Algoritmos cuánticos 2

① Phase Kickback

Recordemos rápidamente el comportamiento de la compuerta CNOT en un estado particular

$$|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$CNOT(|1\rangle|-\rangle) = CNOT\left(\frac{|10\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle - |10\rangle = |1\rangle\left(\frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= |1\rangle\left(-\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = -|1\rangle|-\rangle$$

$$CNOT(|0\rangle|-\rangle) = |0\rangle|-\rangle$$

Ahora vamos a tomar el ejemplo particular de dos estados en superposición $|+\rangle, |-\rangle$:

$$CNOT(|+\rangle|-\rangle) = CNOT\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= CNOT\left(\frac{|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{|00\rangle - |01\rangle + |11\rangle - |10\rangle}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= |-\rangle|-\rangle$$

Notamos que el valor del target no está siendo afectado pero el valor del control c cambia a $(-1)^c$.

Esto es, si el estado de control es $|1\rangle$ ent el estado target no se modifica y le "patea" un $|-1\rangle$ al estado control.

$$\text{CNOT}(|b\rangle|-\rangle) = (-1)^b |b\rangle|-\rangle$$

Coincide perfectamente con los resultados obtenidos al principio.

Podríamos generalizar este resultado?

La respuesta es sí y lo vamos a poder hacer para cualquier compuerta $\hat{U}_f$ con $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

definimos la clase pasada.

Daremos una prueba para $f: \{0,1\} \to \{0,1\}$ e inductivamente se puede probar para un dominio más grande. Queremos calcular $\hat{U}_f |x\rangle|-\rangle$

Observaciones.

(1) $f: \{0,1\} \to \{0,1\}$, $x \in \{0,1\}$

(2) En la clase pasada ocupabamos a $|y\rangle = |0\rangle$ sin embargo aquí damos la libertad de que $|y\rangle$ pueda estar en otro estado.

Recordemos que la def de $\hat{U}_f$:

$$\hat{U}_f |x\rangle|y\rangle = |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle$$

ojito 👀

Supongamos que $|y\rangle = |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \hat{U}_f |x\rangle|y\rangle = \hat{U}_f |x\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{U_f |x\rangle|0\rangle - U_f |x\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{|x\rangle |0 \oplus f(x)\rangle - |x\rangle |1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} = |A\rangle$$

Vamos a tener dos casos:

(1) $f(x) = 0 \Rightarrow |A\rangle = \frac{|x\rangle|0\rangle - |x\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}} = |x\rangle|y\rangle$

$$= |x\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

(2) $f(x) = \underline{1} \Rightarrow |A\rangle = \frac{|x\rangle|1\rangle - |x\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}} = (-1)|x\rangle|y\rangle$

$$= |x\rangle \left(\frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}}\right) = -|x\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

Con ello podemos obtener la expresión

$$\boxed{\hat{U}_f |x\rangle|-\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle|-\rangle}$$

2: Algoritmo de Deutsch.

Problema: Sea $f:\{0,1\}\to\{0,1\}$ queremos determinar si f es una función balanceada o constante.

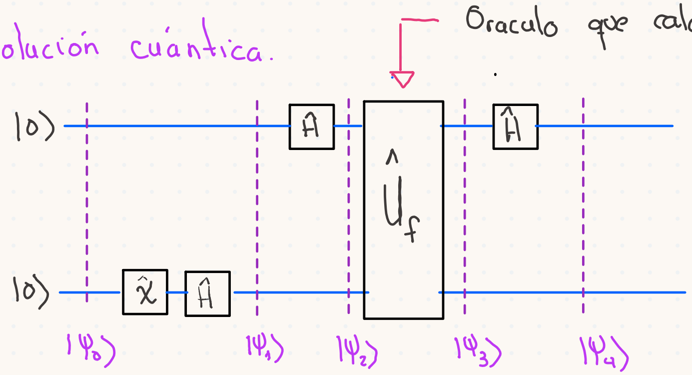
> **obs.** Una función f es constante si a todo elemento del dominio lo envía a un valor del codominio c.
> Una función es balanceada si a cada elemento del codominio esta relacionado con la misma cantidad de elementos del dominio.

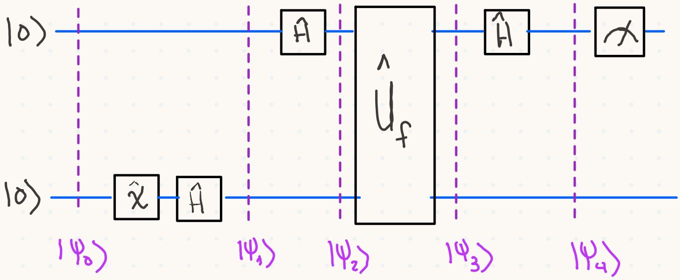
Solución clásica.

