高等数学 2015 级下册试卷

2016．7．4

姓名：__________　学院与专业：____________________

一、填空题[每小题 4 分，共 20 分]

1、函数 $z=\dfrac{1}{\sin x\cos y}$ 在 $\underline{x=k\pi, y=l\pi+\dfrac{\pi}{2}, k, l\text{ 为整数}}$ 处间断.

2、函数 $z=\arctan\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,1)$ 处的全微分 $dz=\underline{\dfrac{1}{2}dx}$

3、函数 $u=e^x\sin(yz)$ 在点 $(1,1,1)$ 处沿方向 $\vec{l}=\{2,1,-2\}$ 的方向导数等于 $\underline{\dfrac{2\sin 1-\cos 1}{3}e}$

4、二次积分 $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$ 改变积分次序后等于 $\underline{\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y} f(x,y)dx}$

5、曲面 Σ 的方程为 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)(0\le z\le 1)$，并且取下侧，关于坐标的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$ 化为关于面积的曲面积分的结果为 $\underline{\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{xP+yQ-R}{\sqrt{x^2+y^2+1}}dS}$

二、（本题 8 分）讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\arctan\dfrac{1}{x^2+y^2}, x^2+y^2\ne 0\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的连续性，可导性和可微性。

解　（1）由于 $0\le\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\arctan\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\le\left|\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}\arctan\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\le\dfrac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{4}$，

而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{4}=0, \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}0=0$，从而由夹逼准则可得 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，

进而由连续定义可得函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续；

（2）由定义 $f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x}=0$，

$f_y'(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta y}=0$，因而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可导；

（3） 由于$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x'(0,0)\Delta x-f_y'(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

$=\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\arctan\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，

当$\Delta x=\Delta y$时有$\lim\limits_{\substack{\rho\to 0\\ \Delta x=\Delta y}}\dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\arctan\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\dfrac{\pi}{4}\neq 0$，

从而$\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x'(0,0)\Delta x-f_y'(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$不可能为零，即

$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x'(0,0)\Delta x-f_y'(0,0)\Delta y\neq o(\rho)$。进而由微分定义，可得$f(x,y)$在$(0,0)$处不可微。

三、（本题 8 分）设$z=f\left(x^2+y^2,\dfrac{x}{y}\right)$,$f(u,v)$有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot\dfrac{1}{y}$，进而$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x\dfrac{\partial f_1'}{\partial y}+\dfrac{\partial f_2'}{\partial y}\cdot\dfrac{1}{y}+f_2'\cdot\dfrac{-1}{y^2}$

$=2x\left(f_{11}''\cdot 2y+f_{12}''\cdot\dfrac{-x}{y^2}\right)+\left(f_{21}''\cdot 2y+f_{22}''\cdot\dfrac{-x}{y^2}\right)\cdot\dfrac{1}{y}-\dfrac{f_2'}{y^2}$

$=4xyf_{11}''-\dfrac{2x^2}{y^2}f_{12}''+2f_{21}''-\dfrac{x}{y^3}f_{22}''-\dfrac{f_2'}{y^2}=4xyf_{11}''+\left(2-\dfrac{2x^2}{y^2}\right)f_{12}''-\dfrac{x}{y^3}f_{22}''-\dfrac{f_2'}{y^2}$。

四、（本题 8 分）计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}[\sin(xy)+z]dv$，其中$\Omega$是由平面$x=\pm 1,y=\pm 1,z=0$及圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成的闭区域.

解 由于$\Omega:-1\le x\le 1,-1\le y\le 1,0\le z\le\sqrt{x^2+y^2}$关于$yOz$坐标面对称，而$\sin(xy)$是$x$的奇函数，从而$\iiint\limits_{\Omega}\sin(xy)dv=0$，

进而$I=\iiint\limits_{\Omega}[\sin(xy)+z]dvI=\iiint\limits_{\Omega}zdv=\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}dy\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}zdz\left(=4\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}zdz\right)$

$\int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}\dfrac{x^2+y^2}{2}dy=\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{x^2y}{2}+\dfrac{y^3}{6}\right)\Bigg|_{-1}^{1}dx=\int_{-1}^{1}\left(x^2+\dfrac{1}{3}\right)dx=\left(\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{1}{3}x\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\dfrac{4}{3}$。

五、（本题 8 分）设曲线L的方程为$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$，求力$\vec{F} = \left\{ e^y + x, xe^y - 2y \right\}$对从点$(0,0)$沿曲线$L$运动到点$(\pi, 2)$的质点所做的功.

