起配合成所围区域的外侧，

$$\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz+zdxdy=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(z^2+x)dydz+zdxdy-\iint\limits_{\Sigma_1}(z^2+x)dydz+zdxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}2dv-\iint\limits_{\Sigma_1}2dxdy=2\int_0^2 dz\iint\limits_{D(z)}d\sigma-\left(+\iint\limits_{D(2)}2dxdy\right)$$

$$=2\int_0^2\pi\cdot 2zdz-2\pi\cdot 4=2\pi z^2\Big|_0^2-8\pi=0$$

解法 1（梁勇发来）　高斯公式法

添加曲面：Σ_1：$z=2(x^2+y^2\le 4)$，取上侧，

原积分 $=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\iiint\limits_{\Omega}2dv-\iint\limits_{\Sigma_1}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　3 分

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 rdr\int_{r^2/2}^{2}2dz-8\pi$　5 分

$=8\pi-8\pi$　　8 分

$=0.$

八、求解微分方程

1、（本小题 6 分）求微分方程 $xy'-3y=x^2$ 的通解

解法 1　由 $xy'-3y=x^2$ 得 $y'-\frac{3}{x}y=x, P(x)=-\frac{3}{x}, Q(x)=x$，

从而 $y=e^{-\int\left(-\frac{3}{x}\right)dx}\left[c+\int xe^{\int\left(-\frac{3}{x}\right)dx}dx\right]=x^3\left[c+\int x^{-2}dx\right]=x^3\left[c-\frac{1}{x}\right]=x^3c-x^2$

解法 2　先求对应齐次方程的通解，由 $xy'-3y=0$ 得

$\frac{dy}{y}=\frac{3}{x}dx,\int\frac{dy}{y}=\int\frac{3}{x}dx,\ln y=3\ln x+\ln c,y=cx^3$；

再用常数变异法，令代入 $y=c(x)x^3$ 原方程得 $c'(x)x^4=x^2,c'(x)=\frac{1}{x^2}$，

解得 $c(x)=c-\frac{1}{x}$，故 $y=\left(c-\frac{1}{x}\right)x^3=x^3c-x^2$ 为原方程得通解。

2、（本小题 6 分）求微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-3x}$ 的通解

解 1 对应齐次方程的特征方程为 $r^2+2r-3=(r+3)(r-1)=0$，

从而有特征根 $r_1=-3,r_2=1$；

比较非齐次项与标准形式，得 $m=0,\lambda=-3$ 为单特征根，从而可设特解为 $y^*=axe^{-3x}$，

进而 $y^{*\prime}=ae^{-3x}-3axe^{-3x}=(a-3ax)e^{-3x}$，

$y^{*\prime\prime}=-3ae^{-3x}-3(a-3ax)e^{-3x}=(9ax-6a)e^{-3x}$，代入方程可得

$(9ax-6a)e^{-3x}+2(a-3ax)e^{-3x}-3axe^{-3x}=e^{-3x}$，

即 $(9ax-6a)+(2a-6ax)-3ax=1,-4a=1,a=-\frac{1}{4}$，故 $y^*=-\frac{x}{4}e^{-3x}$。

综上非齐次方程的通解为 $y=Y+y^*=c_1e^{-3x}+c_2e^x-\frac{x}{4}e^{-3x}$。

解法 2 用常数变异法

对应齐次方程的特征方程为 $r^2+2r-3=(r+3)(r-1)=0$，

从而有特征根 $r_1=-3,r_2=1$；从而对应齐次方程的通解为 $Y=c_1e^{-3x}+c_2e^x$。

设非齐次方程的解为 $y=c_1(x)e^{-3x}+c_2(x)e^x$

，则 $y'=\left[c_1'(x)-3c_1(x)\right]e^{-3x}+\left[c_2'(x)+c_2(x)\right]e^x$，

$y''=\left\{\left[c_1''(x)-3c_1'(x)\right]-3\left[c_1'(x)-3c_1(x)\right]\right\}e^{-3x}+\left[c_2''(x)+2c_2'(x)+c_2(x)\right]e^x$，代入非齐次方程，得 $\left[c_1''(x)-6c_1'(x)+9c_1(x)\right]e^{-3x}+\left[c_2''(x)+2c_2'(x)+c_2(x)\right]e^x$

