高等数学 2018 级下册试卷

2019．7．1

姓名：___学院与专业：____________________座位号：_______

一、（每小题 5 分，本题共 15 分）

1、设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$，讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的偏导数是否存在，以及 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的是否连续.

解　因为 $f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin(\Delta x\cdot 0)}{(\Delta x)^2+0^2}-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$，$f_y'(0,0)=$

$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin(0\cdot\Delta y)}{0^2+(\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta y}=0$，由定义 $f_x'(0,0), f_y'(0,0)$ 都存在。

但由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x\cdot 0)}{x^2+0^2}=0, \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x\cdot x)}{x^2+x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$，从而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的不连续.（说明偏导数存在可以用定义，不连续则选不同方向或不同方式去试探去发现极限的不同）

2、求函数 $z=xy$ 在点 $(2,3)$ 处当 $\Delta x=0.1, \Delta y=0.2$ 时的全增量与全微分

解　由定义，该全增量 $\Delta z=f(\Delta x+2,\Delta y+3)-f(2,3)=(\Delta x+2)(\Delta y+3)-2\cdot 3=2\Delta y+3\Delta x+\Delta x\Delta y$，$=2\cdot 0.2+3\cdot 0.1+0.1\cdot 0.2=0.72$，由于 $z_x'=y, z_y'=x$，所以 $f_x'(2,3)=3, f_y'(2,3)=2$，进而由定义所求全微分为 $dz=f_x'(2,3)\Delta x+f_y'(2,3)\Delta y=3\cdot 0.1+2\cdot 0.2=0.7$　（熟悉并熟练地使用定义）

3、设函数 $u=xy^2z$，求函数在点 $(1,-1,2)$ 处的梯度和方向导数的最大值

解　由定义 $gradu\big|_{(1,-1,2)}=\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right\}\Big|_{(1,-1,2)}=\{y^2z,2xyz,xy^2\}\big|_{(1,-1,2)}=\{2,-4,1\}$，

由方向导数最大值为对应点的梯度的模，可得 $\max\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(1,-1,2)}=\|\{2,-4,1\}\|=\sqrt{2^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{21}$

（熟悉并熟练地使用定义，懂基本性质）

二、（每小题 7 分，本题共 14 分）

4、求 $u=x+2y+3z$ 在区域 $D=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$ 上的最值。

解 1　首先由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1,\dfrac{\partial u}{\partial y}=2,\dfrac{\partial u}{\partial z}=3\ne 0$ 可得在 D 内部无驻点，进而可微函数 u 在 D 内部无极值、最值；

令 $L=x+2y+3z+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right)$（3 分），再令 $L_x=1+2x\lambda=0,L_y=2+2y\lambda=0,L_z=3+2z\lambda=0$，

得 $x=\dfrac{-1}{2\lambda},y=\dfrac{-2}{2\lambda},z=\dfrac{-3}{2\lambda}$ 代入 $L_\lambda=x^2+y^2+z^2-1=0$ 有 $\dfrac{1+4+9}{4\lambda^2}=1,2\lambda=\mp\sqrt{14}$，

进而 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{14}},y=\pm\dfrac{2}{\sqrt{14}},z=\pm\dfrac{3}{\sqrt{14}}$（6 分），$u=\pm\dfrac{1}{\sqrt{14}}(1+4+9)=\pm\sqrt{14}$。从而综合可得 $u=x+2y+3z$ 在区域 $D=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$ 上的最小值为 $-\sqrt{14}$，最大值为 $\sqrt{14}$。（7 分）

解 2　首先 u 在 D 内部无极值、最值如解 1 表明；由首先 u 在 D 内部无极值、最值如解 1 表明；的梯度为 $\{1,2,3\}$，u 在梯度方向上增加最快，负梯度方向减少最快，由此推知 $u=x+2y+3z$ 与 $x^2+y^2+z^2=1$ 相切时的常数 u 为最值，从而等值面 $u=x+2y+3z$ 到球心距离为 1 时即 $\dfrac{|1\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot 0-u|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=1,|u|=\sqrt{14}$ 时达到最值，此时球面与等值面相切，可用求交点的办法求出最值点。

解 3　初等数学方法，由柯西-施瓦茨不等式有 $(x+2y+3z)^2\le\left(1^2+2^2+3^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)$

