

Algorithm Library

CRatiQ

South China Normal University

March 17, 2025

Contents

常用文件	3
DEBUG 头	3
__int128 输入输出流	3
常用数学函数	4
纳秒级随机种子	4
Linux 对拍	4
数学	4
欧拉筛	4
取模类 (MInt)	5
组合数	7
多项式	8
原根表	12
线性基	12
min-plus 卷积	13
模意义分数还原	14
Exgcd	14
一次函数下取整区间和	15
二元一次不定方程	15
行列式求值	16
高斯消元法	16
枚举二进制下有 k 个 1 的数	17
康托展开	17
Lagrange 插值法	18
数据结构	19
并查集 (启发式合并 + 带撤销)	19
笛卡尔树	19
状压 RMQ	20
ST 表	21
树状数组	21
线段树	22
可并堆 (pb_ds)	24
成员函数	24
示例	24
平衡树 (pb_ds)	25
成员函数	25
示例	25
哈希表 (pb_ds)	26
字符串	26
字符串哈希 (随机模数)	26
允许 k 次失配的字符串匹配	26
最长公共子串	26
Code	26
KMP	27
字符串周期	27
统计前缀出现次数	27
求满足一些要求的 Border	27
Code	27
Z 函数	27
AC 自动机	28
后缀数组	29
(广义) 后缀自动机	29
不同子串个数	29
字典序第 k 大子串	30

最小循环移位	30
出现次数	30
首次出现位置	30
所有出现位置	30
最短未出现字符串	30
最长公共子串	30
Code	30
Manacher	31
回文自动机	32
本质不同回文子串数	32
回文子串出现次数	32
Code	32
含通配符字符串匹配	33
图论	33
拓扑排序	33
树的直径	34
动态树直径 (CF1192B)	34
树的重心	35
Dijkstra	36
SPFA	36
Johnson	37
强连通分量	38
边双连通分量	39
轻重链剖分	40
虚树	41
欧拉路径	42
2-SAT	43
最大流	44
最小费用最大流	46
二分图最大权匹配 (KM)	47
三元环计数	49
树哈希	50
矩阵树定理	51
计算几何	51
EPS	51
Point	51
Line	52
距离	52
点绕中心旋转	53
关于线的对称点	53
位置关系判断	53
线段交点	54
过定点做圆的切线	54
两圆交点	54
多边形面积	54
自适应辛普森法	55
静态凸包	55
旋转卡壳求直径	55
半平面交	55

常用文件

DEBUG 头

```
1  #include <bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3  using i64=long long;
4  using i128=__int128;
5
6  namespace DBG
7  {
8      template <class T>
9      void _dbg(const char *f,T t) { cerr<<f<<'\n'; }
10
11     template <class A,class... B>
12     void _dbg(const char *f,A a,B... b)
13     {
14         while (*f!=',') cerr<<*f++;
15         cerr<<'\n';
16         _dbg(f+1,b...);
17     }
18
19     template <class T>
20     ostream& operator << (ostream& os,const vector<T> &v)
21     {
22         os<<"[ ";
23         for (const auto &x:v) os<<x<<", ";
24         os<<"]";
25         return os;
26     }
27
28     #define dbg(...) _dbg(#__VA_ARGS__, __VA_ARGS__)
29 }
30
31 using namespace DBG;
```

__int128 输入输出流

```
1  istream &operator >> (istream &is,i128 &x)
2  {
3      string s;
4      is>>s;
5      bool neg=0;
6      x=0;
7      for (char c:s)
8      {
9          if (c=='-') neg=1;
10         else x=x*10+(c-'0');
11     }
12     if (neg) x=-x;
13     return is;
14 }
15
16 ostream &operator << (ostream &os,i128 x)
17 {
18     if (x==0) os<<0;
19     else
20     {
21         string s,t;
22         if (x<0)
23         {
24             x=-x;
25             t='-';
26         }
27         while (x)
28         {
29             s.push_back('0'+x%10);
30             x/=10;
31         }
32         reverse(s.begin(),s.end());
```

```

33     os<<t<<s;
34 }
35 return os;
36 }

```

常用数学函数

```

1  i64 ceilDiv(i64 n,i64 m)
2  {
3      if (n>=0) return (n+m-1)/m;
4      else return n/m;
5  }
6
7  i64 floorDiv(i64 n,i64 m)
8  {
9      if (n>=0) return n/m;
10     else return (n-m+1)/m;
11 }
12
13 i128 gcd(i128 a,i128 b)
14 {
15     return b?gcd(b,a%b):a;
16 }

```

纳秒级随机种子

```

1  mt19937_64 rng(chrono::steady_clock::now().time_since_epoch().count());

```

Linux 对拍

记得先 `chmod 777 check.sh`.

```

1  for ((i=0;i<100;i++))
2  do
3      ./A_Generator > A.in
4      ./A < A.in > A.out
5      ./A_Good < A.in > A.ans
6
7      if diff A.out A.ans;
8      then
9          echo "AC"
10     else
11         echo "WA"
12         exit 1
13     fi
14 done

```

数学

欧拉筛

时间复杂度为 $\mathcal{O}(n)$ 。

`phi` 为欧拉函数 $\varphi(n)$, `mu` 为莫比乌斯函数 $\mu(n)$, `d` 为约数个数 $\sigma_0(n)$, `f` 为约数和 $\sigma_1(n)$ 。

假如一个积性函数 f 满足: 对于任意质数 p 和正整数 k , 可以在 $\mathcal{O}(1)$ 时间内计算 $f(p^k)$, 那么可以在 $\mathcal{O}(n)$ 时间内筛出 $f(1), f(2), \dots, f(n)$ 的值。

