Unidad I. Funciones.

Temas

- Concepto de función.
- Gráficas de funciones
- Operaciones con funciones
- Función inversa
- Funciones polinómicas y algebraicas
- Funciones trigonométricas
- Función logaritmo y exponencial
- Aplicaciones

Concepto de función

Definición. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Una función (real-valuada) $f\colon A \to \mathbb{R}$ es una correspondencia que asigna a cada elemento $x \in A$ un único valor $f(x) \in \mathbb{R}$.

Para la función $f\colon A \to \mathbb{R}$:

1. El conjunto A se le llama el *dominio* de la función. El dominio de una función f también se suele denotar por $\mathrm{Dom}(f)$.
2. El conjunto
$$f(A) = \{f(x)\colon x \in A\}$$
que consiste de todos los posibles valores de la función f se le conoce como *imagen* o *rango*.

3. La notación $f(x)$ se lee "f de x". Si calculamos el valor $f(a)$ en un punto a, se dice que estamos evaluando la función en a.
4. Una función puede denotarse también como

$$y = f(x),$$

en ese caso a x se le conoce como variable independiente y a y variable dependiente.

Ejemplo. Algunos ejemplos de funciones:

1. *Función constante*. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$.
2. *Función lineal*. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$.
3. *Función racional*. $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x+1}{x}.$$

4. *Función por partes*. $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, entonces

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ 1, & x \in [1,2] \end{cases}$$

5. *Función booleana*. $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$, dada por f(0)=1 y $f(1) = 0$.

Ejemplo. Evaluar los puntos $a = 1$, $a = 0$ y $a = -1$ en la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x^2 + 1$.

Solución.

$$f(1) = 3(1)^2 + 1 = 4$$

$$f(0) = 3(0)^2 + 1 = 1$$

$$f(-1) = 3(-1)^2 + 1 = 4$$

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x+5)/(x-1)$. Encontrar un número a tal que $f(a) = 3/5$.

Solución.

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{3}{5} \\ \frac{x+5}{x-1} &= \frac{3}{5} \\ 5(x+5) &= 3(x-1) \\ 5x - 3x &= -25 - 3 \\ 2x &= -28 \\ x &= -14 \end{aligned}$$

Comprobamos $f(-14) = -9/(-15) = 3/5$.

Ejemplo. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x^2$. En este caso el dominio son todos los números reales. La imagen de la función es el intervalo $[0, \infty)$ ya que x^2 son números positivos, y cualquier $a \in [0, \infty]$, $f(\sqrt{a}) = a$.

Problema. Uno de los problemas típicos es dada una fórmula $y = f(x)$ determinar el dominio más grande donde la función esté definida.

Ejemplo. Determinar el dominio de la función $f(x)$ dado por la ecuación

$$y = \sqrt{x-2}$$

Solución. La raíz está bien definida cuando el radicando es positivo, es decir, $x - 2 \geq 0$, luego $x \geq 2$. Por lo tanto, el dominio es $[2, \infty)$.

Ejemplo. Determinar el dominio de la función

$$y = \sqrt{x^2 - 9}$$

Solución. La función está bien definida si $x^2 - 9 \geq 0$, desarrollando

$$x^2 \geq 9$$
$$|x| \geq 3$$
$$x \leq -3 \quad o \quad x \geq 3$$

Por lo tanto el dominio es $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

Ejemplo. Si $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$

Gráfica de una función

Definición La gráfica de una función $f : A \to \mathbb{R}$ es el conjunto $G_f = \{(x, f(x)) \colon x \in A\}$. Este conjunto puede representarse en el plano cartesiano.

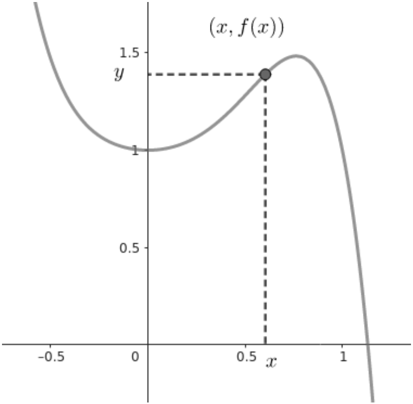


Figura 1: Gráfica de una función.