解　依题意可知功为$W = \int\limits_L \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int\limits_L \left(e^y + x \right) dx + \left(xe^y - 2y \right) dy$，由于

$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^y + x \right) = e^y = \frac{\partial}{\partial x}\left(xe^y - 2y \right)$且在全平面连续，故积分与路径无关，

直接凑微分（或者取折线，自己去算算！）计算

$$W = \int_{(0,0)}^{(\pi,2)} \left(xdx - 2ydy \right) + \left(e^y dx + xe^y dy \right) = \int_{(0,0)}^{(\pi,2)} d\left(\frac{x^2}{2} - y^2 \right) + \left(e^y dx + xde^y \right)$$

$$= \int_{(0,0)}^{(\pi,2)} d\left(\frac{x^2}{2} - y^2 + xe^y \right) = \left(\frac{x^2}{2} - y^2 + xe^y \right)\Bigg|_{(0,0)}^{(\pi,2)} = \frac{\pi^2}{2} - 4 + \pi e^2 \text{。}$$

六、（本题 8 分）计算曲面积分$\iint\limits_\Sigma \left(x^2 + y^2 + z^2 \right) \mathrm{dS}$，其中曲面$\Sigma$为圆柱面方程为$x^2 + y^2 = 4\left(0 \le z \le 2 \right)$。

解　由于Σ关于坐标面xOz和yOz都对称，且$x^2 + y^2 + z^2$是y的偶函数也是x的偶函数，从而由对称性可转化为第一卦限来计算，$\iint\limits_\Sigma \left(x^2 + y^2 + z^2 \right) \mathrm{dS} = 4\iint\limits_{\Sigma_1} \left(4 + z^2 \right) \mathrm{dS}$，其中

$\Sigma_1 : y = \sqrt{4 - x^2} \left(0 \le x \le 2, 0 \le z \le 2 \right), y'_z = 0, y'_x = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$，进而

$$\iint\limits_\Sigma \left(x^2 + y^2 + z^2 \right) \mathrm{dS} = 4\iint\limits_D \left(4 + z^2 \right) \sqrt{1 + 0^2 + \frac{x^2}{4 - x^2}} dxdz = 4\int_0^2 \left(4 + z^2 \right) dz \int_0^2 \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}} dx$$

$$= 4 \cdot \left(4z + \frac{z^3}{3} \right)\Bigg|_0^2 \cdot \left(2\arcsin\frac{x}{2} \right)\Bigg|_0^2 = 32 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \right) \cdot \left(2\arcsin 1 - 0 \right) = \frac{128}{3}\pi \text{。}$$

七、（本题 8 分）计算曲面积分$\iint\limits_\Sigma x(8y+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - 4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为$x^2 + z^2 = y - 1\left(1 \le y \le 3 \right)$，它的法向量与$y$的正方向夹角恒大于$\frac{\pi}{2}$。

解：补充曲面$\Sigma_1 : y = 3\left(x^2 + z^2 \le 2 \right)$取右侧，与原曲面配合成所围区域的外侧，则由高斯公式得$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x(8y+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - 4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_\Omega \left(8y + 1 - 4y - 4y \right) dv$

$$=\iiint_{\Omega} dv=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{2}} rdr\int_{r^2+1}^{3} dy=2\pi\int_0^{\sqrt{2}} r\left(2-r^2\right)dr=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(2r-r^3\right)dr=2\pi\left(r^2-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}$$

$=2\pi$，

且 $\iint_{\Sigma_1} x(8y+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1} 2(1-3^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$

$$=-16\iint_{\Sigma_1}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-16\cdot\left(+\iint_{D}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\right)=-16\cdot\pi\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2=-32\pi$$

进而原式 $=2\pi-\left(-32\pi\right)=34\pi$ 。

八、（本题 7 分）求微分方程 $y'+y\tan x=\cos^2 x$ 的通解.