Calculamos $f(0)$ y $f(1)$ y revisamos si son iguales ent es constante y si son distintos ent es balanceada

Complejidad : $O(n)$

Solución cuántica.





$$|\psi_0\rangle = |00\rangle$$

$$|\psi_1\rangle = (\hat{I} \otimes \hat{H}\hat{x})\underbrace{|00\rangle}_{|\psi_0\rangle} = |0\rangle \otimes (\hat{H}\hat{x}\,|0\rangle)$$

$$= |0\rangle \otimes H(|1\rangle)$$

$$= |0\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = |0\rangle|-\rangle$$

$$|\psi_2\rangle = (\hat{H} \otimes I)\underbrace{|0\rangle|-\rangle}_{|\psi_1\rangle} = \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|-\rangle$$

$$= \frac{|0\rangle|-\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|1\rangle|-\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|\psi_3\rangle = \hat{U}_f \underbrace{\left(\frac{|0\rangle|-\rangle + |1\rangle|-\rangle}{\sqrt{2}}\right)}_{|\psi_2\rangle} = \frac{\hat{U}_f|0\rangle|-\rangle + \hat{U}_f|1\rangle|-\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\overset{?}{=} \frac{(-1)^{f(0)}|0\rangle|-\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle|-\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$= (-1)^{f(0)}\left(\frac{|0\rangle|-\rangle + (-1)^{f(0)\oplus f(1)}|1\rangle|-\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

Justificación: $f(0)\oplus f(0) \oplus f(1)$ como es suma binaria independiente del valor $f(0)\oplus f(0) = 0$

Casos:

1) f es constante.

$$|\psi_3\rangle \overset{?}{=} (-1)^{f(0)} \left(\frac{|0\rangle|-\rangle + (-1)^{f(0)\oplus f(1)} |1\rangle|-\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= (-1)^{f(0)} \left(\frac{|0\rangle|-\rangle + |1\rangle|-\rangle}{\sqrt{2}} \right) = (-1)^{f(0)} |+\rangle|-\rangle$$

$$|\psi_4\rangle = (\hat{H} \otimes I)\, (-1)^{f(0)} |+\rangle|-\rangle = (-1)^{f(0)} (H|+\rangle)|-\rangle$$

$$= (-1)^{f(0)} |0\rangle|-\rangle$$

2) f es balanceada.

$$|\psi_3\rangle \overset{?}{=} (-1)^{f(0)} \left(\frac{|0\rangle|-\rangle + (-1)^{f(0)\oplus f(1)} |1\rangle|-\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= (-1)^{f(0)} \left(\frac{|0\rangle|-\rangle - |1\rangle|-\rangle}{\sqrt{2}} \right) = (-1)^{f(0)} |-\rangle|-\rangle$$

$$|\psi_4\rangle = (\hat{H} \otimes I)\, (-1)^{f(0)} |-\rangle|-\rangle = (-1)^{f(0)} (\hat{H}|-\rangle)|-\rangle$$

$$= (-1)^{f(0)} |1\rangle|-\rangle$$

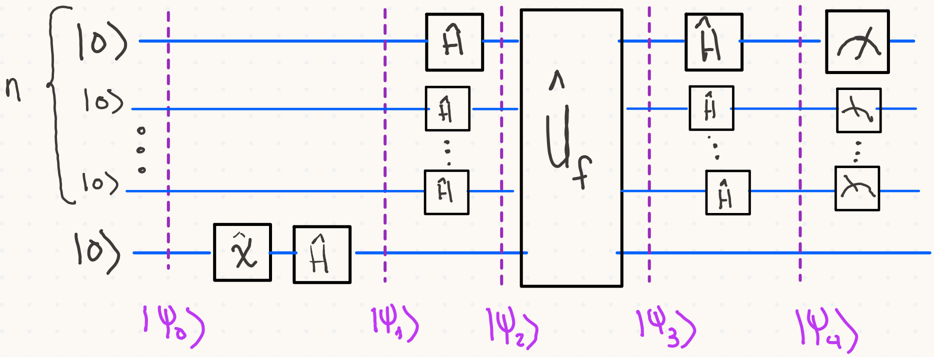
¿Conclusion? (Al terminar el circuito)

Si medimos el primer qubit y obtenemos $|0\rangle$ ent f era constante y si medimos $|1\rangle$ ent f era balanceada.

Complejidad : $O(1)$ constante.

2.1 Algoritmo Deutsch-Jozsa

Es la generalización del algoritmo de Deutsch tomando a $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$



Tarea → Mostrar que el algoritmo funciona.

Hint: Primero mostrar que :

$$H^{\otimes n} |\bar{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{z \in \{0,1\}^n} (-1)^{\bar{x}\,\bar{z}} |\bar{z}\rangle$$

Con $|\bar{x}\rangle = |x_1\rangle \otimes \dots \otimes |x_n\rangle$

Para $x \in \{0,1\}$

$$\Rightarrow H|x\rangle = \frac{|0\rangle + (-1)^x |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

¿Por que?