Ejemplo Utilizar un programa para graficar las siguientes funciones:

1. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
2. $f(x) = x^4 + 1$
3. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-5}$

Analizar los dominios de las funciones.

Ejemplo. *(Función por partes)* Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x<1 \\ 1, & x=1 \\ x+1, & x>1 \end{cases}$$

Trazar su gráfica.

Solución. Graficamos las rectas $x-1$, $x+1$ y la función constante $y=1$. Luego, tomamos los segmentos de gráfica de acuerdo a los intervalos indicados en la función.

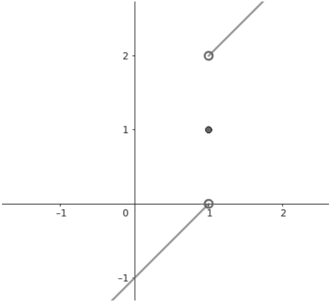


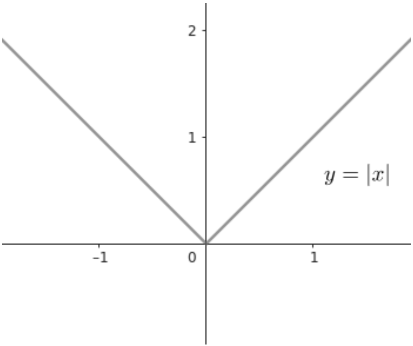
Figura 2: Gráfica de una función por partes

Ejemplo. Trazar la gráfica de la función $f(x) = |x|$.

Solución. La función $f(x)$ puede expresarse por partes como:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Luego, para x negativo se encontrará sobre la recta $y = -x$, y para positivos sobre la recta $y = x$.



Ejemplo. Graficar la función

$$f(x) = 3 - \frac{x}{|2x|}, \quad x \neq 0.$$

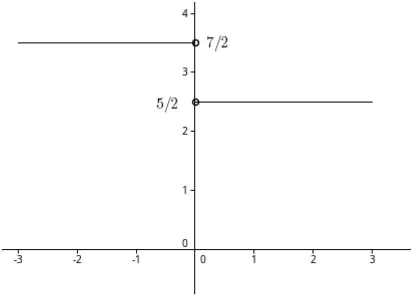
Solución. Aplicamos la definición de valor absoluto

$$f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{x}{2x}, \ x > 0 \\ 3 - \frac{x}{(-2x)}, \ x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}, \ x > 0 \\ 3 + \frac{1}{2}, \ x < 0 \end{cases} \quad = \begin{cases} \frac{5}{2}, \ x > 0 \\ \frac{7}{2}, \ x < 0 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}, & x > 0 \\ \frac{7}{2}, & x < 0 \end{cases}$$



Operaciones con funciones

Definición. Dados las funciones f y g definimos la suma y producto de funciones de la siguiente manera:

1. $$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
2. $$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

La inversa (multiplicativa) de una función la definimos como

3. $$(1/f)(x) = 1/f(x), \quad f(x) \neq 0$$

El dominio de la suma y el producto es la intersección de los dominios
$$\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$$

El dominio de la inversa es $\mathrm{Dom}(f) - \{x \colon f(x) = 0\}$.

Nota. En particular si $f = c$ es una función constante, tenemos definido el producto de una función por un escalar cf, de la siguiente manera: $(cf)(x) = cf(x)$.

Ejemplo. Si $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = 3x + 1$. Calcule $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ y f/g.