$+2\left[c_1'(x)-3c_1(x)\right]e^{-3x}+2\left[c_2'(x)+c_2(x)\right]e^x-3c_1(x)e^{-3x}-3c_2(x)e^x=e^{-3x}$

化简即 $\left[c_1''(x)-4c_1'(x)\right]e^{-3x}+\left[c_2''(x)+4c_2'(x)\right]e^x=e^{-3x}$

观察发现$c_2'(x)=0, c_1'(x)=-\frac{1}{4} \Rightarrow c_1(x)=-\frac{1}{4}x+c_1, c_2(x)=c_2$满足该方程，

从而原方程的通解为$y=\left(c_1-\frac{x}{4}\right)e^{-3x}+c_2e^{x}$。

或由公式有$c_1'(x)e^{x}+c_2'(x)e^{-3x}=0, c_1'(x)e^{x}-3c_2'(x)e^{-3x}=e^{-3x}$

解得$c_1'(x)=\frac{1}{4}e^{-4x}, c_2'(x)=-\frac{1}{4}$进而$c_1(x)=-\frac{1}{16}e^{-4x}+c_1, c_2(x)=-\frac{1}{4}x+c_2$，即得通解

$$y=\left(c_1-\frac{1}{16}\right)e^{-3x}+c_2e^{x}-\frac{x}{4}e^{-3x}$$

九、（非化工类）（本题 5 分）判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{3^n}$的收敛性；若收敛，说明是条件收敛还是绝对收敛。

解 （比值判别法）设$a_n=(-1)^{n+1}\frac{n^2}{3^n}$，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot(\frac{n+1}{n})^2=\frac{1}{3}<1$，所以原级数绝对收敛。

（比较判别法）设$u_n=\frac{n^2}{3^n}$，$v_n=\frac{1}{n^2}$，则$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^n}=0$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，根据比较判别法的极限形式知正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$收敛，故原级数绝对收敛。

十、（非化工类）（本题 5 分）将函数$\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$展开成麦克劳林级数，并指出其成立区间

解 由$e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n, x\in(-\infty,+\infty)$可得$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n, x\in(-\infty,+\infty)$，

进而$\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n!}x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$

成立范围还是公共部分$(-\infty,+\infty)$。

十一、（非化工类）（本题 5 分）将函数$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}(-\pi\le x\le\pi)$展开成傅立叶级数

解 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi}{4}dx=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，

其它的系数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi}{4}\cos nxdx=\frac{1}{4}\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0\ ,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\sin nxdx=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xd\cos nx=\frac{1}{2n\pi}\left(x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx\right)=\frac{1}{2n\pi}\left((-1)^n 2\pi-\frac{\sin\ nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=\frac{(-1)^n}{n}$$

从而 $f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx=\begin{cases}f(x),-\pi<x<\pi\\ \frac{\pi}{4},x=\pm\pi\end{cases}$

林郁老师给的标准

作 $f(x)$ 的周期延拓，则

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)dx=\frac{\pi}{2},$$ ………………………………………… 1 分

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\pi}{4}\cos nx\,dx=0\qquad(n=1,2,3,\cdots)\ ,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nx\,dx$$

………………. 3 分

$$=\frac{1}{\pi n}\left(x\cos nx\ \Big|_{0}^{\pi}-\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx\right)=\frac{(-1)^n}{n}\qquad(n=1,2,3,\cdots)\ ,$$

而在间断点处，延拓后 $f(x)$ 的傅立叶级数收敛于 $\frac{\pi}{4}$，故有

$$f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx=\begin{cases}\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}, & -\pi<x<\pi,\\ \frac{\pi}{4}, & x=\pm\pi,\end{cases}$$

因此，有

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx,\qquad -\pi<x<\pi.$$ …………………………………. 5 分