设合数 n 的质因子分解是 $\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$, 其中 $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ 为质数, 我们在线性筛中记录 $g_n = p_1^{\alpha_1}$, 假如 n 被 $x \cdot p$ 筛掉 (p 是质数), 那么 g 满足如下递推式:

$$g_n = \begin{cases} g_x \cdot p & x \bmod p = 0 \\ p & \text{otherwise} \end{cases}$$

假如 $n = g_n$, 说明 n 就是某个质数的次幂, 可以 $O(1)$ 计算 $f(n)$; 否则, $f(n) = f(\frac{n}{g_n}) \cdot f(g_n)$ 。

```
1  vector<int> minp,primes;
2  // vector<int> phi;
3  // vector<int> mu;
4  // vector<int> d,num;
5  // vector<int> f,g;
6
7  void sieve(int n)
8  {
9      minp.assign(n+1,0);
10     primes.clear();
11     // phi.assign(n+1,0);
12     // mu.assign(n+1,0);
13     // d.assign(n+1,0);
14     // num.assign(n+1,0);
15     // f.assign(n+1,0);
16     // g.assign(n+1,0);
17     // phi[1]=1;
18     // mu[1]=1;
19     // d[1]=1;
20     // f[1]=g[1]=1;
21     for (int i=2;i<=n;i++)
22     {
23         if (!minp[i])
24         {
25             minp[i]=i;
26             primes.push_back(i);
27             // phi[i]=i-1;
28             // mu[i]=-1;
29             // d[i]=2;
30             // num[i]=1;
31             // f[i]=g[i]=i+1;
32         }
33         for (auto p:primes)
34         {
35             if (i*p>n) break;
36             minp[i*p]=p;
37             if (p==minp[i])
38             {
39                 // phi[i*p]=phi[i]*p;
40                 // mu[i*p]=0;
41                 // num[i*p]=num[i]+1;
42                 // d[i*p]=d[i]/num[i*p]*(num[i*p]+1);
43                 // g[i*p]=g[i]*p+1;
44                 // f[i*p]=f[i]/g[i]*g[i*p];
45                 break;
46             }
47             // phi[i*p]=phi[i]*phi[p];
48             // mu[i*p]=-mu[i];
49             // num[i*p]=1;
50             // d[i*p]=d[i]<<1;
51             // f[i*p]=f[i]*f[p];
52             // g[i*p]=p+1;
53         }
54     }
55 }
```

取模类 (MInt)

对 MInt<0> 修改 Mod 可以起到动态模数的效果, 但常数较大。

```
1  template <class T>
2  constexpr T power(T a,i64 b)
3  {
4      T res=1;
5      for (;b>=1,a*=a)
6          if (b&1) res*=a;
7      return res;
8  }
9
```

```

10  template <int P>
11  struct MInt
12  {
13      int x;
14      constexpr MInt():x{} {}
15      constexpr MInt(i64 x):x{norm(x%getMod())} {}
16
17      static int Mod;
18      constexpr static int getMod()
19      {
20          if (P>0) return P;
21          else return Mod;
22      }
23
24      constexpr static void setMod(int Mod_) { Mod=Mod_; }
25
26      constexpr int norm(int x) const
27      {
28          if (x<0) x+=getMod();
29          if (x>=getMod()) x-=getMod();
30          return x;
31      }
32
33      constexpr int val() const { return x; }
34
35      explicit constexpr operator int () const { return x; }
36
37      constexpr MInt operator - () const
38      {
39          MInt res;
40          res.x=norm(getMod()-x);
41          return res;
42      }
43
44      constexpr MInt inv() const
45      {
46          assert(x!=0);
47          return power(*this,getMod()-2);
48      }
49
50      constexpr MInt &operator *= (MInt rhs) &
51      {
52          x=1ll*x*rhs.x%getMod();
53          return *this;
54      }
55
56      constexpr MInt &operator += (MInt rhs) &
57      {
58          x=norm(x+rhs.x);
59          return *this;
60      }
61
62      constexpr MInt &operator -= (MInt rhs) &
63      {
64          x=norm(x-rhs.x);
65          return *this;
66      }
67
68      constexpr MInt &operator /= (MInt rhs) &
69      {
70          return *this*=rhs.inv();
71      }
72
73      friend constexpr MInt operator * (MInt lhs,MInt rhs)
74      {
75          MInt res=lhs;
76          res*=rhs;
77          return res;
78      }
79
80      friend constexpr MInt operator + (MInt lhs,MInt rhs)

```

```

81     {
82         MInt res=lhs;
83         res+=rhs;
84         return res;
85     }
86
87     friend constexpr MInt operator - (MInt lhs,MInt rhs)
88     {
89         MInt res=lhs;
90         res-=rhs;
91         return res;
92     }
93
94     friend constexpr MInt operator / (MInt lhs,MInt rhs)
95     {
96         MInt res=lhs;
97         res/=rhs;
98         return res;
99     }
100
101     friend constexpr istream &operator >> (istream &is,MInt &a)
102     {
103         i64 v;
104         is>>v;
105         a=MInt(v);
106         return is;
107     }
108
109     friend constexpr ostream &operator << (ostream &os,const MInt &a) { return os<<a.val(); }
110
111     friend constexpr bool operator == (MInt lhs,MInt rhs) { return lhs.val()==rhs.val(); }
112
113     friend constexpr bool operator != (MInt lhs,MInt rhs) { return lhs.val()!=rhs.val(); }
114 };
115
116 template<>
117 int MInt<0>::Mod=1;
118
119 template<int V,int P>
120 constexpr MInt<P> CInv=MInt<P>(V).inv();