Solución.

$$(f + g)(x) = \sqrt{4 - x^2} + 3x + 1$$

$$(f - g)(x) = \sqrt{4 - x^2} - (3x + 1)$$

$$(f \cdot g)(x) = \sqrt{4 - x^2}(3x + 1)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{3x + 1}$$

El dominio de f es $(-2, 2)$ y el dominio de g es $\mathbb{R}$, luego el dominio de $f + g$, $f - g$ y $f \cdot g$ es $(-2, 2) \cap \mathbb{R} = (-2, 2)$. El dominio de f/g es $\mathbb{R}$ excepto $x = -1/3$ que es donde se anula el denominador.

Ejemplo. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = \sqrt{x-4}$ determine: $f+g$, $f \cdot g$, f/g, además, determinar el dominio de dichas funciones.

Solución.

$$(f+g)(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-4}$$

$$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x+1}\sqrt{x-4}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-4}}$$

El dominio de f es $[-1,\infty)$ y de g es $[4,\infty)$, luego $f+g$ y $f\cdot g$ tienen dominio

$$[-1,\infty)\cap[4,\infty)=[4,\infty)$$

Para f/g es $[4,\infty]-\{4\}=(4,\infty)$.

Definición *(Composición de funciones)* Supongamos que f y g son dos funciones, la *composición* $f \circ g$ (“f compuesta con g”) se define como:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

el dominio de dicha función es el conjunto de puntos en el dominio de g cuya imagen bajo g está en el dominio de f, formalmente:

$$\{x \in \mathrm{Dom}(g) \colon f(x) \in \mathrm{Dom}(f)\}$$

Ilustración

Ejemplo. Si $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 5$, encontrar $(f \circ g)(x)$ y $g \circ f$

Solución.

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= (g(x))^2 - 1 \\ &= (3x+5)^2 - 1 \\ &= 9x^2 + 30x + 24 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
&= 3(f(x)) + 5 \\
&= 3(x^2 - 1) + 5 \\
&= 3x^2 + 2
\end{aligned}
$$

De este ejemplo, podemos notar que $f \circ g$ no es igual a $g \circ f$.

Ejemplo. Sean

$$f(x) = \frac{5}{x-2}, \quad g(x) = 2x+1$$

Calcular $f \circ g$.

Solución

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= \frac{5}{g(x)-2} \\
&= \frac{5}{(2x+1)-2} \\
&= \frac{5}{2x-1}
\end{aligned}$$

Ejemplo. Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 1$. Calcular $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$.

Solución.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x)^2 - 1 = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$$

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

$$g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x)^2 - 1 = (x^2 - 1)^2 - 1$$

Veremos posteriormente la *Regla de la Cadena*, el cual es un teorema para derivar una composición de funciones. En dicho teorema es necesario identificar una función dada como composición de dos funciones.

Ejemplo. Expresar la función $h(x) = (4x^2 + 1)^3$ como la composición de dos funciones, de dos maneras distintas.

Solución. Si definimos $f(x) = x^3$, $g(x) = 4x^2 + 1$, verificamos que $f \circ g = h$:

$$f \circ g(x) = f(4x^2 + 1) = (4x^2 + 1)^3 = h(x)$$

Alternativamente, si $F(x) = (4x + 1)^3$ y $G(x) = x^2$, tenemos que

$$F \circ G(x) = F(x^2) = (4x^2 + 1)^3 = h(x)$$

Ejemplo Expresar

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

como la composición de dos funciones.

Función inyectiva

Definición. Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es *inyectiva* (o una función *uno a uno*) si cada número de su imagen le corresponde exactamente un número en su dominio. Formalmente:

si $f(x_1) = f(x_2)$ *entonces* $x_1 = x_2$

equivalentemente,

si $x_1 \neq x_2$ *entonces* $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ejemplo. Demostrar que la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = 3x + 1$ es inyectiva.

Demostración Sean x_1, x_2 tal que $f(x_1) = f(x_2)$, entonces

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ 3x_1 + 1 &= 3x_2 + 1 \\ 3x_1 &= 3x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Ejemplo. Verifique la función $f(x) = x^2$ no es inyectiva. Toma los puntos $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$, se tiene que $f(-2) = f(2)$.