进而在 D 上有 $(x+2y+3z)^2\le 14$，故 $z=x+2y+3z$ 在区域 $D=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le 1\right\}$ 上的最大值为 $\sqrt{14}$，最小值为 $-\sqrt{14}$，且在 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3},x^2+y^2+z^2=1$ 时达到，解得 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{14}},y=\pm\dfrac{2}{\sqrt{14}},z=\pm\dfrac{3}{\sqrt{14}}$。

解 4　初等数学方法，将区域 D 内的点用球坐标表达 $x=r\cos\theta\sin\varphi,y=r\sin\theta\sin\varphi,z=r\cos\varphi$，代入 $u=x+2y+3z$ 得 $u=r\left[(\cos\theta+2\sin\theta)\sin\varphi+3\cos\varphi\right]=r\left[\sqrt{5}\cos(\theta+t_1)\sin\varphi+3\cos\varphi\right]$

$=r\sqrt{5\cos^2(\theta+t_1)+9}\sin(\varphi+t_2)$，从而可得区域 D 内 $|u|\le\sqrt{14}$，最小值为 $-\sqrt{14}$，最大值为 $\sqrt{14}$。

解 5　首先 u 在 D 内部无极值、最值如解 1 表明；在边界 $x^2+y^2+z^2=1$ 上，代入 $z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$ 于目标函数求 $u=x+y\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的最值（较麻烦，计算量大）。$u=x+y\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$

5、设方程 $f\left(x^2-y^2,y^2-z^2\right)=0$ 确定了函数 $z=z(x,y),f(u,v)$ 具有连续的偏导数，求 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}$

解法 1　方程两边取微分，得 $f_1\cdot(2xdx-2ydy)+f_2\cdot(2ydy-2zdz)=0$（这里三个变量地位平等！）（3 分）

进而 $2xf_1dx-2yf_1dy+2yf_2dy-2zf_2dz=2xf_1dx+2yf_2dy-2yf_1dy-2zf_2dz=0$，

即得 $dz=\dfrac{xf_1}{zf_2}dx+\dfrac{yf_2-yf_1}{zf_2}dy,\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{xf_1}{zf_2},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{yf_2-yf_1}{zf_2}$ （6 分），

$y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=y\cdot\dfrac{xf_1}{zf_2}+x\cdot\dfrac{yf_2-yf_1}{zf_2}=\dfrac{xy}{z}$ （7 分）

解法 2　方程两边对 x 求导，视 $z=z(x,y),y$ 不变，得 $f_u\cdot 2x+f_v\cdot\left(-2z\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=0$，解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{xf_u}{zf_v}$ （3 分）；

方程两边对 y 求导，视 $z=z(x,y),x$ 不变，得 $f_u\cdot(-2y)+f_v\cdot\left(2y-2z\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=0$，（理解不平等！注意表达！）

$-z\dfrac{\partial z}{\partial y}f_v=yf_u-yf_v$ 解得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{yf_u-yf_v}{-f_v}=\dfrac{yf_v-yf_u}{f_v}$（6 分），即得 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=y\cdot\dfrac{xf_u}{zf_v}+x\cdot\dfrac{yf_v-yf_u}{zf_v}=\dfrac{xy}{z}$

解法 3　令 $w=F(x,y,z)=f(u,v)=f\left(x^2-y^2,y^2-z^2\right)$，得 $F_x=f_u\cdot 2x,F_y=f_u\cdot(-2y)+f_v\cdot 2y$，

$F_z=f_v\cdot(-2z)$ （引进记号！注意表达！）（3 分），

由隐函数求导的公式得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{xf_u}{zf_v},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=\dfrac{yf_v-yf_u}{f_v}$ （6 分），

即得 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=y\cdot\dfrac{xf_u}{zf_v}+x\cdot\dfrac{yf_v-yf_u}{zf_v}=\dfrac{xy}{z}$ （7 分）（切记三种方法独立进行，不能混起来乱用！）

三、（每小题 6 分，本题共 18 分）

6、计算二重积分 $\iint\limits_D\dfrac{\sin x}{y^2}d\sigma$，其中 D 是由 $xy=1,xy=2,x=\pi,x=2\pi$ 所围成的闭区域