```

组合数

```

1 struct Comb
2 {
3     int n;
4     vector<Z> _fac,_inv,_finv;
5
6     Comb():n{0},_fac{1},_inv{0},_finv{1}{}
7     Comb(int n):Comb() { init(n); }
8
9     void init(int m)
10    {
11        m=min(m,Z::getMod()-1);
12        if (m<=n) return;
13        _fac.resize(m+1);
14        _inv.resize(m+1);
15        _finv.resize(m+1);
16
17        for (int i=n+1;i<=m;i++)
18            _fac[i]=_fac[i-1]*i;
19        _finv[m]=_fac[m].inv();
20        for (int i=m;i>n;i--)
21        {
22            _finv[i-1]=_finv[i]*i;
23            _inv[i]=_finv[i]*_fac[i-1];
24        }
25        n=m;
26    }
27
28    Z fac(int m)

```



```

29     {
30         if (m>n) init(m<<1);
31         return _fac[m];
32     }
33
34     Z finv(int m)
35     {
36         if (m>n) init(m<<1);
37         return _finv[m];
38     }
39
40     Z inv(int m)
41     {
42         if (m>n) init(m<<1);
43         return _inv[m];
44     }
45
46     Z binom(int n,int m)
47     {
48         if (n<m||m<0) return 0;
49         return fac(n)*finv(m)*finv(n-m);
50     }
51 } comb;

```

多项式

```

1  vector<int> rev;
2  vector<Z> roots{0,1};
3
4  void dft(vector<Z> &a)
5  {
6      int n=a.size();
7      if (int(rev.size())!=n)
8      {
9          int k=__builtin_ctz(n)-1;
10         rev.resize(n);
11         for (int i=0;i<n;i++)
12             rev[i]=rev[i>>1]>>1|(i&1)<<k;
13     }
14     for (int i=0;i<n;i++)
15         if (rev[i]<i)
16             swap(a[i],a[rev[i]]);
17     if (int(roots.size())<n)
18     {
19         int k=__builtin_ctz(roots.size());
20         roots.resize(n);
21         while ((1<<k)<n)
22         {
23             Z e=power(Z(3),(P-1)>>(k+1));
24             for (int i=1<<(k-1);i<(1<<k);i++)
25             {
26                 roots[i<<1]=roots[i];
27                 roots[i<<1|1]=roots[i]*e;
28             }
29             k++;
30         }
31     }
32     for (int k=1;k<n;k<=<1)
33         for (int i=0;i<n;i+=k*2)
34             for (int j=0;j<k;j++)
35             {
36                 Z u=a[i+j],v=a[i+j+k]*roots[j+k];
37                 a[i+j]=u+v;
38                 a[i+j+k]=u-v;
39             }
40 }
41
42 void idft(vector<Z> &a)
43 {
44     int n=a.size();
45     reverse(a.begin()+1,a.end());

```

```

46     dft(a);
47     Z inv=(1-P)/n;
48     for (int i=0;i<n;i++) a[i]*=inv;
49 }
50
51 struct Poly
52 {
53     vector<Z> a;
54
55     Poly(){}
56     explicit Poly(int size,function<Z(int)>f=[](int) { return 0; }):a(size)
57     { for (int i=0;i<size;i++) a[i]=f(i); }
58     Poly(const vector<Z> &a):a(a){}
59     Poly(const initializer_list<Z> &a):a(a){}
60
61     int size() const { return a.size(); }
62
63     void resize(int n) { a.resize(n); }
64
65     Z operator [] (int idx) const
66     {
67         if (idx<size()) return a[idx];
68         else return 0;
69     }
70
71     Z &operator [] (int idx) { return a[idx]; }
72
73     Poly mulxk(int k) const
74     {
75         auto b=a;
76         b.insert(b.begin(),k,0);
77         return Poly(b);
78     }
79
80     Poly modxk(int k) const
81     {
82         k=min(k,size());
83         return Poly(vector<Z>(a.begin(),a.begin()+k));
84     }
85
86     Poly divxk(int k) const
87     {
88         if (size()<=k) return Poly();
89         return Poly(vector<Z>(a.begin()+k,a.end()));
90     }
91
92     friend Poly operator + (const Poly &a,const Poly &b)
93     {
94         vector<Z> res(max(a.size(),b.size()));
95         for (int i=0;i<int(res.size());i++)
96             res[i]=a[i]+b[i];
97         return Poly(res);
98     }
99
100    friend Poly operator - (const Poly &a,const Poly &b)
101    {
102        vector<Z> res(max(a.size(),b.size()));
103        for (int i=0;i<int(res.size());i++)
104            res[i]=a[i]-b[i];
105        return Poly(res);
106    }
107
108    friend Poly operator - (const Poly &a)
109    {
110        vector<Z> res(a.size());
111        for (int i=0;i<int(res.size());i++)
112            res[i]=-a[i];
113        return Poly(res);
114    }
115
116    friend Poly operator * (Poly a,Poly b)