Criterio de la recta Horizontal Una función f es inyectiva si y sólo si cualquier recta horizontal intersecta a la gráfica de f en a lo más en un punto.

Ejemplo. Aplique el criterio de la recta horizontal para determinar si la función es uno a uno.

1. $$f(x) = 4x - 3$$

2. $$f(x) = |x|$$

3. $$f(x) = (x+1)^4$$

4. $$f(x) = \frac{3x+4}{x-2}$$

Proposición *(Inversa por la izquierda)* Una función f es inyectiva si y sólo si existe una función función $g\colon f(A) \to \mathbb{R}$ tal que

$$g \circ f(x) = x.$$

Ejemplo. Demuestre que la función $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ es inyectiva.

Demostración. Considera la función $g(y) = \sqrt[3]{y^2 - 1}$, tenemos que

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= \sqrt[3]{f(x)^2 - 1} \\ &= \sqrt[3]{(x^3 + 1) - 1} \\ &= \sqrt[3]{x^3} \\ &= x \end{aligned}$$

se cumple la proposición anterior, por lo tanto es inyectiva.

Definición *(Función inversa)* Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función, la función inversa de f es una función $f^{-1}\colon f(A) \to \mathbb{R}$ tal que

$$f^{-1} \circ f(x) = x \quad y \quad f \circ f^{-1}(y) = y$$

Ejemplo Calcular la inversa de la función

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

Solución La función es uno a uno, por lo tanto podemos encontrar su función inversa (en su dominio).

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x+3}{x-1} \\ y(x-1) &= 2x+3 \\ yx - y &= 2x+3 \\ yx - 2x &= y+3 \\ x(y-2) &= y+3 \\ x &= \frac{y+3}{y-2} \end{aligned}$$

Por lo tanto la función inversa es

$$f^{-1}(y) = \frac{y+3}{y-2}$$

Vamos a comprobar $f \circ f^{-1}(y) = y$:

$$\begin{aligned}
f \circ f^{-1}(y) &= \frac{2g(x)+3}{g(x)-1} \\
&= \frac{2\left(\frac{y+3}{y-2}\right)+3}{\frac{y+3}{y-2}-1} \\
&= \frac{\frac{2(y+3)+3(y-2)}{y-2}}{\frac{y+3-(y-2)}{y-2}} \\
&= \frac{5y}{5} = y
\end{aligned}$$

Comprobar que $f^{-1} \circ f(x) = x$.

Funciones polinómicas y algebraicas

Definición. Una *función polinomial* (real) es una función que tiene la forma:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n \neq 0$$

donde los coeficientes son números reales y los exponentes son enteros no negativos.

El término a_n se le conoce como coeficiente principal y n es el grado del polinomio.

El dominio de una función polinomial es todo $\mathbb{R}$.

Ejemplo. La función $p(x) = 3x^5 - x^2 + 7x - 1$ es una función polinomial de grado 5 con coeficiente principal 3.

El dominio de una función polinomial es todo $\mathbb{R}$.

Cuadro 1: Polinomios de grado 0, 1 y 2.

Grado	Función polinomial	Gráfica
0	a_0	recta horizontal
1	$a_1x + a_0$	recta
2	$a_2x^2 + a_1x + a_0$	parábola

Una *función racional* es una función obtenida como el cociente de dos polinomios:

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad q(x) \neq 0,$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales.

El dominio de una función racional es $\mathbb{R}$ menos los puntos donde se anula el donominador.

Ejemplo. La función

$$R(x) = \frac{x^5+1}{x^2-1}$$

es una función racional cuyo dominio es

$$\mathbb{R} - \{1, -1\}$$

Una *función algebraica* es aquella formada por un número finito de suma, productos y raíces. Por ejemplo,

$$f(x) = 5x^4 - 2\sqrt[3]{x} + \frac{x(x^2+5)}{x^3+\sqrt{x}}$$

es una función algebraica.

