Cálculo Diferencial. III. Optimización.

Universidad
Morelos Politécnica

Máximos y mínimos

Definición

Supóngamos que f es una función diferenciable y x_0 un punto en el dominio de f. Decimos que x_0 es un punto crítico de f si $f'(x_0) = 0$. En este caso el valor $f(x_0)$ se le llama valor crítico.

Ejemplo. Calcular los puntos y valores críticos de la función

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

Solución. Calculamos la derivada y la igualamos a 0:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$$

factorizando:

$$(x-1)(x+1) = 0$$

Por lo tanto los puntos críticos son $x = 1$ y $x = -1$. Los valores críticos son $f(1) = -1$ y $f(-1) = 3$.

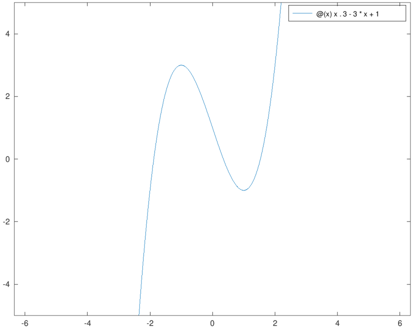
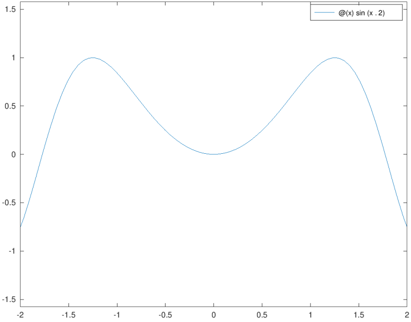


Figura1: Gráfica de la función $x^3 - 3x + 1$

Definición

Sea f una función definida en un conjunto A. $x_0 \in A$ se dice que es un punto máximo (resp. mínimo) de f sobre A, si $f(x_0) \geq f(x)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$) para todo $x \in A$.

Ejemplo. Indicar mediante la gráfica los puntos máximos y mínimos de $f(x) = \sin(x^2)$ en el conjunto $A = [-2, 2]$.



Teorema

Si f es contínua en un intervalo cerrado $[a, b]$ entonces existen puntos $x_0, x_1 \in [a, b]$ tales que

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

para cualquier $x \in [a, b]$.

Este teorema nos dice que una función contínua siempre alcanza un máximo y un mínimo.

Nota.

- No se require que la función sea diferenciable, solo que sea contínua.
- Este teorema es válido si cambiamos, en la hipótesis, el intervalo $[a, b]$ por un conjunto A que sea *compacto* (investigar qué es un conjunto compacto).

Teorema

Sea f una función definida sobre (a, b) si x_0 es un máximo (o mínimo) para f en (a, b) y f es derivable en x_0, entonces x_0 es un punto crítico de f.

Demostración.

Supongamos que $x_0 \in (a, b)$ es un punto máximo de f, entonces para cualquier h tal que $x_0 + h \in (a, b)$ se tiene que $f(x_0 + h) \leq f(x)$, luego $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0, \quad h>0$$
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0, \quad h<0$$

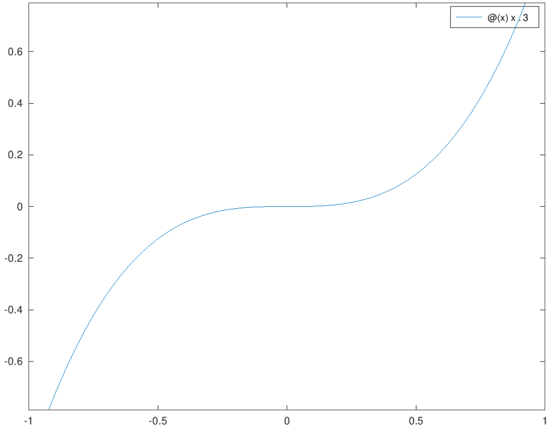
Calculando los límites:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$$
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$$

(los límites preservan la desigualdad).

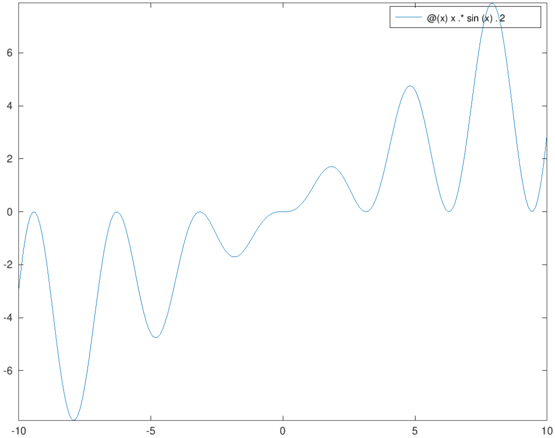
Como f es derivable en x_0 se sigue que $f'(x_0)=0$.