```

```

117 {
118     if (!a.size() || !b.size()) return Poly();
119     if (a.size() < b.size()) swap(a,b);
120     if (b.size() < 128)
121     {
122         Poly c(a.size()+b.size()-1);
123         for (int i=0; i<a.size(); i++)
124             for (int j=0; j<b.size(); j++)
125                 c[i+j] += a[i]*b[j];
126         return c;
127     }
128     int sz=1, tot=a.size()+b.size()-1;
129     while (sz<tot) sz<<=1;
130     a.a.resize(sz);
131     b.a.resize(sz);
132     dft(a.a);
133     dft(b.a);
134     for (int i=0; i<sz; i++)
135         a.a[i] = a[i]*b[i];
136     idft(a.a);
137     a.resize(tot);
138     return a;
139 }
140
141 friend Poly operator * (Z a, Poly b)
142 {
143     for (int i=0; i<int(b.size()); i++) b[i] *= a;
144     return b;
145 }
146
147 friend Poly operator * (Poly a, Z b)
148 {
149     for (int i=0; i<int(a.size()); i++) a[i] *= b;
150     return a;
151 }
152
153 Poly &operator += (Poly b) { return (*this) = (*this) + b; }
154 Poly &operator -= (Poly b) { return (*this) = (*this) - b; }
155 Poly &operator *= (Poly b) { return (*this) = (*this) * b; }
156 Poly &operator *= (Z b) { return (*this) = (*this) * b; }
157
158 Poly deriv() const
159 {
160     if (a.empty()) return Poly();
161     vector<Z> res(size()-1);
162     for (int i=0; i<size()-1; i++)
163         res[i] = (i+1)*a[i+1];
164     return Poly(res);
165 }
166
167 Poly integr() const
168 {
169     vector<Z> res(size()+1);
170     for (int i=0; i<size(); i++)
171         res[i+1] = a[i]/(i+1);
172     return Poly(res);
173 }
174
175 Poly inv(int m) const
176 {
177     Poly x{a[0].inv()};
178     int k=1;
179     while (k<m)
180     {
181         k<<=1;
182         x = (x*(Poly{2}-modxk(k)*x)).modxk(k);
183     }
184     return x.modxk(m);
185 }
186
187 Poly ln(int m) const { return (deriv()*inv(m)).integr().modxk(m); }

```

```

188
189 Poly exp(int m) const
190 {
191     Poly x{1};
192     int k=1;
193     while (k<m)
194     {
195         k<<=1;
196         x=(x*(Poly{1}-x.ln(k)+modxk(k)).modxk(k));
197     }
198     return x.modxk(m);
199 }
200
201 Poly pow(int k,int m) const
202 {
203     int i=0;
204     while (i<size()&&a[i].val()==0) i++;
205     if (i==size()||1ll*i*k>=m) return Poly(vector<Z>(m));
206     Z v=a[i];
207     auto f=divxk(i)*v.inv();
208     return (f.ln(m-i*k)*k).exp(m-i*k).mulxk(i*k)*power(v,k);
209 }
210
211 Poly sqrt(int m) const
212 {
213     Poly x{1};
214     int k=1;
215     while (k<m)
216     {
217         k<<=1;
218         x=(x+(modxk(k)*x.inv(k)).modxk(k))*((P+1)/2);
219     }
220     return x.modxk(m);
221 }
222 Poly mult(Poly b) const
223 {
224     if (b.size()==0) return Poly();
225     int n=b.size();
226     reverse(b.a.begin(),b.a.end());
227     return ((*this)*b).divxk(n-1);
228 }
229
230 vector<Z> eval(vector<Z> x) const
231 {
232     if (size()==0) return vector<Z>(x.size(),0);
233     const int n=max(int(x.size()),size());
234     vector<Poly> q(n<<2);
235     vector<Z> ans(x.size());
236     x.resize(n);
237     function<void(int,int,int)> build=[&](int p,int l,int r)
238     {
239         if (r-l==1) q[p]=Poly{1,-x[l]};
240         else
241         {
242             int m=(l+r)>>1;
243             build(p<<1,l,m);
244             build(p<<1|1,m,r);
245             q[p]=q[p<<1]*q[p<<1|1];
246         }
247     };
248     function<void(int,int,int,const Poly&)> work=[&](int p,int l,int r,const Poly &num)
249     {
250         if (r-l==1)
251         {
252             if (l<int(ans.size())) ans[l]=num[0];
253         }
254         else
255         {
256             int m=(l+r)>>1;
257             work(p<<1,l,m,num.mult(q[p<<1|1]).modxk(m-l));
258             work(p<<1|1,m,r,num.mult(q[p<<1]).modxk(r-m));

```

```

259         }
260     };
261     build(1,0,n);
262     work(1,0,n,mulT(q[1].inv(n)));
263     return ans;
264 }
265 };

```

原根表

1	prime	r	k	g
2	3	1	1	2
3	5	1	2	2
4	17	1	4	3
5	97	3	5	5
6	193	3	6	5
7	257	1	8	3
8	7681	15	9	17
9	12289	3	12	11
10	40961	5	13	3
11	65537	1	16	3
12	786433	3	18	10
13	5767169	11	19	3
14	7340033	7	20	3
15	23068673	11	21	3
16	104857601	25	22	3
17	167772161	5	25	3
18	469762049	7	26	3
19	1004535809	479	21	3
20	2013265921	15	27	31
21	2281701377	17	27	3
22	3221225473	3	30	5
23	75161927681	35	31	3
24	77309411329	9	33	7
25	206158430209	3	36	22
26	2061584302081	15	37	7
27	2748779069441	5	39	3
28	6597069766657	3	41	5
29	39582418599937	9	42	5
30	79164837199873	9	43	5
31	263882790666241	15	44	7
32	1231453023109121	35	45	3
33	1337006139375617	19	46	3
34	3799912185593857	27	47	5
35	4222124650659841	15	48	19
36	7881299347898369	7	50	6
37	31525197391593473	7	52	3
38	180143985094819841	5	55	6
39	1945555039024054273	27	56	5
40	4179340454199820289	29	57	3