十二、（非化工类）（本题 5 分）证明达朗贝尔判别法：设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数，如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l<1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

证　取正数 $q=\frac{1+l}{2}\in(l,1)$，由保号性知，存在 $N\in\mathbf{N}$，使得当 $n>N$ 时，

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\le q \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

不妨设上式对所有自然数 n 成立，由此便知

$$u_n\le u_1q^{n-1} \cdots\cdots 4\text{ 分}$$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_1q^{n-1}$ 收敛，所以由正项级数比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. ……5 分

九、（化工类）（本题 6 分）求函数 $f(x,y)=4-x^2-2y^2$ 的在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大值和最小值。

解　先求区域内部的驻点，令 $\begin{cases} f_x=-2x=0 \\ f_y=-4y=0 \end{cases}$ 得驻点 $(0,0)$；

再在区域边界上，构造拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=4-x^2-2y^2+\lambda(x^2+y^2-1)$；

由 $L_x=-2x+2x\lambda=(\lambda-1)2x=0, L_y=-4y+2y\lambda=(\lambda-2)2y=0, L_\lambda=x^2+y^2-1=0$；

讨论解得 $x=0,y=\pm1,\lambda=2$ 或 $y=0,x=\pm1,\lambda=1$，比较所有可疑点的函数值

$f(0,0)=4, f(\pm1,0)=3, f(0,\pm1)=2$ 故所求最大值为 4，最小值为 2.（降维计算也可）

温老师给的标准

D 内部：

由 $\boldsymbol{f_x=-2x=0, f_y=-4y=0}$，

得驻点：$(0,0)$，函数值：$\boldsymbol{f}(0,0)=4$。　　2 分

D 边界：

$\boldsymbol{f(x,y)=3-y^2, y\in[-1,1]}$，

比较点：$(\pm1,0),(0,\pm1)$，函数值：$\boldsymbol{f}(\pm1,0)=3, \boldsymbol{f}(0,\pm1)=2$。　　5 分

比大小：

最大值 $\boldsymbol{f}(0,0)=4$，最小值 $\boldsymbol{f}(0,\pm1)=2$　　6 分

十、（化工类）（本题 7 分）已知点 $A(1,1,1),B(3,2,-1)$，求函数 $u=\ln(3xy-2z^3)$ 在点 A 处沿 $\overrightarrow{AB}$ 方向的方向导数。

解 $\overrightarrow{AB}=\{3-1,2-1,-1-1\}=\{2,1,-2\},\overrightarrow{AB}^{\circ}=\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right\}$，

由$u(x,1,1)=\ln(3x-2),u(1,y,1)=\ln(3y-2),u(1,1,z)=\ln\left(3-2z^3\right)$，从而

$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A=\left.\frac{3}{3x-2}\right|_A=3,\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A=\left.\frac{3}{3y-2}\right|_A=3,\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A=\left.\frac{-6z^2}{3-2z^3}\right|_A=-6$，因而

所求方向导数为$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_A=\{3,3,-6\}\cdot\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right\}=3\times\frac{2}{3}+3\times\frac{1}{3}-6\times\left(-\frac{2}{3}\right)=7$

十一、（化工类）（本题 7 分）求初值问题$\begin{cases}\left(1+x^2\right)y''=2xy'\\y(0)=1,y'(0)=3\end{cases}$的解。

解 令$y'=p$，则$\left(1+x^2\right)\frac{dp}{dx}=2xp,p(0)=3$，分离变量有$\frac{dp}{p}=\frac{2x}{1+x^2}dx$，

两边积分 $\int\frac{dp}{p}=\int\frac{2x}{1+x^2}dx$ 得 $\ln p=\ln\left(1+x^2\right)+\ln c$ ，结合初值条件有

$\ln 3=\ln 1+\ln c,c=3$。

从而得$p=\frac{dy}{dx}=3\left(1+x^2\right),y=\int 3\left(1+x^2\right)dx=3x+x^3+c_1$，结合初值条件有$1=c_1$，因此所求特解为$y=x^3+3x+1$。