解　由 $xy=1,xy=2,x=\pi,x=2\pi\Rightarrow y_1=\dfrac{1}{\pi},y_2=\dfrac{2}{\pi},y_3=\dfrac{1}{2\pi},y_4=\dfrac{1}{\pi}$ 得交点 $\left(\pi,\dfrac{1}{\pi}\right),\left(\pi,\dfrac{2}{\pi}\right)$，

$\left(2\pi,\dfrac{1}{2\pi}\right),\left(2\pi,\dfrac{1}{\pi}\right)$，作图发现不需要分块积分的积分顺序且可行，表达 $D:\pi\le x\le 2\pi,\dfrac{1}{x}\le y\le\dfrac{2}{x}$；

于是 $\iint\limits_D\dfrac{\sin x}{y^2}d\sigma=\int_\pi^{2\pi}dx\int_{1/x}^{2/x}\dfrac{\sin x}{y^2}dy=\int_\pi^{2\pi}\dfrac{-\sin x}{y}\Bigg|_{1/x}^{2/x}dx=-\int_\pi^{2\pi}\left(\dfrac{x\sin x}{2}-x\sin x\right)dx=\dfrac{1}{2}\int_\pi^{2\pi}x\sin xdx$

$=-\dfrac{1}{2}\int_\pi^{2\pi}xd\cos x=-\dfrac{1}{2}\left(x\cos x\Big|_\pi^{2\pi}-\int_\pi^{2\pi}\cos xdx\right)=-\dfrac{1}{2}\left(2\pi-(-\pi)-\sin x\Big|_\pi^{2\pi}\right)=-\dfrac{3\pi}{2}$

7、计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y)^2\,dv$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$

解　（由于积分区域具有很好的对称性，关于三个坐标平面都对称，且具有轮换对称性，充分利用！）

由轮换对称性 $\iiint\limits_{\Omega}x^2dv=\iiint\limits_{\Omega}y^2dv=\iiint\limits_{\Omega}z^2dv$，由 Ω 关于 xOz，且 $2xy$ 是 y 的奇函数，故有 $\iiint\limits_{\Omega}2xydv=0$；

进而 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y)^2\,dv=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+2xy+y^2\right)dv=\dfrac{2}{3}\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dv=\dfrac{2}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi dr$

$=\dfrac{2}{3}\cdot 2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^4dr=\dfrac{4\pi}{3}\cdot(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}\cdot\dfrac{r^5}{5}\Big|_0^1=\dfrac{8\pi}{15}$

或 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y)^2\,dv=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+2xy+y^2\right)dv=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr$ 计算

或 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y)^2\,dv=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+2xy+y^2\right)dv=2\iiint\limits_{\Omega}z^2dv=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\cos^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi dr$ 计算

8、求双曲抛物面 $z=xy$ 被包围在圆柱面 $x^2+y^2=1$ 内的那部分的面积.

解　设由圆柱面与双曲抛物面的交线在 xoy 平面上围成区域 $D:x^2+y^2\le 1$，又 $z_x=y,z_y=x$，从而所求

面积 $S=\iint\limits_{D}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\iint\limits_{D}\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1+r^2}rdr=2\pi\cdot\dfrac{1}{2}\dfrac{2\left(1+r^2\right)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^1$

$=\dfrac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

四、（每小题 6 分，本题共 18 分）

9、计算曲线积分 $\oint\limits_{L}\sqrt{x^2+y^2}ds$，其中积分曲线是圆周 $L:x^2+y^2=ax\,(a>0)$。

解　首先想到曲线方程代入化简 $\oint\limits_{L}\sqrt{x^2+y^2}ds=\oint\limits_{L}\sqrt{ax}ds$，再用参数化曲线转化为定积分。

方法 1　$L:\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{a^2}{4},x=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}\cos t,y=\dfrac{a}{2}\sin t,t:0\to 2\pi$，

原式 $=\int_0^{2\pi}\sqrt{\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^2}{2}\cos t}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos t}\sqrt{\left(\dfrac{-a}{2}\sin t\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\cos t\right)^2}dt$　（4 分）

$=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a^2\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos t}dt=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a^2\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cos^2\dfrac{t}{2}}dt=\dfrac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\left|\cos\dfrac{t}{2}\right|dt=a^2\int_0^{\pi}\cos\dfrac{t}{2}dt=2a^2\int_0^{\pi}\cos\dfrac{t}{2}d\dfrac{t}{2}$