线性基

```

1  struct LB
2  {
3      static constexpr int L=60;
4      array<i64,L+1> a{};
5
6      LB(){}
7
8      LB(const vector<i64> &v) { init(v); }
9
10     bool insert(i64 t)
11     {
12         for (int i=L;i>=0;i--)
13             if (t&(1ll<<i))
14             {
15                 if (!a[i])
16                 {
17                     a[i]=t;

```

```

18         return 1;
19     }
20     else t^=a[i];
21 }
22 return 0;
23 }
24
25 void init(const vector<i64> &v) { for (auto x:v) insert(x); }
26
27 bool check(i64 t)
28 {
29     for (int i=L;i>=0;i--)
30         if (t&(1ll<<i))
31             if (!a[i]) return 0;
32             else t^=a[i];
33     return 1;
34 }
35
36 i64 QueryMax()
37 {
38     i64 res=0;
39     for (int i=L;i>=0;i--)
40         res=max(res,res^a[i]);
41     return res;
42 }
43
44 i64 QueryMin()
45 {
46     for (int i=0;i<=L;i++)
47         if (a[i]) return a[i];
48     return 0;
49 }
50
51 i64 QueryKth(int k)
52 {
53     i64 res=0;
54     int cnt=0;
55     array<i64,L+1> tmp{};
56     for (int i=0;i<=L;i++)
57     {
58         for (int j=i-1;j>=0;j--)
59             if (a[i]&(1ll<<j)) a[i]^=a[j];
60         if (a[i]) tmp[cnt++]=a[i];
61     }
62     if (k>=(1ll<<cnt)) return -1;
63     for (int i=0;i<cnt;i++)
64         if (k&(1ll<<i)) res^=tmp[i];
65     return res;
66 }
67 };

```

min-plus 卷积

$\mathcal{O}(n \log n)$, 但要求 b 是凸的。

```

1 template <class T>
2 vector<T> min_plus_convolution(const vector<T> &a,const vector<T> &b)
3 {
4     int n=a.size(),m=b.size();
5     vector<T> c(n+m-1);
6
7     function<void(int,int,int,int)> solve=[&](int l,int r,int ql,int qr)
8     {
9         if (l>r) return;
10        int mid=(l+r)>>1;
11        while (ql+m<=l) ++ql;
12        while (qr>r) --qr;
13        int qmid=-1;
14        c[mid]=inf;
15        for (int i=ql;i<=qr;i++)
16        {

```

```

17         if (a[i]+b[mid-i]-i<c[mid])
18         {
19             c[mid]=a[i]+b[mid-i];
20             qmid=i;
21         }
22         else if (mid-i>=0&&mid-i<m) qmid=i;
23     }
24     solve(l,mid-1,ql,mid);
25     solve(mid+1,r,qmid,qr);
26 };
27
28 solve(0,n+m-2,0,n-1);
29 return c;
30 }

```

模意义分数还原

分别是求：分子不大于 A 时分子最大的分数；分子分母最大值最小的分数。

```

1 pair<int,int> restore(int q,int A)
2 {
3     int x=q,y=P,a=1,b=0;
4     while (x>A)
5     {
6         swap(x,y);
7         swap(a,b);
8         a-=x/y*b;
9         x%=y;
10    }
11    return make_pair(x,a);
12 }
13
14 pair<int,int> restore(int x)
15 {
16     vector<int> a;
17     int p=P;
18     Z inv=Z(x).inv();
19     while (x)
20     {
21         a.push_back(x);
22         swap(x,p);
23         x%=p;
24     }
25     pair<int,int> res{P,P};
26     for (auto ca:a)
27     {
28         int cb=(Z(ca)*inv).x;
29         ca=min(ca,P-ca);
30         cb=min(cb,P-cb);
31         if (max(res.first,res.second)>max(ca,cb))
32             res={ca,cb};
33     }
34     return res;
35 }

```

Exgcd

可以证明 $|x| \leq b, |y| \leq a$ 。

```

1 void exgcd(i64 a,i64 b,i64 &x,i64 &y)
2 {
3     if (!b)
4     {
5         x=1; y=0;
6         return;
7     }
8     exgcd(b,a%b,x,y);
9     swap(x,y);
10    y-=a/b*x;

```

```

11     return;
12 }

```

一次函数下取整区间和

求 $\sum_{i=0}^n \lfloor \frac{ai+b}{c} \rfloor$.

其实是类欧，时间复杂度为 $\mathcal{O}(\log n)$ 。

```

1 //求 sum_{i=0}^n floor(a*i+b/c).
2 i64 floorSum(i64 a,i64 b,i64 c,i64 n)
3 {
4     i64 res=0;
5     if (a>=c)
6     {
7         res+=n*(n+1)*(a/c)/2;
8         a%=c;
9     }
10    if (b>=c)
11    {
12        res+=(n+1)*(b/c);
13        b%=c;
14    }
15    i64 m=(a*n+b)/c;
16    if (m==0) return res;
17    res+=n*m-floorSum(c,c-b-1,a,m-1);
18    return res;
19 }

```

二元一次不定方程

给定不定方程 $ax + by = c$ 。

若该方程无整数解，输出 -1 。

若该方程有整数解，且有正整数解，则输出其正整数解的数量，所有正整数解中 x 的最小值，所有正整数解中 y 的最小值，所有正整数解中 x 的最大值，以及所有正整数解中 y 的最大值。

