Cálculo Diferencial P2024. Límites y continuidad.

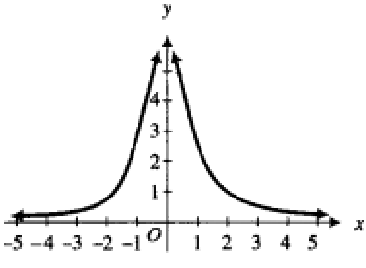
Dr.José Juan Zacarías

Universidad Politécnica del Estado de Morelos

24 de Mayo de 2024

Límites infinitos y asíntotas

En este apartado estudiamos funciones que *crecen o decrecen sin límite* conforme la variable se acerca cada vez más a un número fijo.



$$f(x) = \frac{3}{x^2}$$

Figura1: Ejemplo de una función que crece sin límite

f crece sin límite conforme se acerca a 0.

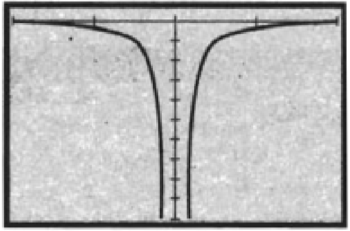
Tabla 1

x	$f(x) = \dfrac{3}{x^2}$
1	3
0.5	12
0.25	48
0.1	300
0.01	30 000
0.001	3 000 000

Figura2: Tabulamos algunos valores

En este caso:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3}{x^2} = +\infty$$



$[-2,\ 2]$ por $[-100,\ 0]$

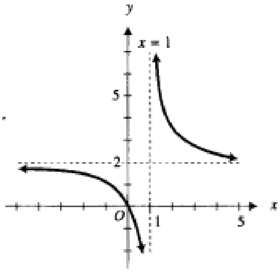
$$g(x) = \frac{-3}{x^2}$$

Figura3: Ejemplo de una función que decrece sin límite

En este caso:

$$\lim_{x \to 0} -\frac{3}{x^2} = -\infty$$

También podemos tener límites "infinitos" laterales:



$h(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

En este caso:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x-1} = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty$$

Teorema Si r es un entero positivo, entonces

1. $$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$$

2. $$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty \text{ si } r \text{ es impar} \\ +\infty \text{ si } r \text{ es par} \end{cases}$$

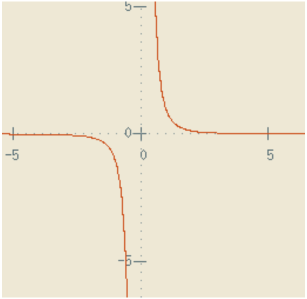


Figura4: Gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^3}$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

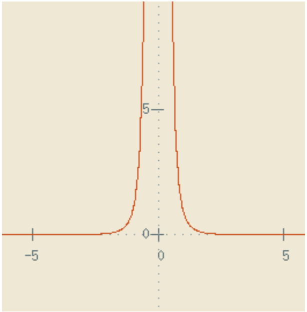


Figura5: Gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^4}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

Teorema. Si a es cualquier número real y si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = c$, donde c es una constante diferente de 0, entonces

- (I) si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces
$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$
- (II) si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces
$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

- (III) si $c < 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces
$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$
- (IV) si $c > 0$ y $f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces
$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

El teorema también es válido si se sutituye "$x \to a$" por "$x \to a^+$" o "$x \to a^-$".

Teorema

- (I) Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$, donde c es cualquier constante, entonces $\lim_{x \to a}[]$

Definición *(Asíntota vertical)* La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de la función f si al menos uno de los siguientes enunciados es verdadero:

- (I)
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$
- (II)
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$
- (III)
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$$
- (IV)
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

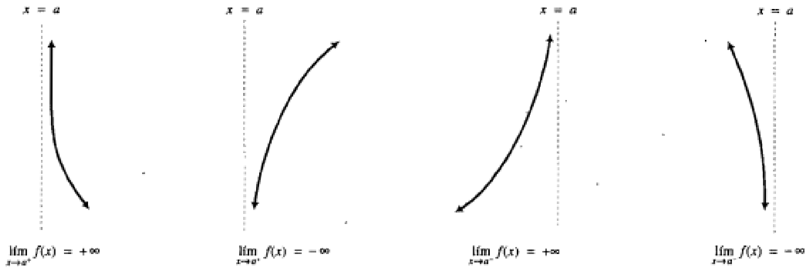


Figura6: Tipos de asíntotas verticales

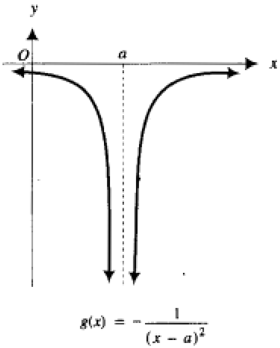


Figura7: Ejemplo de una asíntota

Práctica de Maxima

Sintaxis de la función `limit`

```
limit (<expr>, <x>, <val>, <dir>)
limit (<expr>, <x>, <val>)
limit (<expr>)
```

`<dir>` indica el límite por la derecha (`plus`) y por la izquierda (`minus`).

El valor puede ser un número real o $+\infty$ (`inf`) o $-\infty$ (`minf`).

Ejercicio. Comprobar algunos límites de la Tarea y los del *Ejercicios Para el Café* con `Maxima`.

Concepto de Continuidad

Definición *(Continuidad de una función)* Se dice que la función f es **contínua** en el número a si y sólo si se satisfacen las siguientes tres condiciones.

- $f(a)$ existe;
- $\lim_{x \to a} f(x)$ existe;
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si una o más de estas tres condiciones no se cumplen en a entonces se dice que la función f es **discontínua** en a.

Ejemplos de funciones discontínuas

En los siguientes ejercicios, dibuje la gráfica de la función. Determine porqué la función es discontínua:

1.
$$f(x) = \begin{cases} x - 1 \text{ si } x < 1 \\ 1 \ \text{ si } x = 1 \\ 1 - x \text{ si } 1 < x \end{cases}$$

2.
$$g(x) = \begin{cases} t^2 - 4 \text{ si } t < 2 \\ 4 \ \text{ si } t = 2 \\ 4 - t^2 \text{ si } 2 < t \end{cases}$$