$=2a^2\sin\dfrac{t}{2}\Big|_0^{\pi}=2a^2$　（6 分）

方法 2 $L: x^2+y^2=ax, x=r\cos t, y=r\sin t, r=a\cos t, x=a\cos^2 t, y=a\sin t\cos t, t: -\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}$，

原式$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{a^2\cos^2 t}\sqrt{\left(-2a\cos t\sin t\right)^2+\left(a\cos^2 t-a\sin^2 t\right)^2}dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}a^2\left|\cos t\right|\sqrt{\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)^2}dt$

$=2a^2\int_0^{\pi/2}\cos tdt=2a^2\sin t\big|_0^{\pi/2}=2a^2$

10、计算 $\int_L\frac{y^2}{\sqrt{x^2+1}}dx+\left[4x+2y\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]dy$，其中 L 是沿 $y=\sin x$ 上从 $x=0$ 到 $x=\pi$ 方向的一段弧。

分析　直接代入曲线方程化为定积分不好找原函数，想办法利用格林公式或积分与路径无关等简化计算。

解　取 $L_1: y=0, x:\pi\to 0$，由于 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{2y}{\sqrt{x^2+1}}, \frac{\partial}{\partial x}\left[4x+2y\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]=4+\frac{2y}{\sqrt{x^2+1}}$，

于是，原式$=\int_{L+L_1}-\int_{L_1}4xdy=-\iint_D(4)dxdy-\int_\pi^0 4xdy=-\int_0^\pi 4dx\int_0^{\sin x}dy-0=-\int_0^\pi 4\sin xdx=4\cos x\big|_0^\pi=-8$；

或 $\int_L\frac{y^2}{\sqrt{x^2+1}}dx+\left[4x+2y\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]dy=\int_L 4xdy+\int_L\frac{y^2}{\sqrt{x^2+1}}dx+2y\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dy$

$=\int_0^\pi 4xd\sin x+\int_L\frac{0^2}{\sqrt{x^2+1}}dx+0\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dy=\int_0^\pi 4xd\sin x+0=4x\sin x\big|_0^\pi-4\int_0^\pi\sin xdx$　（4 分）

$=0+4\cos x\big|_0^\pi=-8$　（6 分）

11、计算曲面积分 $\iint_\Sigma\frac{\left(x^3+az^2\right)dydz+\left(y^3+ax^2\right)dzdx+\left(z^3+ay^2\right)dxdy}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧。

分析　直接代入曲面方程化简积分，再添加曲面想办法利用高斯公式简化计算。

解　设 $\Sigma_1: z=0, x^2+y^2\le a^2$，取下侧。从而与 Σ 配合成所围区域的表面的外侧，

原式$=\frac{1}{a^2}\iint_\Sigma\left(x^3+az^2\right)dydz+\left(y^3+ax^2\right)dzdx+\left(z^3+ay^2\right)dxdy=\frac{1}{a^2}\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\frac{1}{a^2}\iint_{\Sigma_1}$

$=\frac{3}{a^2}\iiint_\Omega\left(x^2+y^2+z^2\right)dv-\frac{1}{a^2}\iint_{\Sigma_1}ay^2dxdy=\frac{3}{a^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi dr+\frac{1}{a}\iint_D y^2dxdy$　（4 分）

$=\frac{6\pi}{a^2}\cdot\left(-\cos\varphi\right)\big|_0^{\pi/2}\cdot\frac{r^5}{5}\Big|_0^a+\frac{1}{2a}\iint_D\left(x^2+y^2\right)dxdy=\frac{6\pi a^3}{5}+\frac{1}{2a}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^2\cdot rdr$

$=\frac{6\pi a^3}{5}+\frac{1}{2a}\cdot 2\pi\cdot\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^a=\frac{6\pi a^3}{5}+\frac{\pi a^3}{4}=\frac{29\pi a^3}{20}$ （6 分）

五、（每小题 7 分，本题共 14 分）.