若方程有整数解，但没有正整数解，输出所有整数解中 x 的最小正整数值， y 的最小正整数值。

```

1 void exgcd(i64 a,i64 b,i64 &x,i64 &y)
2 {
3     if (!b)
4     {
5         x=1; y=0;
6         return;
7     }
8     exgcd(b,a%b,x,y);
9     swap(x,y);
10    y-=a/b*x;
11    return;
12 }
13
14 i64 ceilDiv(i64 n,i64 m)
15 {
16     if (n>=0) return (n+m-1)/m;
17     else return n/m;
18 }
19
20 i64 floorDiv(i64 n,i64 m)
21 {
22     if (n>=0) return n/m;
23     else return (n-m+1)/m;
24 }
25
26 void R()
27 {
28     i64 a,b,c,x,y,t;
29     cin>>a>>b>>c;
30     t=__gcd(a,b);

```



```

31     if (c%t)
32     {
33         cout<<"-1\n";
34         return;
35     }
36     exgcd(a,b,x,y);
37     x*=c/t,y*=c/t;
38     i64 l=ceilDiv(1ll-x,b/t),r=floorDiv(y-1ll,a/t);
39     if (l>r) cout<<x+l*b/t<<' '<<y-r*a/t<<' \n';
40     else cout<<r-l+1ll<<' '<<x+l*b/t<<' '<<y-r*a/t<<' '<<x+r*b/t<<' '<<y-l*a/t<<' \n';
41     return;
42 }

```

行列式求值

时间复杂度为 $\mathcal{O}(n^3)$ 。

```

1  Z det(vector<vector<Z>> a)
2  {
3      int n=a.size(),fl=1;
4      Z res=1;
5      for (int i=0;i<n;i++)
6      {
7          for (int j=i+1;j<n;j++)
8          {
9              while (a[i][j].x)
10             {
11                 int d=a[j][i].x/a[i][i].x;
12                 for (int k=i;k<n;k++)
13                     a[j][k]-=a[i][k]*d;
14                 swap(a[i],a[j]);
15                 fl=-fl;
16             }
17             swap(a[i],a[j]);
18             fl=-fl;
19         }
20     }
21     for (int i=0;i<n;i++) res*=a[i][i];
22     res*=fl;
23     return res;
24 }

```

高斯消元法

返回 -1 代表无解，其余情况返回自由元数。

```

1  using Real=long double;
2  constexpr Real eps=1e-8;
3
4  int Gauss(vector<vector<Real>> a,vector<Real> &x)
5  {
6      int n=a.size(),i=0,j=0;
7      for (;i<n&& j<n;i++,j++)
8      {
9          int mx=i;
10         for (int k=i+1;k<n;k++)
11             if (abs(a[k][j])>abs(a[mx][j]))
12                 mx=k;
13         if (mx!=i) swap(a[mx],a[i]);
14         if (fabs(a[i][j])<eps)
15         {
16             i--;
17             continue;
18         }
19         for (int k=i+1;k<n;k++)
20             if (fabs(a[k][j])>eps)
21             {
22                 Real t=a[k][j]/a[i][j];
23                 for (int l=j;l<n;l++)
24                     a[k][l]-=a[i][l]*t;

```

```

25         a[k][j]=0;
26     }
27 }
28 for (int k=i;k<n;k++)
29     if (fabs(a[k][j])>eps)
30         return -1;//No solution
31 if (i<n) return n-i;//number of free elements
32 for (int k=n-1;k>=0;k--)
33 {
34     for (int l=k+1;l<n;l++)
35         a[k][n]-=a[k][l]*x[l];
36     x[k]=a[k][n]/a[k][k];
37 }
38 return 0;//Only one solution
39 }

```

枚举二进制下有 k 个 1 的数

```

1 for (int s=(1<<k)-1,t;s<1<<n;t=s+(s&-s),s=(s&~t)>>__lg(s&-s)+1|t)

```

康托展开

$n \leq 20$ 时使用，时间复杂度为 $\mathcal{O}(n^2)$ 。

```

1 //记得预处理前 20 位阶乘
2 i64 fac[21]={1};
3
4 i64 cantor(vector<int> p,int n)
5 {
6     vector<int> a(n);
7     i64 res=1;
8     for (int i=0;i<n;i++)
9         for (int j=i+1;j<n;j++)
10             if (p[j]<p[i])
11                 a[i]++;
12     for (int i=0;i<n-1;i++)
13         res+=a[i]*fac[n-i-1];
14     return res;
15 }
16
17 vector<int> decantor(i64 x,int n)
18 {
19     x--;
20     vector<int> rest(n),a(n),p(n);
21     iota(rest.begin(),rest.end(),1);
22     for (int i=0;i<n;i++)
23     {
24         a[i]=x/fac[n-i-1];
25         x%=fac[n-i-1];
26     }
27     for (int i=0;i<n;i++)
28     {
29         p[i]=rest[a[i]];
30         rest.erase(lower_bound(rest.begin(),rest.end(),p[i]));
31     }
32     return p;
33 }

```

$n > 20$ 时使用，时间复杂度为 $\mathcal{O}(n \log n)$ 。

逆康托要求传入 $\text{ord} - 1 = \sum_{i=1}^n a_i (n-i)!$ 的 a 。

```

1 Z cantor(vector<int> p,int n)
2 {
3     Z res=1;
4     vector<int> a(n);
5     BIT<int> bit(n+1);
6     for (int i=n-1;i>=0;i--)
7     {
8         a[i]=bit.sum(p[i]);