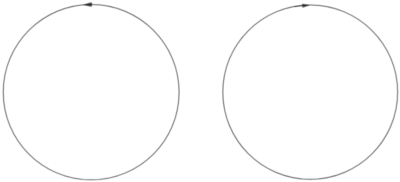
Las funciones que no son algebraicas son llamadas *trascendentes* dentro de esta familia están las funciones logarítmicas, las funciones trigonométricas y exponenciales.

Funciones trigonométricas

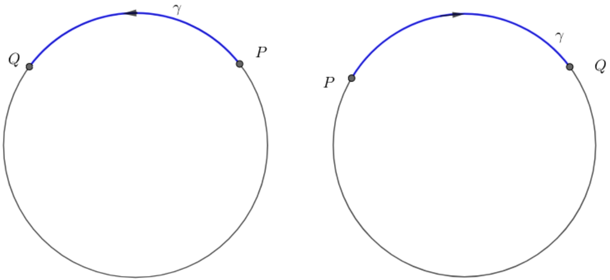
Orientación

Un círculo tiene dos *orientaciones*, la *orientación positiva* es la que se obtiene recorriendo el círculo en el sentido antihorario, y la *orientación negativa* es la que se obtiene recorriendo el círculo en el sentido de las manecillas del reloj.

En el diagrama, el círculo del lado izquierdo tenemos la orientación positiva y en el lado derecho la orientación negativa.



Cualquier arco γ que vaya de un punto P un punto Q también tiene una orientación positiva o negativa.



Definimos el signo de γ como

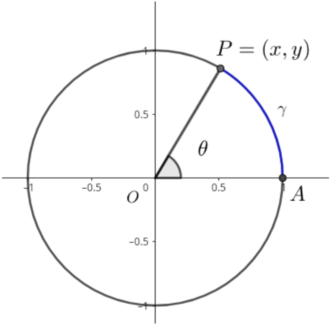
$$\operatorname{sgn}(\gamma) = \begin{cases} 1, & \gamma \text{ tiene orientación positiva} \\ -1, & \gamma \text{ orientación negativa} \end{cases}$$

Círculo Unitario El círculo unitario es el círculo de radio 1 con centro en $O = (0, 0)$.

Consideremos un punto $P(x, y)$ en el círculo unitario y sea $A = (1, 0)$. Sea γ el arco que va de A a P. Definimos el ángulo del punto P como:

$$\theta = \operatorname{sgn}(\gamma) \cdot \operatorname{long}(\gamma)$$

donde $\operatorname{long}(\gamma)$ es la longitud del arco γ.

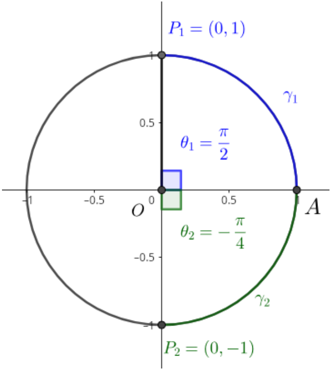


Ejemplo Considere los puntos P_1 y P_2 con sus arcos correspondientes, como se muestra en la figura. Tenemos

$$\operatorname{long}(\gamma_1) = \frac{\pi}{2} = \operatorname{long}(\gamma_2)$$

por otra parte

$$\operatorname{sgn}(\gamma_1) = 1, \quad \operatorname{sgn}(\gamma_2) = -1$$



Fórmula de conversión

Los ángulos también se pueden medir en unidades llamados grados. Un ángulo medido en grados se denota por θ°. Por definición 1° equivale $180/\pi$. Entonces tenemos la siguiente fórmulas de conversión:

De radianes a grados

$$\alpha \to \left(\frac{180\alpha}{\pi}\right)^\circ$$

De grados a radianes

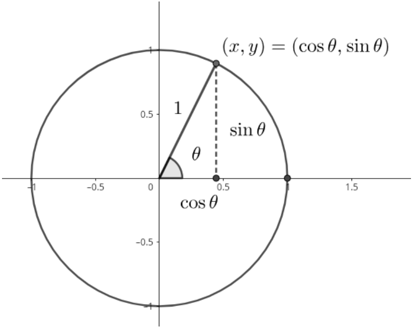
$$\alpha^\circ \to \alpha\left(\frac{\pi}{180}\right)$$

Ejemplos.

Radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	2π
Grados	0°	30°	45°	60°	90°	360°

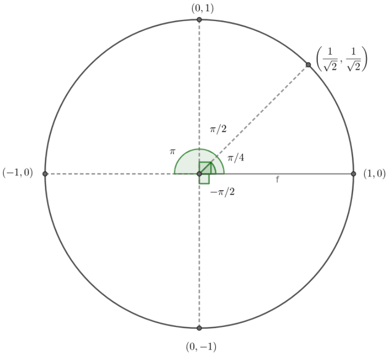
Definición *(Del seno y del coseno)* Sea θ un ángulo (en radianes) y sea P la intersección del lado terminal del ángulo y la circunferencia unitaria. Si $P = (x, y)$ entonces definimos

$$\cos(\theta) = x, \quad \sin(\theta) = y$$



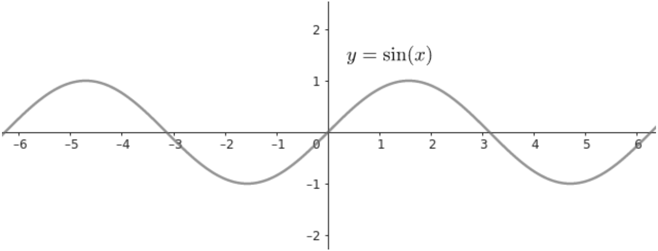
De la definición se sigue que $\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$ están definidos para cualquier $\theta \in \mathbb{R}$, por lo tanto, el dominio de la función $\cos(x)$ y $\sin(x)$ es $\mathbb{R}$.

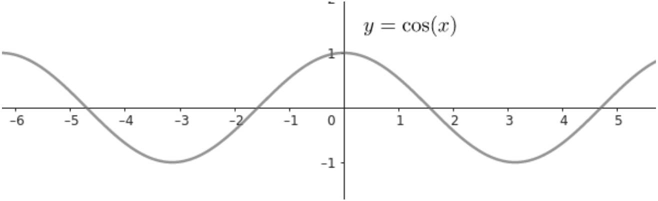
Ejemplo



θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$-\pi/2$
$cos(\theta)$	1	$1/\sqrt{2}$	0	-1	0
$sen(\theta)$	0	$1/\sqrt{2}$	1	0	-1

Gráficas de la función *sen*(x) y *cos*(x)





Algunas propiedades básicas.

Propiedades

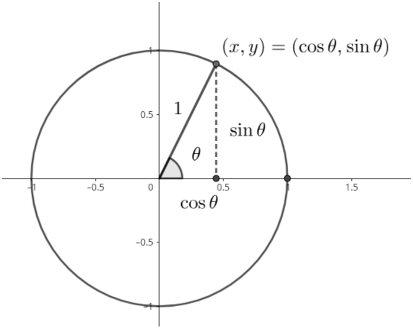
$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

Identidad Pitagórica

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

Demostración. Aplicamos el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que se muestra en el diagrama:



Proposición *(Periodicidad del seno y coseno)*

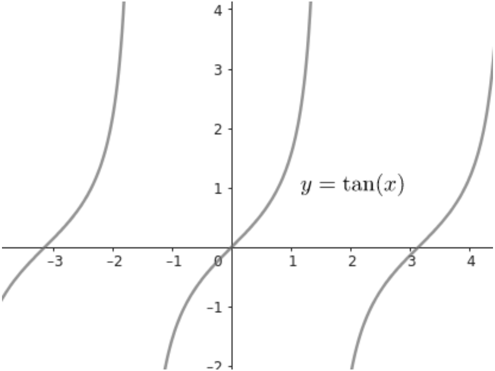
$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta), \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$$

Definición. La función tangente y secante se definen de manera respectiva como:

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \quad \sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}, \quad \cos(\theta) \neq 0$$

Las funciones cotangente y cosecante se definen como:

$$\cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \quad \csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}, \quad \sin(\theta) \neq 0$$



Proposición. *(Periodicidad de la tangente y cotangente)*

$$\tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$$

$$\cot(\theta + \pi) = \cot(\theta)$$

Al emplear la identidad pitagórica podemos derivar dos identidades.