Ejemplo El recíproco del teorema anterior es falso. **Contraejemplo clásico:** la función $f(x) = x^3$, 0 es un punto crítico de f, pero no es máximo ni mínimo.



Definición. *(Máximo y mínimo local)* Sea f una función definida en un conjunto A. $x_0 \in A$ es un punto *máximo (resp. mínimo) local* de f sobre A, si existe un intervalo abierto I que contiene a x_0 tal que f tiene un máximo (resp. mínimo) en $I \cap A$.

Ejemplo. Considere la función $f(x) = x\sin^2(x)$. Analizar los máximos y mínimos locales en el intervalo $[-10, 10]$.



Criterios de la primera y segunda derivada

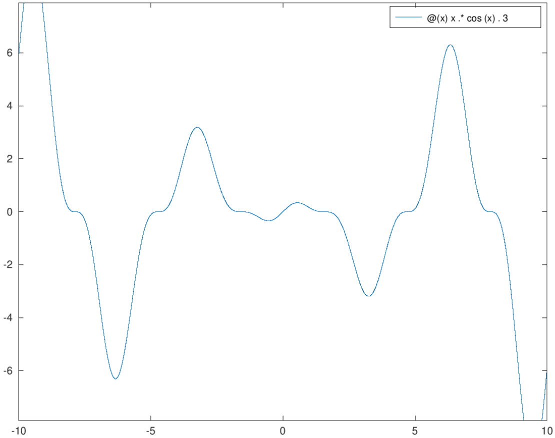
Funciones monótonas

Definición. Sea f una función definida en un conjunto S

- f es creciente si para cualquier $x, y \in S$ con $x < y$ se tiene que $f(x) \leq f(y)$. Si se verifica la desigualdad estricta $f(x) < f(y)$ la función se llama *estrictamente creciente.*
- f es decreciente si para cualquier $x, y \in S$ con $x < y$ se tiene que $f(x) > f(y)$. Si se verifica la desigualdad estricta $f(y) < f(x)$ la función se llama *estrictamente decreciente.*

Una función se dice monótona en S si es creciente o decreciente en S.

Ejemplo. Analizar, mediante la gráfica, intervalos donde la función $x \sin^3(x)$ sea creciente y decreciente.



Teorema Sea f una función continua en un intervalo en un abierto cerrado $[a, b]$ y que admite derivada en cada punto de un intervalo abierto (a, b). Tenemos entonces:

- Si $f'(x) > 0$ para todo x de (a, b), f es estrictamente creciente en $[a, b]$.
- Si $f'(x) < 0$ para todo x de (a, b), f es estrictamente decreciente en $[a, b]$.
- Si $f'(x) = 0$ para todo x de (a, b), f es constante en (a, b).

Demostración. Sean $x, y \in [a, b]$ tal que $x < y$, por el Teorema del Valor Medio aplicado al intervalo cerrado $[x, y]$, existe $c \in (x, y)$ tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$$

Como $f'(c) > 0$ y $y - x > 0$ se sigue que $f(y) - f(x) > 0$, esto significa que $f(y) > f(x)$.

La demostración de (b) es parecida.

Para demostrar (c) utilizamos la igualdad anterior haciendo $x = a$. Ya que $f'(c) = 0$ tenemos que $f(y) = f(a)$, para todo y en $[a, b]$.

Teorema *(Criterio de la primera derivada)* Supongamos que f es contínua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y que existe la derivada f' en todo punto del intervalo abierto (a, b), excepto quizá en un punto c.

- Si $f'(x)$ es positiva para todo $x < c$ y negativa para todo $x > c$, entonces f tiene un máximo local en c.
- Si, por otra parte, $f'(x)$ es negativa para todo $x < c$ y positiva para todo $x > c$, entonces f tiene un mínimo local en c.

Ejemplo Determine los máximos y mínimos locales de la siguiente función

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Solución Derivamos la función y la igualamos a cero:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

Simplificamos y factorizamos

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

Obtenemos

$$x = 0 \quad x = 3$$

Los puntos críticos son $x = 1$ y $x = 3$.

Luego determinamos los intervalos donde la derivada es negativa y positiva. Para esto evaluamos algunos puntos.

