Cálculo Diferencial P2024. La derivada.

Dr.José Juan Zacarías

24 de Mayo de 2024

Universidad
Morelos Politécnica

Definición de derivada

Definición *(Derivada)* Se dice que una función f es derivable (o diferenciable) en el punto x_0 si el siguiente límite existe:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

En caso de que dicho límite exista lo denotaremos como $f'(x_0)$.

Observación. La derivada es equivalente a

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Diferentes notaciones para la derivada:

$$f'(x_0), \quad D_{x_0} f, \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}$$

Cuando la función es derivable en cada punto, decimos que la función es *diferenciable*.

Intepretación geométrica

Intepretación geométrica de la derivada (ver GIF).

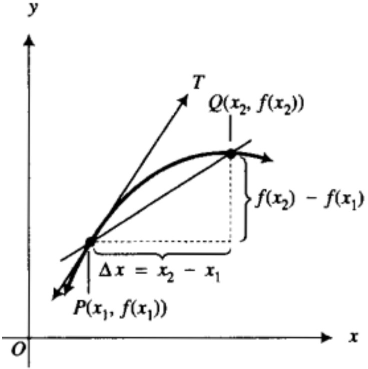

Figura1: La derivada es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$

Ejemplo. Calcular la derivada de la función $f(x) = x^2$ en el punto $x_0 = 1$.

Solución:

$$\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} x+1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Universidad Morelos Politécnica

Ejemplo. Sea f la función valor absoluto definida por

$$f(x) = |x|$$

Para ver la función es derivable en 0 tenemos que ver si $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existe:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Los límites laterales son distintos, por lo tanto el límite **no existe**.

Teorema. Si una función es diferenciable en un punto x_0, entonces f es contínua en x_0.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0}\left((x-x_0)\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)\\
&= 0\cdot f'(x_0)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)
$$

Teorema (Teorema del Valor Medio) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función contínua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b) con $a < b$ entonces existe al menos un punto c en (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

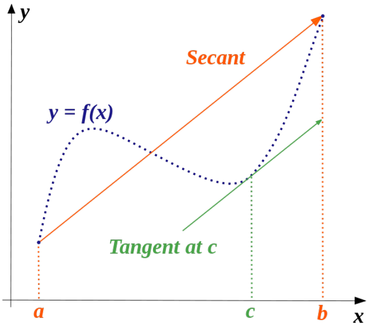

Figura2: Intepretación geométrica del Teorema del Valor Me[...]

Universidad Politécnica Morelos

Derivadas de funciones racionales

Teorema (Linealidad) Si f y g son derivables en x y c es una constante:

$$D_x(f+cg) = D_x(f) + cD_x(g)$$

Teorema. *(Regla de Leibnitz)*

$$D_x(fg) = f(x)D_x g + g(x)D_x f$$

Con los teoremas anteriores tenemos el siguiente corolario:

Corolario Si $f(x) = \sum_{i=0} a_k x^k$ es una función polinomial, entonces

$$f'(x) = \sum_{i=0} k a_k x^{k-1}$$

Ejemplo. Determinar $f'(x)$ si

$$f(x) = 7x^4 - 2x^3 + 8x + 5$$

Solución

$$\begin{aligned} D_x f &= D_x(7x^4 - 2x^3 + 8x + 5) && (1) \\ &= 28x^3 - 6x^2 + 8 && (2) \end{aligned}$$

Ejemplo. Determinar $f'(x)$ si

$$f(x) = (2x^3 - 4x^2)(3x^5 + x^2)$$

Solución

$$\begin{aligned} D_x f &= (2x^3 - 4x^2)D_x(3x^5 + x^2) + (3x^5 + x^2)D_x(2x^3 - 4x^2) \\ &= (2x^3 - 4x^2)(15x^4 + 2x) + (3x^5 + x^2)(6x^2 - 8x) \end{aligned}$$

Teorema Si f y g son dos funciones derivables en x y $g(x) \neq 0$, entonces

$$D_x \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Escrito de manera simplificada

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

Derivadas de orden superior

La derivada de orden n de una función $f(x)$ se define de manera recursiva como sigue:

1. $$f^{(1)}(x) = \frac{df}{dx}$$

2. $$f^{(n)} = \frac{df^{(n-1)}}{dx}$$

Suponiendo que dichas derivadas existan.

$f^{(1)},\ f^{(2)},\ f^{(3)}$ se le conocen como la primera, segunda y tercera derivada, y se denotan también por f', f'', f'''.

Otras notaciones para las derivadas de orden superior son:

$$D_x^n(f(x)), \quad \frac{d^n}{dx^n}(f(x))$$

Ejemplo: Calcular la derivada de orden 4 de la función

$$f(x) = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 32x^3 + 15x^2 - 2x \\ f''(x) &= 96x^2 + 30x - 2 \\ f'''(x) &= 192x + 30 \\ f^{(4)} &= 192 \end{aligned}$$

Una función que tenga k derivadas sucesivas se le conoce como una función diferenciable k-veces; y si también su k-ésima derivada es contínua, entonces la función se le llama *de clase* C^k. Una función que es infinitamente diferenciable es llamada *suave*.

Derivadas de funciones trigonométricas

Algunas identidades trigonométricas:

1. Identidad pitagórica

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

2. Identidades de suma

$$\begin{aligned} \sin(u+v) &= \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v) \\ \cos(u+v) &= \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v) \end{aligned}$$

3. Identidad para ángulos dobles

$$\begin{aligned} \sin(2u) &= 2\sin(u)\cos(u) \\ \cos(2u) &= \cos^2(u) - \sin^2(u) \end{aligned}$$

4. Desigualdades fundamentales: para $0 < |x| < \pi/2$

$$0 < \cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)}$$

Checar la lista completa en Leithold pág. 1261.

