高等数学 2017 级下册试卷

2018. 7. 2

姓名：___学院与专业：____________________座位号：________

一、（本题 6 分）设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2},x^2+y^2\neq 0\\ 0,x^2+y^2=0\end{cases}$，证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续.

证　因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{2k}{1+k^2}$ 与 k 有关，

从而二重极限不存在. 故由连续定义可知，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续.

二、（本题 6 分）设 $z=\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}$，求 $dz\big|_{(2,1)}$

解　由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}}\left(y+\dfrac{1}{y}\right),\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}}\left(x-\dfrac{x}{y^2}\right)$

在 $(2,1)$ 处连续，进而在 $(2,1)$ 处可微，由公式可得

$$dz\big|_{(2,1)}=\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(2,1)}dx+\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(2,1)}dy=\frac{1}{2\sqrt{2+\dfrac{2}{1}}}\left(1+\frac{1}{1}\right)dx+\frac{1}{2\sqrt{2+\dfrac{2}{1}}}\left(2-\frac{2}{1^2}\right)dy$$

$$=\frac{1}{2}dx$$

另解　由一阶微分的形式不变性 $dz=\dfrac{1}{2\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}}d\left(xy+\dfrac{x}{y}\right)$

$$=\frac{1}{2\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}}\left(ydx+xdy+\frac{ydx-xdy}{y^2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}}\left[\left(y+\frac{1}{y}\right)dx+\left(x-\frac{x}{y^2}\right)dy\right]$$

进而在 $(2,1)$ 处可得 $dz\big|_{(2,1)}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(2,1)}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(2,1)}dy=$

$$\frac{1}{2\sqrt{2+\dfrac{2}{1}}}\left(1+\frac{1}{1}\right)dx+\frac{1}{2\sqrt{2+\dfrac{2}{1}}}\left(2-\frac{2}{1^2}\right)dy=\frac{1}{2}dx$$

三、（本题 8 分）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$ 所确定的函数，其中 $f(x)$ 可导，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$

解　方程两边取微分，得 $2xdx+2ydy+2zdz=f\left(\frac{z}{y}\right)dy+yf'\left(\frac{z}{y}\right)\cdot\frac{ydz-zdy}{y^2}$

两边乘 y 即得 $2xydx+2y^2dy+2yzdz=yf\left(\frac{z}{y}\right)dy+yf'\left(\frac{z}{y}\right)dz-zf'\left(\frac{z}{y}\right)dy$

即 $2xydx+2y^2dy+zf'\left(\frac{z}{y}\right)dy-yf\left(\frac{z}{y}\right)dy=yf'\left(\frac{z}{y}\right)dz-2yzdz$

故 $dz=\dfrac{2xydx+\left[2y^2+zf'\left(\frac{z}{y}\right)-yf\left(\frac{z}{y}\right)\right]dy}{yf'\left(\frac{z}{y}\right)-2yz}$

从而 $\frac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2xy}{yf'\left(\frac{z}{y}\right)-2yz},\frac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y^2+zf'\left(\frac{z}{y}\right)-yf\left(\frac{z}{y}\right)}{yf'\left(\frac{z}{y}\right)-2yz}$

另解：令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-yf(\frac{z}{y})$, ……………………………………2 分

$F_x=2,F_y=2y-f(\frac{z}{y})+\frac{z}{y}f'(\frac{z}{y}),F_z=2z-f'(\frac{z}{y})$, …………………………6 分

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{2x}{2z-f'(\frac{z}{y})},\frac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2y-f(\frac{z}{y})+\frac{z}{y}f'(\frac{z}{y})}{2z-f'(\frac{z}{y})}$. …………………………8 分

四、（本题 6 分）求函数 $u=\ln\left(x+\sqrt{y^2+z^2}\right)$ 在点 $A(1,0,1)$ 处的梯度.

解　由于梯度 $gradu=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}=$

$$\left\{\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}},\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{2y}{2\sqrt{y^2+z^2}},\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{2z}{2\sqrt{y^2+z^2}}\right\}$$

进而在点 $A(1,0,1)$ 处的梯度为 $gradu|_{(1,0,1)}=$

$$\left\{\frac{1}{1+\sqrt{0^2+1^2}},\frac{1}{1+\sqrt{0^2+1^2}}\frac{0}{\sqrt{0^2+1^2}},\frac{1}{1+\sqrt{0^2+1^2}}\frac{1}{\sqrt{0^2+1^2}}\right\}=\left\{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right\}.$$

五、（本题 8 分）求 $u=xyz$ 在约束条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\left(x>0,y>0,z>0\right)$ 下的最大值.