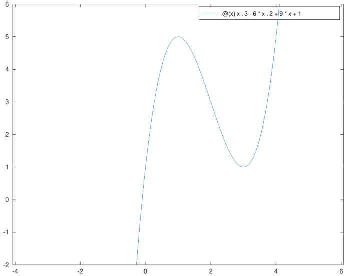


Figura2: Gráfica de f en el intervalo $[-3, 5]$

Teorema (*Criterio de la segunda Derivada)* Sea c un punto crítico de f en un intervalo abierto (a, b), esto es, supongamos $a < c < b$ y que $f'(c) = 0$. Supongamos también que existe la segunda derivada f'' en (a, b). Tenemos entonces:

- si $f''(c) > 0$, f tiene un mínimo local en c.
- Si $f''(c) < 0$, f tiene un máximo local en c.

Ejemplo Sea

$$f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$$

determine los máximos y mínimos locales de f aplicando el criterio de la segunda derivada. Utilice esta información para dibujar la gráfica de f.

Solución. Calculamos la primera y segunda derivada de f:

$$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x \quad f''(x) = 12x^2 + 8x - 8$$

Calculamos los puntos críticos, los puntos donde $f'(x) = 0$:

$$4x(x+2)(x-1) = 0$$

$$x = 0 \quad x = -2 \quad x = 1$$

Checamos los signos de la evaluación de los puntos críticos en la segunda derivada:

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x = -2$	$-\frac{32}{3}$	0	+	f tiene un valor mínimo relativo
$x = 0$	0	0	−	f tiene un valor máximo relativo
$x = 1$	$-\frac{5}{3}$	0	+	f tiene un valor mínimo relativo

Nota Si $f''(c) = 0$ y $f'(c) = 0$, no se puede determinar si es máximo o mínimo local.

Ejemplo La función $f(x) = x^4$ y $g(x) = -x^4$ tienen un punto crítico en 0, y sus segundas derivadas es 0, pero f tiene un mínimo local en 0 y g tiene un máximo local en 0.

Puntos de inflexión

Definición Sea f una función diferenciable en un intervalo abierto que contiene a c. Entonces

- La gráfica de f es cóncava hacia arriba en $(c, f(c))$ si $f''(c) > 0$.
- La gráfica de f es cóncava hacia abajo en $(c, f(c))$ si $f''(c) < 0$.

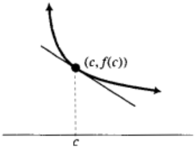


Figura3: Cóncava hacia arriba

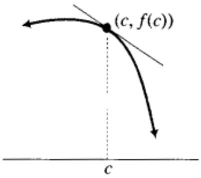


Figura4: Cóncava hacia abajo

Definición *(Punto de inflexión)* Supongamos que f es una función derivable en un intervalo abierto que contiene a c, decimos que el punto $(c, f(c))$ es un **punto de inflexión** de la gráfica de f si

- $f''(x) < 0$ si $x < c$ y $f''(x) > 0$ si $x > c$; o
- $f''(x) > 0$ si $x < c$ y $f''(x) < 0$ si $x > c$..

Teorema Supongamos que f es diferenciable en algún intervalo abierto que contiene a c, y $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f. Entonces, si $f''(c)$ existe, $f''(c) = 0$.

Ejemplo Considere la función

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

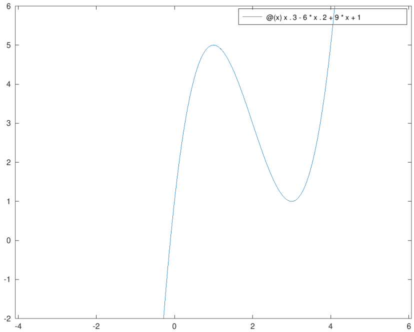
Encuentre el punto de inflexión de la gráfica de f y determine dónde la gráfica es cóncava hacia arriba y dónde lo es hacia abajo. Apoye su respuesta graficando la función y la recta tangente en el punto de inflexión.

Solución. Calculamos la primera y segunda derivada de f

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \quad y \quad f''(x) = 6x - 12$$

Calculamos los puntos donde se anula la segunda derivada: $6x - 12 = 0$, $x = 2$. Para determinar si se tiene un punto de inflexión en $x = 2$, debe verificarse si $f''(x)$ cambia de signo, al mismo tiempo se determina la concavidad de la gráfica para los intervalos respectivos. Los resultados se resumen en la Tabla 2.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusión*
$x < 2$			$-$	La gráfica de f es cóncava hacia abajo
$x = 2$	3	-3	0	La gráfica de f tiene un punto de inflexión
$2 < x$			$+$	La gráfica de f es cóncava hacia arriba



Metodolología de la optimización