```

```

9      bit.add(p[i],1);
10  }
11  for (int i=0;i<n-1;i++)
12      res+=Z(a[i])*comb.fac(n-i-1);
13  return res;
14  }
15
16  vector<int> decantor(vector<int> a,int n)
17  {
18      int cnt=0;
19      vector<int> p(n);
20      __gnu_pbds::tree<pair<int,int>,__gnu_pbds::null_type,
21      less<pair<int,int>>,__gnu_pbds::rb_tree_tag,
22      __gnu_pbds::tree_order_statistics_node_update> tr;
23
24      for (int i=1;i<=n;i++)
25          tr.insert({i,cnt++});
26      for (int i=0;i<n;i++)
27      {
28          p[i]=tr.find_by_order(a[i])->first;
29          tr.erase(tr.lower_bound({p[i],0}));
30      }
31      return p;
32  }

```

Lagrange 插值法

$\mathcal{O}(n^2)$ 还原系数。

```

1  vector<Z> Lagrange(const vector<Z> &x,const vector<Z> &y)
2  {
3      int n=x.size();
4      vector<Z> a(n),b(n+1),c(n+1),f(n);
5      for (int i=0;i<n;i++)
6      {
7          Z t=1;
8          for (int j=0;j<n;j++)
9              if (i!=j)
10                  t*=x[i]-x[j];
11          a[i]=y[i]/t;
12      }
13
14      b[0]=1;
15      for (int i=0;i<n;i++)
16      {
17          for (int j=i+1;j<=n;j--)
18              b[j]=b[j-1]-b[j]*x[i];
19          b[0]*=-x[i];
20      }
21
22      for (int i=0;i<n;i++)
23      {
24          if (x[i].x==0)
25          {
26              for (int j=0;j<n;j++)
27                  c[j]=b[j+1];
28          }
29          else
30          {
31              Z inv=(-x[i]).inv();
32              c[0]=b[0]*inv;
33              for (int j=1;j<=n;j++)
34                  c[j]=(b[j]-c[j-1])*inv;
35          }
36          for (int j=0;j<n;j++)
37              f[j]+=a[i]*c[j];
38      }
39      return f;
40  }

```

数据结构

并查集（启发式合并 + 带撤销）

```
1 struct DSU
2 {
3     int n=0;
4     vector<int> fa,siz;
5     stack<int> s;
6
7     DSU(int n) { init(n); }
8
9     void init(int n)
10    {
11        fa.resize(n);
12        iota(fa.begin(),fa.end(),0);
13        siz.assign(n,1);
14        while (!s.empty()) s.pop();
15    }
16
17    int get(int x) { return fa[x]==x?x:get(fa[x]); }
18
19    void merge(int x,int y)
20    {
21        x=get(x),y=get(y);
22        if (x==y) return;
23        if (siz[x]<siz[y]) swap(x,y);
24        s.push(y),fa[y]=x,siz[x]+=siz[y];
25    }
26
27    void undo()
28    {
29        if (s.empty()) return;
30        int y=s.top();
31        s.pop();
32        siz[fa[y]]-=siz[y];
33        fa[y]=y;
34    }
35
36    void back(int t=0) { while (s.size()) undo(); }
37 };
```

笛卡尔树

```
1 struct CartesianTree
2 {
3     vector<int> ls,rs;
4
5     CartesianTree(){}
6
7     template<class T>
8     CartesianTree(vector<T> &a) { init(a); }
9
10    template<class T>
11    void init(vector<T> &a)
12    {
13        int n=a.size(),top=0;
14        vector<int> stk(n);
15        ls.assign(n,-1);
16        rs.assign(n,-1);
17        for (int i=1;i<n;i++)
18        {
19            int k=top;
20            while (k>=0&&a[stk[k]]>a[i])
21                k--;
22            if (k>=0) rs[stk[k]]=i;
23            if (k<top) ls[i]=stk[k+1];
24            stk[++k]=i;
25            top=k;
26        }
27    }
```

```

27     }
28 };

```

状压 RMQ

```

1  template <class T,class Cmp=less<T>>
2  struct RMQ
3  {
4      const Cmp cmp=Cmp();
5      static constexpr unsigned B=64;
6      using u64=unsigned long long;
7      int n;
8      vector<vector<T>> a;
9      vector<T> pre,suf,ini;
10     vector<u64> stk;
11
12     RMQ() {}
13     RMQ(const vector<T> &v) { init(v); }
14
15     void init(const vector<T> &v)
16     {
17         n=v.size();
18         pre=suf=ini=v;
19         stk.resize(n);
20         if (!n) return;
21         const int M=(n-1)/B+1;
22         const int lg=__lg(M);
23         a.assign(lg+1,vector<T>(M));
24         for (int i=0;i<M;i++)
25         {
26             a[0][i]=v[i*B];
27             for (int j=1;j<B&& i*B+j<n;j++)
28                 a[0][i]=min(a[0][i],v[i*B+j],cmp);
29         }
30         for (int i=1;i<n;i++)
31             if (i%B) pre[i]=min(pre[i],pre[i-1],cmp);
32         for (int i=n-2;i>=0;i--)
33             if (i%B!=B-1) suf[i]=min(suf[i],suf[i+1],cmp);
34         for (int j=0;j<lg;j++)
35             for (int i=0;i+(2<<j)<=M;i++)
36                 a[j+1][i]=min(a[j][i],a[j][i+(1<<j)],cmp);
37         for (int i=0;i<M;i++)
38         {
39             const int l=i*B;
40             const int r=min(1U*n,l+B);
41             u64 s=0;
42             for (int j=l;j<r;j++)
43             {
44                 while (s&&cmp(v[j],v[__lg(s)+l])) s^=1ULL<<__lg(s);
45                 s|=1ULL<<(j-l);
46                 stk[j]=s;
47             }
48         }
49     }
50
51     //查询区间 [l,r) 的 RMQ
52     T operator()(int l,int r)
53     {
54         if (l/B!=(r-1)/B)
55         {
56             T ans=min(suf[l],pre[r-1],cmp);
57             l=l/B+1,r=r/B;
58             if (l<r)
59             {
60                 int k=__lg(r-l);
61                 ans=min({ans,a[k][l],a[k][r-(1<<k)]},cmp);
62             }
63             return ans;
64         }
65         else
66         {