解　为了处理方便改用同时达到最值的目标函数 $v=\ln x+\ln y+\ln z$ 构造拉格朗日函数

$$L=\ln x+\ln y+\ln z+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

进而由 $\begin{cases}L_x=\frac{1}{x}+\frac{2x\lambda}{a^2}=0,L_y=\frac{1}{y}+\frac{2y\lambda}{b^2}=0,L_z=\frac{1}{z}+\frac{2z\lambda}{c^2}=0\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0\end{cases}$ 可得

$$\begin{cases}-\frac{1}{2\lambda}=\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0\end{cases}\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3},\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}a,y=\frac{\sqrt{3}}{3}b,z=\frac{\sqrt{3}}{3}c,$$

由题意最值有且可能点惟一，从而所求最大值为 $xyz=\frac{\sqrt{3}}{3}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}b\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}c=\frac{\sqrt{3}}{9}abc$

另：直接设 $L=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$

进而由 $\begin{cases}L_x=yz+\frac{2x\lambda}{a^2}=0,L_y=zx+\frac{2y\lambda}{b^2}=0,L_z=xy+\frac{2z\lambda}{c^2}=0\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0\end{cases}$

推出 $-\frac{xyz}{2\lambda}=\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3}$，也能求解.

六、（本题 8 分）计算二重积分 $\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}d\sigma$，其中 D 是由 $x=y,x=-1,y=1$ 所围成的闭区域

解　作图知积分区域可以表达为 $D:-1\le x\le 1,x\le y\le 1$

进而 $\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}d\sigma=\int_{-1}^{1}dx\int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}dy=\int_{-1}^{1}dx\int_x^1\sqrt{1+x^2-y^2}d\frac{1+x^2-y^2}{-2}$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{1}{-2}\cdot\frac{2}{3}\left(1+x^2-y^2\right)^{3/2}\Big|_x^1 dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{-3}\left(|x|^3-1\right)dx=\frac{2}{3}\int_0^1\left(1-x^3\right)dx=\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1$$

$$=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$$

七、（本题 6 分）计算曲线积分$\int_L\left(x^2+y^2\right)ds$，其中$L$是中心在$\left(R,0\right)$，半径为$R$的上半圆周.

解　中心在$\left(R,0\right)$，半径为R的上半圆周L是$x=R+R\cos t,y=R\sin t,t:0\to\pi$

$$\Leftrightarrow\left(x-R\right)^2+y^2=R^2,x\in\left[0,2R\right]\Leftrightarrow x^2+y^2=2Rx,x\in\left[0,2R\right]$$

从而$\int_L\left(x^2+y^2\right)ds=\int_L 2Rxds=\int_0^{\pi}2R\left(R+R\cos t\right)\sqrt{\left(-R\sin t\right)^2+\left(R\cos t\right)^2}dt$

$$=\int_0^{\pi}2R^3\left(1+\cos t\right)dt=2R^3\left(t+\sin t\right)\Big|_0^{\pi}=2\pi R^3$$

八、（本题 8 分）计算曲线积分$\int_L\frac{2\left(1+y^2\right)e^{2x}dx+ye^{2x}dy}{\sqrt{1+y^2}}$，其中$L$是上半椭圆$\frac{\left(x-a\right)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(y\ge0\right)$上由点$\left(0,0\right)$到点$\left(2a,0\right)$的一段狐.

解　由于

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{ye^{2x}}{\sqrt{1+y^2}}\right)=\frac{2ye^{2x}}{\sqrt{1+y^2}},\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\left(1+y^2\right)e^{2x}}{\sqrt{1+y^2}}\right)=2e^{2x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{1+y^2}\right)=2e^{2x}\cdot\frac{2y}{2\sqrt{1+y^2}},$$

两者在全平面相等且连续，故积分曲线与路径无关。

设$L_1:y=0\left(x:0\to2a\right)$，则

$$\int_L\frac{2\left(1+y^2\right)e^{2x}dx+ye^{2x}dy}{\sqrt{1+y^2}}=\int_{L_1}\frac{2\left(1+y^2\right)e^{2x}dx+ye^{2x}dy}{\sqrt{1+y^2}}=\int_0^{2a}2e^{2x}dx=e^{2x}\Big|_0^{2a}=e^{4a}-1$$

九、（本小题 8 分）计算曲面积分$\iint_\Sigma xz^2dydz+\left(x^2y-z^2\right)dzdx+\left(2xy+y^2z\right)dxdy$，其中$\Sigma$为$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧，$a$为大于零的常数.