12、求微分方程 $(x-y)dx+xdy=0$ 的通解。

解 2 转化到一阶线性微分方程，$(x-y)dx+xdy=0\Leftrightarrow x\frac{dy}{dx}-y=-x\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}+\left(-\frac{1}{x}\right)y=-1$，

从而 $p(x)=-\frac{1}{x},q(x)=-1,y=e^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}\left(\int(-1)e^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}dx+c\right)e^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}=e^{\ln x}\left(\int(-1)e^{\ln\frac{1}{x}}dx+c\right)$

$=x\left(\int(-1)\frac{1}{x}dx+c\right)=x\left(-\ln|x|+c\right)$

解 2 原方程变形去发现机会，$(x-y)dx+xdy=0\Leftrightarrow xdx-ydx+xdy=0\overset{x\neq0}{\Rightarrow}\frac{dx}{x}+\frac{xdy-ydx}{x^2}=0$，

$\Leftrightarrow d\ln|x|+d\left(\frac{y}{x}\right)=0\Leftrightarrow d\left(\ln|x|+\frac{y}{x}\right)=0,\ln|x|+\frac{y}{x}=\ln c_1,\frac{y}{x}=\ln\left(\frac{c_1}{|x|}\right),y=x\ln\left(\frac{c_1}{|x|}\right)$，

13、求微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-x}$ 的通解。

六、（每小题 7 分，本题共 21 分）（非化工类即 80 学时学生做）

14、（非化工类做）设 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq\frac{b_{n+1}}{b_n}\left(n=1,2,\cdots;a_n>0,b_n>0\right)$。证明：（1）若 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛；（2）若 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 发散。

分析 比值判别法仅仅是充分条件，不是充要条件，留意陷阱！要转化条件到定义的部分和极限说明问题。

证 由题设有 $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leq\frac{a_n}{b_n}\left(n=1,2,\cdots;a_n>0,b_n>0\right)$，令 $B_n=\sum_{i=1}^{n}b_i,A_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$，则数列 $\{B_n\},\{A_n\}$ 单调增，

转化条件 $0<\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leq\frac{a_n}{b_n}\leq\cdots\leq\frac{a_1}{b_1}=\lambda$，即 $\forall n\in N,a_n\leq\lambda b_n$,，就有 $A_n=\sum_{i=1}^{n}a_i\leq\sum_{i=1}^{n}\lambda b_i=\lambda B_n,B_n\geq\frac{1}{\lambda}A_n$。

（1）若 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 收敛，即有 $\lim_{n\to\infty}B_n=B$ 存在，进而 $A_n\leq\lambda B$，数列 $\{A_n\}$ 单调有界必有极限，即 $\lim_{n\to\infty}A_n=A$ 存在，故级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 收敛；

（2）若 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 发散，则正项级数的部分和数列 $\{A_n\}$ 发散且 $\lim_{n\to\infty}A_n=+\infty$，进而由 $B_n\geq\frac{1}{\lambda}A_n$，

可得 $\lim_{n\to\infty} B_n = +\infty$，$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散。（或由于是前份（1）的逆否命题，从而（1）成立必有（2）成立。）

15、（非化工类做）将函数 $\cos^2 x$ 展开成麦克劳林级数，并求出其成立区间。

解　由常用级数 $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, (-\infty,+\infty)$ 为收敛区间，及 $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$，从而由变量代换可

得 $\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}, 2x \in (-\infty,+\infty)$ 时收敛，进而

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!} = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$$，在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛。

16、（非化工类做）将函数 $f(x) = \begin{cases} x, -\pi \le x < 0 \\ 0, 0 \le x \le \pi \end{cases}$ 展开成傅里叶级数。

解　作周期延拓，得到 $F(x) = f(x \pm 2n\pi), F(\pm 2n\pi) = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{-\pi+0}{2}$；

由公式求傅里叶系数 $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} xdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 0dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-\pi}^{0} = -\frac{\pi}{2}$，

$$n>0, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nxdx = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{0} xd\sin nx = \left.\frac{x\sin nx}{\pi n}\right|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx$$

$$= \left.\frac{\cos nx}{\pi n^2}\right|_{-\pi}^{0} = \frac{1-\cos n\pi}{\pi n^2} = \frac{1}{\pi n^2}\left[1-(-1)^n\right]；$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nxdx = -\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{0} xd\cos nx = -\left.\frac{x\cos nx}{\pi n}\right|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx$$

$$= -\frac{\cos n\pi}{n} + \left.\frac{\sin nx}{\pi n^2}\right|_{-\pi}^{0} = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}；$$

进而 $F(x) \sim \frac{a_2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi n^2}\left[1-(-1)^n\right]\cos nx + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin nx\right)$，