解：标准一阶线性微分方程，套公式 $y=e^{-\int\tan xdx}\left(\int\cos^2 xe^{\int\tan xdx}dx+c\right)$

$$=e^{-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx}\left(\int\cos^2 xe^{\int\tan xdx}dx+c\right)=e^{\int\frac{d\cos x}{\cos x}}\left(\int\cos^2 xe^{\int\tan xdx}dx+c\right)=e^{\ln\cos x}\left(\int\cos^2 xe^{-\ln\cos x}dx+c\right)$$

$$=\cos x\left(\int\cos xdx+c\right)=\cos x\left(\sin x+c\right)$$

九、（本题 7 分）求方程 $y''+3y'-4y=\mathrm{e}^x$ 的通解

解：对应齐次方程特征方程为

$$r^2+3r-4=0,r_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm5}{2},r_1=1,r_2=-4$$

非齐次项 $f\left(x\right)=e^x$，与标准式 $f\left(x\right)=P_n\left(x\right)e^{\lambda x}$ 比较得 $n=0,\lambda=1$

对比特征根为单根，推得 $k=1$，从而

$$y^*=x^kQ_n\left(x\right)e^{\lambda x}=axe^x,y^{*\prime}=a\left(x+1\right)e^x,y^{*\prime\prime}=a\left(x+2\right)e^x$$

代入方程得 $a\left(x+2\right)e^x+3a\left(x+1\right)e^x-4axe^x=e^x,\Rightarrow 5a=1,a=\frac{1}{5}$

从而通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{-4x}+\frac{x}{5}e^x$

十、[非化工类做]（本题 6 分）如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件（1）$\lim_{n\to\infty}u_n=0$；

（2）$u_{n+1}\le u_n\left(n=1,2,\cdots\right)$.证明此交错级数是收敛的，且其和 $S\le u_1$ 。

证　教材定理的证明，自己看书抄证明。绝对不能说根据莱布尼茨定理！
（讲过，也反复强调过，定理的证明方法比定理本身更重要）

十一、（非化工类做）（本题 6 分）把 $f\left(x\right)=\dfrac{x}{1+x-2x^2}$ 展开成关于 x 的幂级数，并指出其成立区间。

解 $f\left(x\right)=\dfrac{\left(1+2x\right)-\left(1-x\right)}{3\left(1+2x\right)\left(1-x\right)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+2x}\right)$，由于

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,x\in\left(-1,1\right);\frac{1}{1+2x}=\frac{1}{1-\left(-2x\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-2x\right)^n,\left(-2x\right)\in\left(-1,1\right),x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),$$

故 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{3}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-2x\right)^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1-\left(-2\right)^n}{3}x^n,x\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$。

十二、（非化工类做）（本题 6 分）将 $f(x)=\begin{cases}1,\left(-\pi\le x<0\right)\\3,\left(0\le x<\pi\right)\end{cases}$ 展开成傅里叶级数

解：$a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx=\dfrac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}1dx+\int_{0}^{\pi}3dx\right]=4$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}3\cos nxdx\right]=\left.\frac{\sin nx}{n\pi}\right|_{-\pi}^{0}+\left.\frac{3\sin nx}{n\pi}\right|_{0}^{\pi}=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}3\sin nxdx\right]=\left.\frac{-\cos nx}{n\pi}\right|_{-\pi}^{0}+\left.\frac{-3\cos nx}{n\pi}\right|_{0}^{\pi}$$

$=-\dfrac{1-\left(-1\right)^n}{n\pi}-3\dfrac{\left(-1\right)^n-1}{n\pi}=\dfrac{2-2\left(-1\right)^n}{n\pi}$， $f(x)=2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2-2\left(-1\right)^n}{n\pi}\sin nx,x\ne k\pi$

十、[化工类做]（本题 6 分）设 $z=f\left(x^2+y^2\right)$，其中 $f\left(u\right)$ 具有二阶连续偏导数，且满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\left(x^2+y^2\right)$，求 $f\left(u\right)$.

