Preliminares

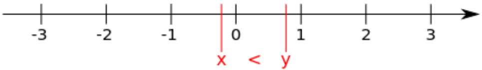
Números reales

Denotamos por $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Ejemplos:

$$0, -1, 1/2, \pi, e, \sqrt{2}, \sqrt{1}2$$

Denotaremos a los números reales mediante letras del alfabeto: $a, b, c, x, y, \ldots$ $A, B, C, \ldots$, con subíndices $x_1, x_2, \ldots$ o letras del alfabeto griego $\alpha, \gamma, \beta, \ldots$, etc.

Los números reales pueden representarse en la recta real:



Desigualdades

Definición. Decimos que $a < b$ (respectivamente $a \leq b$) si y sólo si $b - a > 0$ (resp. $a \leq b$).

La desigualdad $a < b$ también puede representarse como $b > a$.

Si representamos a los puntos a y b en la recta real y $a < b$ entonces a estará a la izquierda de b.

Propiedades.

1. Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.
2. Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$.
3. Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$.
4. Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$.

Se cumplen propiedades análogas para $\leq$.

Valor absoluto

Definición.

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto representa la destancia del punto al 0.

Ejemplo. $|-3| = 3$, $|-2| = 2$, $|5| = 5$, $|1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2})$.

Propiedades

1. $|a| = |-a|$
2. $|ab| = |a||b|$
3. $-|a| \leq a \leq |a|$

Propiedades.

1. $|a| < b$ si y sólo si $-b < a < b$.
2. $b < |a|$ si y sólo si $a < -b$ o $b < a$.
3. $|a| = b$ si y sólo si $a = b$ o $a = -b$.

Desigualdad del triángulo

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Definición. La distancia entre dos puntos a, b en la recta real se define como

$$d(a, b) = |b - a| = |a - b|$$

Ejemplo. Calcular $d(5, 1)$, $d(-1, -10)$ y $d(-1, 5)$.

Solución.

$$d(5, 1) = |5 - 1| = 4$$

$$d(-1, -10) = |-1 - (-10)| = 9$$

$$d(-1, 5) = |5 - (-1)| = 6$$

Conjuntos

Un conjunto puede pensarse como una colección de objetos del mismo tipo.

Los conjuntos pueden definirse de dos formas:

1. Listando todos sus elementos

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

2. Definiéndolos mediante una propiedad $P(x)$. La notación

$$\{x \colon P(x)\}$$

se lee *"El conjunto de los x tales que cumplen P(x)"*.

Nota. En los conjuntos no se toma en cuenta el orden ni las repeticiones. Por ejemplo:

$$\{a, b, b, c\}$$

denota el mismo conjunto que

$$\{a, b, c\}.$$

También

$$\{1, 2, 3\}$$

denota el mismo conjunto que

$$\{3, 1, 2\}$$

Ejemplo. $S = \{1, 2, \pi, 3\}$, $T = \{1, \pi\}$, $Q = \{5, 2, \pi\}$.

Ejemplo.

$$S = \{x \colon x > 3\}$$

S es el conjunto de los números reales mayores que 3.

El conjunto

$$S = \{x \colon |x| < 5\}$$

consiste de los números cuya distancia al 0 es menor que 5.

El conjunto

$$S = \{x\colon x^2 + 1 = 0\}$$

consiste de los números que satisfacen la ecuación $x^2 + 1 = 0$, el cual no tiene elementos, ya que esta ecuación no tiene soluciones en los reales. En este caso es un conjunto sin elementos.