解　作$\Sigma_1:z=0,x^2+y^2\le a^2$取下侧，$\Sigma+\Sigma_1$形成围成$\Omega$的封闭曲面的外侧，由高斯公式，

则$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}xz^2dydz+\left(x^2y-z^2\right)dzdx+\left(2xy+y^2z\right)dxdy=\iiint_\Omega\left(z^2+x^2+y^2\right)dxdydz$

$$\overset{\text{球坐标}}{=}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi dr=2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi\cdot\left.\frac{r^5}{5}\right|_0^a=\frac{2\pi a^5}{5}\cdot\left(-\cos\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$=-\frac{2\pi a^5}{5}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}-1\right)=\frac{2\pi a^5}{5};$$

进而 $\iint\limits_{\Sigma}xz^2dydz+\left(x^2y-z^2\right)dzdx+\left(2xy+y^2z\right)dxdy$

$$=\frac{2\pi a^5}{5}-\iint\limits_{\Sigma_1}xz^2dydz+\left(x^2y-z^2\right)dzdx+\left(2xy+y^2z\right)dxdy=\frac{2\pi a^5}{5}-\iint\limits_{\Sigma_1}2xydxdy$$

$$=\frac{2\pi a^5}{5}-\left(-\iint\limits_{D_1}2xydxdy\right)=\frac{2\pi a^5}{5}-\left(-0\right)=\frac{2\pi a^5}{5}$$

十、（本题 7 分）求微分方程 $\left(x-2xy-y^2\right)dy+y^2dx=0$ 的通解

解　$y\neq 0$ 时微分方程即

$$\left(x-2xy-y^2\right)dy=-y^2dx\Rightarrow\frac{dx}{dy}=x\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{y^2}\right)+1\Leftrightarrow\frac{dx}{dy}+x\left(\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}\right)=1$$

从而 $x=e^{-\int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}\right)dy}\left(\int 1\cdot e^{\int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{2}{y}\right)dy}dy+c\right)=e^{\frac{1}{y}+2\ln y}\left(\int e^{-\frac{1}{y}-2\ln y}dy+c\right)$

$$=y^2e^{\frac{1}{y}}\left(\int e^{-\frac{1}{y}}\frac{1}{y^2}dy+c\right)=y^2e^{\frac{1}{y}}\left(e^{-\frac{1}{y}}+c\right)=y^2+cy^2e^{\frac{1}{y}}$$

即 $x=y^2+cy^2e^{\frac{1}{y}}$ 为微分方程 $\left(x-2xy-y^2\right)dy+y^2dx=0$ 的通解.（未含解 $y=0$）

十一、（本题 7 分）求微分方程 $y''+9y=e^{3x}$ 的通解

解　由对应齐次方程 $y''+9y=0$ 的特征方程 $r^2+9=0$，可得特征根 $r=\pm 3i$，

从而对应齐次方程 $y''+9y=0$ 的解为 $Y=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x$；

对比非齐次项 $f\left(x\right)=e^{3x}$ 与标准形式 $P_m\left(x\right)e^{\lambda x}$，可得 $m=0,\lambda=3$ 为不是特征方程的根，

从而可设微分方程 $y''+9y=e^{3x}$ 的有特解 $y^*=x^0ae^{3x}$，

将 $y^*=ae^{3x},y^{*\prime}=3ae^{3x},y^{*\prime\prime}=9ae^{3x}$ 代入得 $18ae^{3x}=e^{3x},a=\frac{1}{18}$，

故微分方程 $y''+9y=e^{3x}$ 的通解为 $y=Y+y^*=c_1\cos 3x+c_2\sin 3x+\frac{1}{18}e^{3x}$

十二、（非化工类做）

1、（非化工类做）（本题 6 分）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^n\cdot n}$ 的收敛性域.

解　由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^n\cdot n}$ 令 $a_n=\dfrac{1}{2^n\cdot n}$，则

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n\cdot n}\cdot 2^{n+1}\cdot(n+1)=2\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})=2$，　　　　……………………3 分

而 $x=2$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，$x=2$ 时根据莱布尼茨判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛，……..5 分

故原级数收敛域为 $[-2,2)$.　　　　…………………6 分

2、（非化工类做）（本题 8 分）将函数 $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 展开成麦克劳林级数，并指出收敛域.

解　令 $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{1}{2}\left[\ln(1+x)-\ln(1-x)\right]$，　　　　…………………2 分

则因　$\left[\ln(1-x)\right]'=\dfrac{-1}{1-x}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n, x\in(-1,1)$　　　　…………………4 分

从而 $\ln(1-x)=\int_0^x\dfrac{-1}{1-x}dx=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}, x\in[-1,1)$，

$\ln(1+x)=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-x)^{n+1}}{n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}, x\in(-1,1]$，　　　　…………………6 分

故可得 $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{1}{2}\left[\ln(1+x)-\ln(1-x)\right]=\dfrac{1}{2}\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}-\left(-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+1}{2(n+1)}x^{n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}$

成立范围还是公共部分 $(-1,1)$.　　　　…………………8 分

另解　令 $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{1}{2}\left[\ln(1+x)-\ln(1-x)\right]$，　　　　………………2 分

则因　$\left[f(x)\right]'=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{-1}{1-x}\right]=\dfrac{1}{1-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}, x\in(-1,1)$　　………..4 分

从而 $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=f(x)-f(0)=\int_0^x f(x)dx=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$

经判定端点处 $x=\pm1$ 发散，从而成立范围还是部分 $(-1,1)$.　　　　…………..8 分

3、（非化工类做）（本题 8 分）将函数 $f(x)=\frac{x}{2}(0\le x\le\pi)$ 展开成傅立叶级数.