Proposición.

$$\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$$

$$1 + \cot^2(\theta) = \csc^2(\theta)$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) &= 1 \\
\frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} + \frac{\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} &= \frac{1}{\cos^2(\theta)} \\
\tan^2(\theta) + 1 &= \sec^2(\theta)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) &= 1 \\
\frac{\sin^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} + \frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} &= \frac{1}{\sin^2(\theta)} \\
1 + \cot^2(\theta) &= \csc^2(\theta)
\end{aligned}
$$

Nota

- Para calcular el valor de una función trigonométrica en un ángulo dado en grados se debe convertir primero a radianes. Por ejemplo, $\cos(60^\circ) = \cos(60(\pi/180)) = \cos(\pi/3) = 1/2$.
- Si un ángulo θ no lo acompaña el símbolo de grado, se sobreentiende que está dado en radianes. Por ejemplo, $\cos(90)$ se entiende que son 90 radianes, no 90 grados.

Función logaritmíca y exponencial

Recordemos algunas propiedades de los exponentes:

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

donde x, y son enteros (positivos, negativos o cero). Se tiene también que

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad n > 0$$

Si $a \geq 0$

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Entonces, tiene sentido hasta ahora una potencia a^x, cuando x es cualquier racional. Tiene sentido preguntarse por el significado de una potencia cuyo exponente sea un número real, por ejemplo, $a^\pi, a^{\sqrt{2}}$.

La definición de a^x se puede derivar de las funciones *logaritmo natural* $\ln(x)$ y la función exponencial e^x.

La función exponencial se puede definir formalmente por medio de límites, esto es:

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

este concepto será tratado con más detalle en el siguiente capítulo.

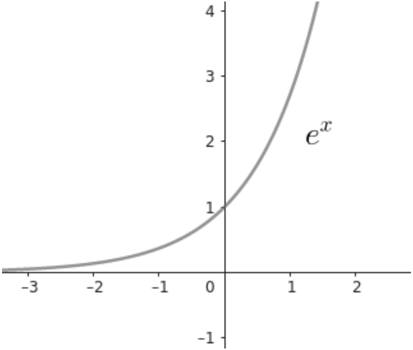
Por el momento asumiremos las siguientes propiedades:

1. El valor de e^x existe para cualquier número real x.
2. Se cumplen las leyes de los exponentes.

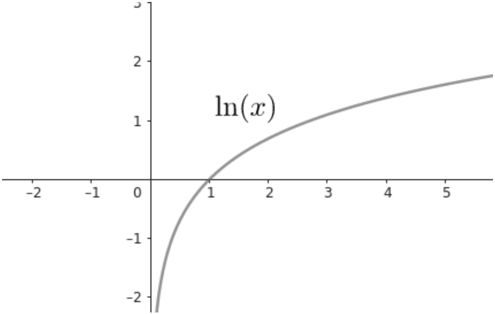
La constante $e = e^1$ tiene una valor aproximado de 2.718281828459.

Proposición La función $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es inyectiva, y su imagen es el intervalo $(0, \infty)$.

Vea la gráfica de la exponencial.



Por la proposición de la sección anterior, existe una función inversa de la exponencial, denotada por $\ln(x)\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, y llamada el logaritmo natural.