Si S es un conjunto tenemos las siguientes notaciones con su significado correspondiente:

Símbolo	Significado
$\emptyset$	Conjunto vacío, el conjunto que no tiene elementos
$a \in S$	a es un elemento de S
$a \notin S$	a no es un elemento de S
$T \subseteq S$	T es un subconjunto de S
$T \nsubseteq S$	T no es un subconjunto de S
$T = S$	T es igual S
$T \neq S$	T no tiene los mismos elementos que S

Ejemplo En el primer ejemplo: $S = \{1, 2, \pi, 3\}$, $T = \{1, \pi\}$, $Q = \{5, 2, \pi\}$, se tiene que

$$1 \in S, \quad 5 \notin S, \quad T \subset S, \quad Q \not\subset S$$

Operaciones de conjuntos

Símbolo	Nombre	Significado
$S \cup T$	Unión	Consiste de los elementos que están en S o en T.
$S \cap T$	Intersección	Consiste de los elementos que tienen en común S y T.
$A - B$	Diferencia	Consiste de los elementos de A que no están en B.
$A \times B$	Producto Cartesiano	Consiste de los pares (a, b) tal que $a \in A$ y $b \in B$

Definición *(Intervalos)* Definimos los siguientes subconjuntos de la recta real.

Intervalos finitos:

$$(a, b) = \{x \colon a < x < b\}$$

$$[a, b) = \{x \colon a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \colon a < x \leq b\}$$

$$[a, b] = \{x \colon a \leq x \leq b\}$$

Intervalos infinitos:

$$(a, \infty) = \{x \colon x > a\}$$
$$[a, \infty) = \{x \colon x \geq a\}$$
$$(-\infty, a) = \{x \colon x < a\}$$
$$(-\infty, a] = \{x \colon x \leq a\}$$

Utilizamos estos intervalos para denotar las soluciones de una inecuación.

Ejemplo. Resolver la desigualdad $4x + 3 > 2x - 5$.

Solución. Las siguientes desigualdades son equivalentes:

$$4x + 3 > 2x - 5$$

$$4x > 2x - 8$$

$$2x > -8$$

$$x > -4$$

Por lo tanto la solución es $(-4, \infty)$.

Ejemplo. Resolver la desigualdad $|x-3| < 0.1$.

Solución. Usando las propiedades del valor absoluto

$$-0.1 < x - 3 < 0.1$$

$$3 - 0.1 < x < 3 + 0.1$$

$$2.9 < x < 3.1$$

Por lo tanto las soluciones son los números reales en el intervalo $(2.9, 3.1)$.

Ejemplo. Resolver $|2x - 7| > 3$.

Solución. $|2x - 7| > 3$ es equivalente a $2x - 7 > 3$ o $2x - 7 < -3$. Esto equivale a $x > 5$ o $x < 2$. Por lo tanto la solución es $(-\infty, 2) \cup (5, \infty)$.

Ejemplo. Muestre que la desigualdad

$$|(3x + 2) - 8| < 1$$

es equivalente a $|x - 2| < 1/3$.

Solución. Las siguientes desigualdades son equivalentes:

$$|(3x+2)-8| < 1$$

$$|3x-6| < 1$$

$$|3(x-2)| < 1$$

$$|3||x-2| < 1$$

$$3|x-2| < 1$$

$$|x-2| < 1/3$$

El plano cartesiano

Definimos el *plano cartesiano* $\mathbb{R}^2$ como el *producto cartesiano* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$$

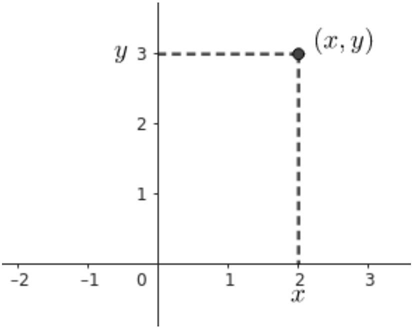
.

Si $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, P se le llama par ordenado, a se le conoce como la abscisa y b la ordenada, alternativamente, se le llama primera y segunda coordenada, respectivamente.