解：因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\left(u\right)\cdot 2x,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\left(u\right)\left(2x\right)^2+2f'\left(u\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(u\right)\cdot 2y,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\left(u\right)\left(2y\right)^2+2f'\left(u\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4f''\left(u\right)\left(x^2+y^2\right)+4f'(u)=4\left(x^2+y^2\right),\Rightarrow 4uf''\left(u\right)+4f'(u)=4u\ ,$$

即 $f''\left(u\right)+\dfrac{1}{u}f'(u)=1$，从而

$$f'(u)=e^{-\int\frac{1}{u}du}\left(\int e^{\int\frac{1}{u}du}du+c_1\right)=e^{-\ln u}\left(\int e^{\ln u}du+c_1\right)=\frac{1}{u}\left(\int udu+c_1\right)=\frac{1}{u}\left(\frac{u^2}{2}+c_1\right)=\frac{u}{2}+c_1\frac{1}{u}$$

$$f(u)=\int\left(\frac{u}{2}+c_1\frac{1}{u}\right)du=\frac{u^2}{4}+c_1\ln|u|+c_2$$

十一、[化工类做]（本题 6 分）求函数 $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$ 的极值。

解　令 $f_x=4x^3-2x-2y=0, f_y=4y^3-2x-2y=0\Rightarrow x=y, y^3-y=0, y=0或y=\pm1$，

解得驻点 $O(0,0),P(1,1),Q(-1,-1)$；

又 $f_{xx}=12x^2-2, f_{yy}=12y^2-2, f_{xy}=-2$，

在 $O(0,0)$ 点处 $A=-2,B=-2,C=-2,AC-B^2=0$，判定方法失效，但当 x 足够小且非零时由 $f(x,-x)=x^4+y^4>0, f(x,x)=2x^4-4x^2$ 为负，由定义可知 $f(0,0)=0$ 不是极值；

在 $P(1,1)$ 点处 $A=10>0,B=10,C=-2,AC-B^2=96>0$，从而有极小值 $f(1,1)=-2$；

在 $Q(-1,-1)$ 点处 $A=10>0,B=10,C=-2,AC-B^2=96>0$，从而有极小值 $f(-1,-1)=-2$。

十二、[化工类做]（本题 6 分）求函数 $z=\ln x+3\ln y$ 在条件 $x^2+y^2=25$ 下的极值.

解法一 将条件 $x^2+y^2=25$ 代入 $z=\ln x+3\ln y$

得 $f(x)=\ln x+\frac{3}{2}\ln(25-x^2)(0<x<5)$，令 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{-3x}{25-x^2}=\frac{25-4x^2}{x(25-x^2)}=0$ 得定义域内唯一的驻点 $x=\frac{5}{2}$，又 $x\in\left(0,\frac{5}{2}\right), f'(x)>0; x\in\left(\frac{5}{2},5\right), f'(x)<0$ 可得极大值也为最大值 $z_{\max}=f\left(\frac{5}{2}\right)=\ln\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\ln\left(25-\frac{25}{4}\right)=4\ln\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\ln 3$（比第二种方法更好！）。

解法二　令 $L=\ln x+3\ln y+\lambda(x^2+y^2-25)$

则 $L_x=\frac{1}{x}+2\lambda x=0, L_y=\frac{3}{y}+2\lambda y=0, x^2+y^2=25\Rightarrow x^2=\frac{-1}{2\lambda}, y^2=\frac{-3}{2\lambda}$

从而 $\frac{-2}{\lambda}=25\Rightarrow x^2=\frac{25}{4}, y^2=\frac{75}{4}, x=\frac{5}{2}, y=\frac{5\sqrt{3}}{2}, z_{\max}=4\ln\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\ln 3$（理由欠缺）