Sandwich de límites:

Teorema *(Teorema de intercalación)* Suponga que las funciones f, g y h están definidas en algún intervalo abierto I que contiene a a, y que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para toda x en I con $x \neq a$. Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} h(x) = L$, entonces

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

Teorema.

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

2. $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0$$

Demostración.

La siguiente desigualdad

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)}$$

es válida para todo $x \neq 0$ en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

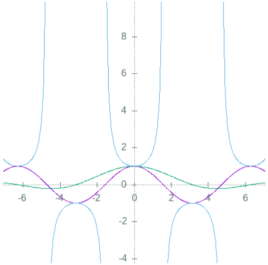

Figura3: Grafica de $\cos(x)$, $\sin(x)/x$ y $1/\cos(x)$

Como $\cos(x)$ es contínua se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 \quad y \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$$

luego por el teorema de Intercalación se sigue que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Para demostrar el segundo inciso, completamos la diferencia de cuadrados:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\\
&= 1\cdot 0\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Teorema

1. $D_x(\sin(x)) = \cos(x)$
2. $D_x(\cos(x)) = -\sin(x)$

Demostración

$$
\begin{aligned}
D_x(\sin(x)) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} \\
&= -\sin(x)\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos(h)}{h} + \cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} \\
&= -\sin(x)\cdot 0 + \cos(x)\cdot 1 \\
&= \cos(x)
\end{aligned}
$$

Universidad Politécnica Morelos

$$
\begin{aligned}
D_x(\cos(x)) &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h}\\
&= -\cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos(h)}{h}-\sin(x)\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}\\
&= -\cos(x)\cdot 0-\sin(x)\cdot 1\\
&= -\sin(x)
\end{aligned}
$$

Teorema.

1. $D_x(\tan x) = \sec^2 x$
2. $D_x(\sec x) = \sec x \tan x$
3. $D_x(\csc x) = -\csc x \cot x$
4. $D_x(\cot x) = -\csc^2 x$

Demostración Ejercicio.

Sugerencia: aplique las identidades trigonométricas:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

y la regla de derivada de un cociente.

Regla de la cadena

Teorema *(Regla de la cadena)* Si la función u es diferenciable en x y la función f es diferenciable en $u(x)$, entonces la función compuesta $f \circ u$ es diferenciable en x, y

$$(f \circ u)'(x) = f'(u(x))u'(x)$$

Universidad Morelos Politécnica

Lo anterior puede expresarse como

$$\frac{d(f(u))}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$D_x f(u) = D_u f \cdot D_x u$$

Ejemplo. Calcular

$$\frac{d}{dx}(2x^3 - 5x^2 + 4)^{10}$$

Solución. Hacemos $f(u) = u^{10}$ y $u(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4$ aplicamos la regla de la cadena

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(2x^3 - 5x^2 + 4)^{10} &= \frac{d}{dx}u^{10} \\
&= 10u^9\frac{du}{dx} \\
&= 10u^9(6x^2 - 10x) \\
&= 10(2x^3 - 5x^2 + 4)^9(6x^2 - 10x)
\end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular $F'(t)$ si

$$F(t) = \tan(3t^2 + 2t)$$

aplicando la regla de la cadena

Solución. Hacemos $u = 3t^2 + 2t$

$$\begin{aligned} D_t(\tan u) &= \sec^2(u) \cdot D_t u \\ &= \sec^2 u \cdot (6t + 2) \\ &= \sec^2(3t^2 + 2t) \cdot (6t + 2) \end{aligned}$$

Diferenciación implícita

La deriva implícita permite calcular la derivada de una función $y = y(x)$ que satisface una ecuación algebraica:

$$F(x, y) = 0$$

Para esto esto se emplea la *Regla de la Cadena*.

Universidad Morelos Politécnica

Ejemplo Calcular $\frac{dy}{dx}$ por medio de derivación implícita

$$x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2$$

$$\begin{aligned} D_x(x^6 - 2x) &= D_x(3y^6 + y^5 - y^2) \\ 6x^5 - 2 &= 18y^5\frac{dy}{dx} + 5y^4\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

Despejando

$$\begin{aligned} 6x^5 - 2 &= \left(18y^5 + 5y^4 - 2y\right)\frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{6x^5 - 2}{18y^5 + 5y^4 - 2y} \end{aligned}$$

Ejemplo Calcule $\frac{dy}{dx}$ implícitamente de la ecuación

$$x\cos y + y\cos x - 1 = 0$$

Solución

$$\begin{aligned}(xD_x(\cos y) + \cos y D_x(x)) + (yD_x(\cos x) + \cos x D_x(y)) &= 0\\ x(-\sin y\frac{dy}{dx}) + \cos y + y(-\sin(x)) + \cos x\frac{dy}{dx} &= 0\end{aligned}$$

$$(-x\sin y + \cos x)\frac{dy}{dx} = y\sin(x) - \cos y$$

Despejando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \sin x - \cos y}{-x \sin y + \cos x}$$

Ejemplo. Encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva

$$x^3 + y^3 = 9$$

en el punto $(1, 2)$. Encuentre la ecuación de la recta tangente y grafique:

Solución: Diferenciamos implícitamente

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x^2}{y^2} \end{aligned}$$

En el punto $(1, 2)$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}$

Universidad Morelos Politécnica

La ecuación de la recta tangente es

$$
\begin{aligned}
y - 2 &= \frac{1}{4}(x-1) \\
x + 4y - 9 &= 0
\end{aligned}
$$