解　作奇延拓 $f(x)=\frac{x}{2}(-\pi<x\le0)$，再作周期延拓为 $F(x)$，………………..2 分

进而则 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{2}dx=0$，

其它的系数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{2}\cos nxdx=0\ ,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{2}\sin nxdx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx$$

$$=\frac{-1}{n\pi}\int_0^{\pi}xd\cos nx=\frac{-1}{n\pi}\left(x\cos nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=\frac{-1}{n\pi}\left((-1)^n\pi-\frac{\sin\ nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

………………..6 分

作图知 $F(x)$ 在处不连续，

故 $x=\pm\pi$ 在处 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$ 收敛于 $\frac{F(-\pi+0)+F(\pi-0)}{2}=0$

从而 $F(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=\begin{cases}F(x),x\ne(2k+1)\pi\\0,x=\pm(2k+1)\pi\end{cases},k\in N$

进而限定范围 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,x\in[0,\pi)$　　　　………………..8 分

十二、（化工类做即教学计划中没要求学无穷级数的 64 学时/下学期的学生做）

1、（化工类做）（本题 6 分）求曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 在点 $\left(0,\frac{\sqrt2}{2}R,\frac{\sqrt2}{2}R\right)$ 处的切平面方程.

解　令 $F=x^2+y^2+z^2-R^2$，则在点 $\left(0,\frac{\sqrt2}{2}R,\frac{\sqrt2}{2}R\right)$ 处的切平面的法向量为

$$\vec n=\{2x,2y,2z\}\Big|_{\left(0,\frac{\sqrt2}{2}R,\frac{\sqrt2}{2}R\right)}=\{0,\sqrt2R,\sqrt2R\}//\{0,1,1\}\ ,$$

从而所要求的切平面方程为$0(x-0)+1\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)+1\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}R\right)=0$，即

$y+z-\sqrt{2}R=0$.

2、（化工类做）（本题 8 分）求抛物面壳$z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\left(0\le z\le 1\right)$的质量，其中$\rho=z$.

解　$z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\left(0\le z\le 1\right)$在$xOy$上的投影域为$D:\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\le 1\Leftrightarrow x^2+y^2\le 2$

从而所求质量$m=\iint\limits_{\Sigma}\rho dS=\iint\limits_{\Sigma}zdS=\iint\limits_{D}\frac{x^2+y^2}{2}\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\frac{r^2}{2}\cdot\sqrt{1+r^2}rdr=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{r^2}{4}\cdot\sqrt{1+r^2}dr^2=\frac{\pi}{2}\int_0^2(t+1-1)\cdot\sqrt{1+t}dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^2\left[(t+1)^{3/2}-(t+1)^{1/2}\right]\cdot d(t+1)=\frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{5}(t+1)^{5/2}-\frac{2}{3}(t+1)^{3/2}\right]\Bigg|_0^2$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{5}\cdot 3^{5/2}-\frac{2}{3}\cdot 3^{3/2}-\left(\frac{2}{5}\cdot 1^{5/2}-\frac{2}{3}\cdot 1^{3/2}\right)\right]=\frac{\pi}{2}\left[\frac{18}{5}\sqrt{3}-2\sqrt{3}-\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{4}{15}+\frac{8}{5}\sqrt{3}\right)=\left(\frac{2}{15}+\frac{4}{5}\sqrt{3}\right)\pi=\frac{2}{15}\left(1+12\sqrt{3}\right)\pi$$

3、（化工类做）（本题 8 分）设$f(x)$具有连续的导数，$f(0)=0$，且使表达式

$\left[xe^x+f(x)\right]ydx+f(x)dy$是某函数$u(x,y)$的全微分，求$f(x)$，并求一个$u(x,y)$.

解　由题设$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[xe^x+f(x)\right]y\right\}=xe^x+f(x)=f'(x)$，从而有一阶线性微分方程

$f'(x)-f(x)=xe^x$，其通解$f(x)=e^{-\int -1dx}\left[\int xe^xe^{\int -1dx}dx+c\right]=\left(\frac{x^2}{2}+c\right)e^x$，

结合$f(0)=0$可得$c=0, f(x)=\frac{x^2}{2}e^x$，

进而$[xe^x+f(x)]y\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y=(xe^x+\frac{1}{2}x^2e^x)y\mathrm{d}x+\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}y=\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2y\mathrm{e}^x)$，

故一个$u(x,y)=\frac{1}{2}x^2y\mathrm{e}^x$.