Cálculo Diferencial. Otras aplicaciones de la derivada.

Universidad
Morelos Politécnica

Regla de l'Hopital

Temas:

- Definición de la forma indeterminada $0/0$.
- Regla de L'Hopital.
- Ejemplos.
- Teorema del Valor medio de Cauchy
- Ejercicios

Anteriormente se resolvieron límites de este estilo:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}, \quad \lim_{t\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

No se puede aplicar la regla del cociente, ya que el denominador se anula.

En lo siguiente veremos un método más general para tratar estos tipos de límites.

Definición de la indeterminada $0/0$

Definición *(Indeterminada* $0/0$*)* Si f y g son dos funciones tales que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

entonces $f(x)/g(x)$ tiene la **forma indeterminada** $0/0$ en a.

Ejemplo: $\frac{\sin t}{t}$ tiene la forma indeterminada $0/0$ en 0, y $\frac{x^2-9}{x-3}$ tiene la forma indeterminada $0/0$ en 3.

El método general para general para calcular este tipo de límites emplea el teorema conocido como la *Regla de L'Hopital*.

Regla de l'Hopital

Teorema *(Regla de l'Hopital)* Supongamos que f y g son dos funciones diferenciables en un intervalo I, excepto posiblemente en el número a de I. Suponga que para toda x de I con $x \neq a$ se tiene que $g'(x) \neq 0$. Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre y cuando estos límites existan.

Nota El teorema también es válido si todos son límites laterales por la derecha o límites laterales por la izquierda.

Ejemplos:

Ejemplo 1.

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos t}{1} = 1$$

Ejemplo 2.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{2x}{1} = 6$$

Ejemplo 3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = 1$$

Ejemplo 4 $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{1-x+\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-3}{-1+\frac{1}{x}}$

Aplicamos de nuevo la regla de l'Hopital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 3}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{-\frac{1}{x^2}} = -6$$

La demostración de la Regla de L'Hopital utiliza la siguiente generalización del *Teorema del Valor Medio* conocido como el *Teorema del Valor Medio de Cauchy*.

Teorema *(T. V. de Cauchy)* Si f y g son contínuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Suponga además que entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$$

Ejercicios. Aplicar la Regla de l'Hopital para encontrar los límites $\lim_{x \to a} f(x)$

1. $f(x) = \dfrac{x}{\tan x}$
   $a = 0$

2. $f(x) = \dfrac{\tan x - x}{x - \operatorname{sen} x}$
   $a = 0$

3. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} \pi x}{2 - x}$
   $a = 2$

4. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x}$
   $a = 0$

5. $f(x) = \dfrac{2^x - 3^x}{x}$
   $a = 0$

6. $f(x) = \dfrac{\tanh 2x}{\tanh x}$
   $a = 0$

7. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x^2}$
   $a = 0$

8. $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 3x - 4}$
   $a = 1$

9. $f(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x^3 + x^2 + 4}$
   $a = -2$

10. $f(x) = \dfrac{3 \cos x}{2x - \pi}$
    $a = \pi/2$