回归本题要求则有 $f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi n^2}\left[1-(-1)^n\right]\cos nx + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin nx\right), x \in (-\pi, \pi)$

六、（每小题 7 分，本题共 21 分）（化工类即 64 学时学生做）

14、（化工类做）求曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2\\x^2+xy+y^2=1\end{cases}$在点$(1,0,1)$处的切线方程。

解　代入验证知点$(1,0,1)$在曲线上，先求方向向量，令$F=x^2+y^2+z^2-2,G=x^2+xy+y^2-1$，

则有方向向量$\vec{s}=\left.\left\{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}\right\}\right|_{(1,0,1)}$

$=\left.\left\{\begin{vmatrix}2y & 2z\\2y+x & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2z & 2x\\0 & 2x+y\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2x & 2y\\2x+y & 2y+x\end{vmatrix}\right\}\right|_{(1,0,1)}=\left\{\begin{vmatrix}0 & 2\\1 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 2\\0 & 2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 0\\2 & 1\end{vmatrix}\right\}=\{-2,4,2\}$，

于是切线方程为$\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-0}{4}=\dfrac{z-1}{2}$，即$\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=z-1$。

15、（化工类做）应用二重积分证明$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$。（教材例题）

分析　被积函数的原函数不能用初等函数表达，且是广义积分，广义积分是定积分的极限，不好求极限时可以放大缩小用夹逼准则；根据题目得到提示，需要转化到二重积分，二重积分有直角坐标与极坐标做法。

证　首先$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\lim\limits_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-x^2}dx$，设$D=[0,R]\times[0,R]$，

$D_1=\left\{(r,\theta)\middle|0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},0\le r\le R\right\},D_2=\left\{(r,\theta)\middle|0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},0\le r\le\sqrt{2}R\right\},D_1\subseteq D\subseteq D_2$，

于是$\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\iint\limits_D e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}dxdy=\int_0^R dx\int_0^R e^{-x^2}e^{-y^2}dy=\int_0^R e^{-x^2}dx\int_0^R e^{-y^2}dy=\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2$，

且由于被积函数大于零，从而$0\le\iint\limits_{D_1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy\le\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy\le\iint\limits_{D_2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$，

又$\iint\limits_{D_1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^R e^{-r^2}\cdot rdr=\dfrac{\pi}{2}\left.\left(-\dfrac{1}{2}e^{-r^2}\right)\right|_0^R=\dfrac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)$，$\lim\limits_{R\to+\infty}\dfrac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$，

进而$\iint\limits_{D_2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\dfrac{\pi}{4}\left(1-e^{-(\sqrt{2}R)^2}\right)=\dfrac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right)$，$\lim\limits_{R\to+\infty}\iint\limits_{D_1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\lim\limits_{R\to+\infty}\iint\limits_{D_2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\dfrac{\pi}{4}$，

由夹逼准则$\lim\limits_{R\to+\infty}\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2=\lim\limits_{R\to+\infty}\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\dfrac{\pi}{4},\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

16、（化工类做）求方程$y(x)y''(x)-(y'(x))^2=0$的通解。

解法 1　$y(x)\equiv0$的解容易验证，　不妨设$y(x)\ne0$，解$\dfrac{y(x)y''(x)-(y'(x))^2}{(y(x))^2}=\left(\dfrac{y'(x)}{y(x)}\right)'=0$，可得

$\frac{y'(x)}{y(x)}=c_1$，两边积分有 $\ln y(x)=\int\frac{y'(x)}{y(x)}dx=c_1x+c_2, y(x)=e^{c_1x+c_2}, y=ce^{c_1x}$（已含平凡解）

解法 2　可降阶微分方程一般解法。令 $y'=u$，则 $y''=\frac{du}{dy}=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}=u\frac{du}{dy}$，代入原方程有

$yu\frac{du}{dy}-u^2=u\left(y\frac{du}{dy}-u\right)=0, u=0, y=c$，或 $u\neq 0, y\frac{du}{dy}-u=0, \frac{du}{u}=\frac{dy}{y}$，两边积分得

$\ln u=\ln y+\ln c, u=\frac{dy}{dx}=cy, \frac{dy}{y}=cdx$，在两边积分得 $\ln y=cx+\ln c_1, y=e^{cx+\ln c_1}=c_1e^{cx}, y=c_2e^{cx}$