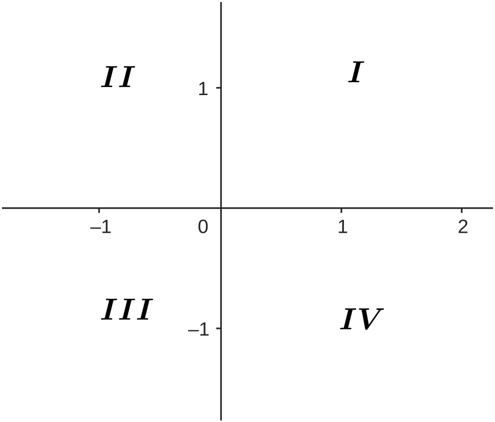
Dos pares ordenados son iguales si son iguales coordenada a coordenada, es decir,

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{si y sólo si} \quad a = c \text{ y } b = d.$$

El plano cartesiano también se le llama espacio Euclidiano de dimensión 2. Este conjunto puede representarse geométricamente mediante los ejes cartesianos:

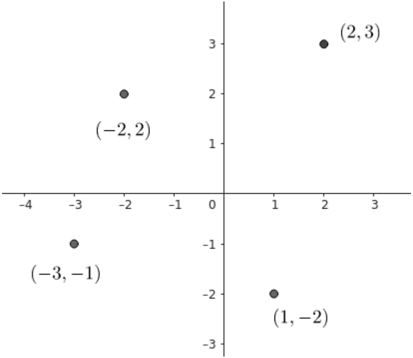


El plano cartesiano está dividido en cuadrantes:



El punto $O = (0, 0)$ se le conoce como el origen, el eje horizontal como el eje x y el eje vertical como el eje y.

Ejemplo. Representar en el plano cartesiano los puntos $(2,3)$, $(-2,2)$, $(-3,-1)$ y $(1,-2)$.



Definición. *(Suma y producto por un escalar)* Si $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ son dos pares ordenados, definimos

1. $P_1 + P_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
2. $cP_1 = c(x_1, y_1) = (cx_1, cy_1)$.

Definición Definimos la norma de un par ordenado $P = (x, y)$ como

$$||P|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

.

Teorema de Pitágoras Para cualquier triángulo rectángulo, con catetos a, b e hipotenusa c, se cumple la igualdad

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Desigualdad del triángulo

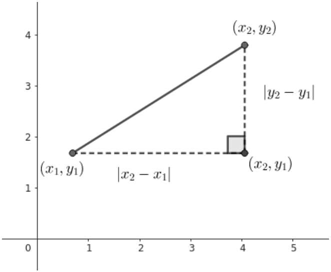
$$||P1 + P2|| \leq ||P1|| + ||P_2||.$$

Proposición *(Distancia entre dos puntos)* La distancia entre los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ en el plano cartesiano es:

$$d(P_1, P_2) = ||P1 - P2|| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Demostración. Esta fórmula se deduce directamente del Teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$



Teorema *(Punto medio)* El punto medio del segmento que va de (x_1, y_1) a (x_2, y_2) es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Ejemplo. Calcula la distancia de $P_1 = ((1, 2)$ y $P_2 = (3, 4)$.

Ejemplo. Calcular el punto medio de $(1, 2)$ y $(3, 4)$.

Gráfica de una ecuación

Definición Supongamos que tenemos una ecuación en dos variables $P(x, y) = 0$.

Entonces, el lugar geométrico o gráfica de la ecuación son el conjunto de puntos

$$\{(x, y) \colon f(x, y) = 0\}$$

También dicho conjunto se conoce como los ceros del polinomio $P(x, y)$.

Ejemplo. $y = x^3 - 8x^2 + 15x$ (equivalentemente, $y - x^3 + 8x^2 - 15x = 0$). Tabulamos algunos valores y damos un esbozo de la gráfica:

x	0	1	2	3	4	5
y	0	8	6	0	-4	0

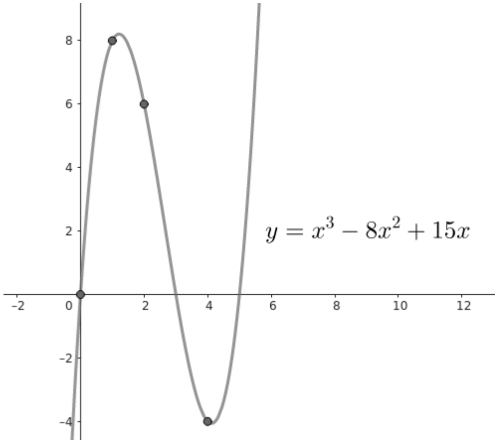
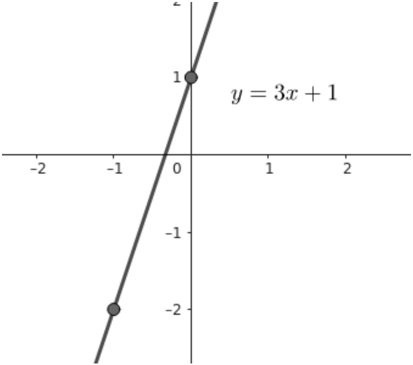


Figura 1: Gráfica de $y = x^3 - 8x^2 + 15x$

Ejemplo. Graficar la función $y = 3x + 1$. Esta es una recta, por lo tanto basta con tabular dos puntos:

x	0	-1
y	1	-2

luego unimos dichos puntos mediante una recta:



Ejercicio. Utilizar un programa graficador para trazar la gráfica.

Ejemplo. La ecuación

$$x^2 + y^2 = 0$$

sólo tiene una solución $(0, 0)$. La gráfica es un solo punto.

Cuadro 5: Una ecuación de primer grado representa una recta

Nombre	Ecuación
Recta	$Ax + By + C = 0$
	$y = ax + b$

Cuadro 6: Ecuaciones de las cónicas en su forma canónica

Nombre	Ecuación
Parábola	$y = ax^2 + bx + c$, $x = ay^2 + by + c$
Elipse	$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$
Hipérbola	$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$

La ecuación general de una cónica está dada por un polinomio de grado 2 en las variables x y y.

Ejemplo (Folium de descartes)

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad a = 1$$

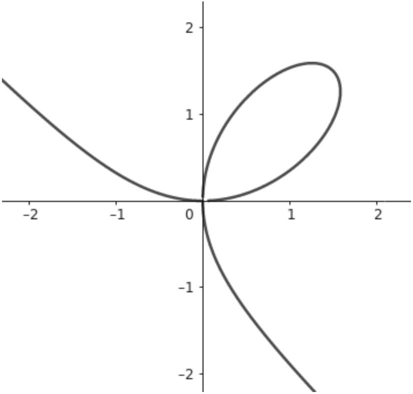
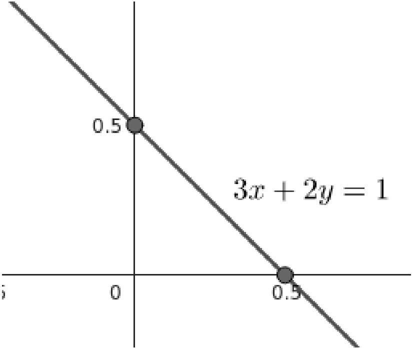


Figura 2: Folium de Descartes $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

La recta

Ejemplo. Graficar la recta $3x + 2y = 1$. Tabulamos

x	0	$1/2$
y	$1/3$	0



Luego trazamos la recta que conecta los puntos $(0, 1/2)$ y $(1/3, 0)$.

Nota. Podemos elegir los valores a nuestra conveniencia. Usualmente se escoge $x = 0$ o $y = 0$ y se encuentra su valor correspondiente.

Definición Si L es una recta con ecuación $y = mx + b$, entonces el número m es llamada la pendiente de la recta L

Proposición. Si una recta $L : y = mx + b$ pasa por dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) entonces la pendiente está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Entonces, si la recta pasa por dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), si tomamos cualquier otro punto arbitrario, por la proposición anterior tendremos que

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

luego la ecuación de la recta que pasa por dichos puntos está dado por

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Ejemplo. Calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(3, 5)$.

Teorema. Si L_1 y L_2 son dos rectas no verticales diferentes que tienen pendientes m_1 y m_2 respecivamente, entonces

1. L_1 y L_2 son paralelas si y sólo si $m_1 = m_2$.
2. L_1 y $L2$ son perpendiculares si y sólo si $m_1 m_2 = -1$.