Tenemos las siguientes propiedades del logaritmo natural:

Proposición

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
3. $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$
4. $\ln x^n = n \ln x$
5. $\ln e = 1$

Demostración. Tenemos que $e^x = y$ si y sólo si $x = \ln y$

1. Como $e^0 = 1$, se tiene que $0 = \ln(1)$.
2. $e^{\ln x + \ln y} = e^{\ln x} e^{\ln y} = xy$, por lo tanto $\ln x + \ln y = \ln xy$.
3. $e^{\ln x - \ln y} = e^{\ln x} e^{-\ln y} = e^{\ln x}/e^{\ln y} = x/y$, por lo tanto $\ln x - \ln y = \ln x/y$.
4. $e^{n \ln(x)} = (e^{\ln x})^n = x^n$. Por lo tanto, $\ln(x^n) = n \ln(x)$.
5. $e^1 = e$, por lo tanto $1 = \ln e$.

Definición. Definimos la potencia de un número real a^x de la siguiente manera:

$$a^x = e^{x \ln a}$$

Aplicaciones

Ejemplo. El volumen de un gas a presión constante es directamente proporcional a la temperatura absoluta y la temperatura de $175°$ el gas ocupa 100 m^3. (a) Encuentre la función de volumen. (b) ¿Cuál es el volumen del gas a una temperatura de $140°$?

Solución. (a) $f(x) = kx$, $f(175) = 100$, por lo tanto $100 = k(175)$

$$k = \frac{100}{175} = \frac{4}{7}$$

Luego, $f(x) = \frac{4}{7}x$

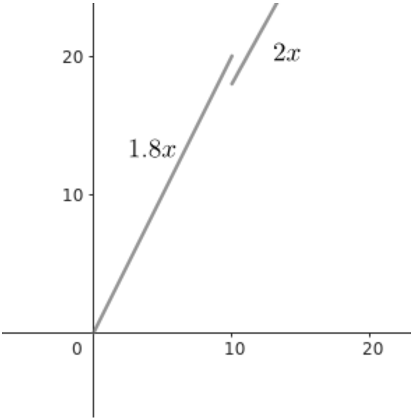
(b) $f(140) = \frac{4}{7}(140) = 80$. Concluimos que el volumen a 140° es $80\ m^3$.

Ejemplo. Un mayorista vende un producto por una libra (o fracción de libra); si se ordenan no más de 10 libras el mayorista cobra \$2 por libra. Sin embargo, cobra 1.80 si ordenan más de 10 lb. (a) Encuentre la función de costo. (b) Dibuje la gráfica de dicha función. (c) Determine el costo total de una orden de 9.5 lb y y una orden de 10.5 lb.

Solución (a) $c(x)$ denota la función costo en dólares de una orden de x libras. Entonces

$$c(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 10 \\ 1 \cdot 8x, & 10 < x \end{cases}$$

(b) La gráfica de la función se muestra a continuación:



(c) $c(9.5) = 2(9.5) = 19$, $c(10.5) = (1.8)(10.5) = 18.90$.

Ejemplo. En un bosque un depredador se alimenta de su presa, y para las primeras 15 semanas a partir del fin de temporada de caza, la población de depredadores es una función f de x, el número de presas en el bosque, la cual a su vez, es una función g de t, el número de semanas que han pasado desde el fin de temporada de caza. Si

$$f(x) = \frac{1}{48}x^2 - 2x + 50 \quad g(t) = 4t + 52$$

donde $0 \leq t \leq 15$.

(a) Encuentre una función para el número de depredadores en f que dependa del número de semanas a partir del fin de temporada de caza.

(b) Determine la población de depredadores 11 semanas después de la temporada de caza.

Solución El número de depredadores es $f \circ g(t)$ donde $0 \leq t \leq 5$

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(t) &= f(g(t)) \\
&= f(4t + 52) \\
&= \frac{1}{48}(4t + 52)^2 - 2(4t + 52) + 50
\end{aligned}$$

(b) Cuando t=11

$$f \circ g(11) = \frac{1}{48}(96)^2 - 2(96) + 50 = 50$$

Conclusión: Once semanas después del cierre de la temporada de caza la población de depredadores es 50.