```

```

67         int x=B*(l/B);
68         return ini[(__builtin_ctzll(stk[r-1]>>(l-x))+l)];
69     }
70 }
71 };

```

ST 表

```

1  template <class T>
2  struct ST
3  {
4      int n;
5      vector<vector<T>> a;
6
7      ST() {}
8      ST(const vector<T> &v) { init(v); }
9
10     void init(const vector<T> &v)
11     {
12         n=v.size();
13         if (!n) return;
14         const int lg=__lg(n);
15         a.assign(lg+1,vector<T>(n));
16         a[0]=v;
17         for (int j=0;j<lg;j++)
18             for (int i=0;i+(2<<j)<=n;i++)
19                 a[j+1][i]=__gcd(a[j][i],a[j][i+(1<<j)]);
20     }
21
22     T operator()(int l,int r)
23     {
24         int k=__lg(r-l);
25         return __gcd(a[k][l],a[k][r-(1<<k)]);
26     }
27 };

```

树状数组

```

1  template <class T>
2  struct BIT
3  {
4      int n;
5      vector<T> a;
6
7      BIT(int n_=0) { init(n_); }
8
9      void init(int n_)
10     {
11         n=n_;
12         a.assign(n,T{});
13     }
14
15     void add(int x,const T &v)
16     {
17         for (int i=x+1;i<=n;i+=i&-i)
18             a[i-1]=a[i-1]+v;
19     }
20
21     //查询区间 [0,x)
22     T sum(int x)
23     {
24         T ans{};
25         for (int i=x;i>0;i-=i&-i)
26             ans=ans+a[i-1];
27         return ans;
28     }
29
30     //查询区间 [l,r)
31     T rangeSum(int l,int r) { return sum(r)-sum(l); }
32

```

```

33     int select(const T &k)
34     {
35         int x=0;
36         T cur{};
37         for (int i=1<<__lg(n);i;i>>=1)
38         {
39             if (x+i<=n&&cur+a[x+i-1]<=k)
40             {
41                 x+=i;
42                 cur=cur+a[x-1];
43             }
44         }
45         return x;
46     }
47 };

```

线段树

```

1  template <class Info,class Tag>
2  struct SGT
3  {
4      int n;
5      vector<Info> info;
6      vector<Tag> tag;
7
8      SGT():n(0) {}
9      SGT(int n_,Info v_=Info()) { init(n_,v_); }
10
11     template <class T>
12     SGT(vector<T> init_) { init(init_); }
13
14     void init(int n_,Info v_=Info()) { init(vector(n_,v_)); }
15
16     template <class T>
17     void init(vector<T> init_)
18     {
19         n=init_.size();
20         info.assign(4<<__lg(n),Info());
21         tag.assign(4<<__lg(n),Tag());
22         function<void(int,int,int)> build=[&](int p,int l,int r)
23         {
24             if (r-l==1)
25             {
26                 info[p]=init_[l];
27                 return;
28             }
29             int m=(l+r)>>1;
30             build(p<<1,l,m);
31             build(p<<1|1,m,r);
32             pushup(p);
33         };
34         build(1,0,n);
35     }
36
37     void pushup(int p) { info[p]=info[p<<1]+info[p<<1|1]; }
38
39     void apply(int p,const Tag &v)
40     {
41         info[p].apply(v);
42         tag[p].apply(v);
43     }
44
45     void pushdown(int p)
46     {
47         apply(p<<1,tag[p]);
48         apply(p<<1|1,tag[p]);
49         tag[p]=Tag();
50     }
51
52     void modify(int p,int l,int r,int x,const Info &v)
53     {

```

```

54     if (r-l==1)
55     {
56         info[p]=v;
57         return;
58     }
59     int m=(l+r)>>1;
60     pushdown(p);
61     if (x<m) modify(p<<1,l,m,x,v);
62     else modify(p<<1|1,m,r,x,v);
63     pushup(p);
64 }
65
66 //O(log n) 单点修改
67 void modify(int p,const Info &v) { modify(1,0,n,p,v); }
68
69 Info rangeQuery(int p,int l,int r,int x,int y)
70 {
71     if (l>=y||r<=x) return Info();
72     if (l>=x&&r<=y) return info[p];
73     int m=(l+r)>>1;
74     pushdown(p);
75     return rangeQuery(p<<1,l,m,x,y)+rangeQuery(p<<1|1,m,r,x,y);
76 }
77
78 //O(log n) 区间查询 [l,r)
79 Info rangeQuery(int l,int r) { rangeQuery(1,0,n,l,r); }
80
81 void rangeApply(int p,int l,int r,int x,int y,const Tag &v)
82 {
83     if (l>=y||r<=x) return;
84     if (l>=x&&r<=y)
85     {
86         apply(p,v);
87         return;
88     }
89     int m=(l+r)>>1;
90     pushdown(p);
91     rangeApply(p<<1,l,m,x,y,v);
92     rangeApply(p<<1|1,m,r,x,y,v);
93     pushup(p);
94 }
95
96 //O(log n) 区间操作 [l,r)
97 void rangeApply(int l,int r,const Tag &v) { rangeApply(1,0,n,l,r,v); }
98
99 //O(log n) 区间 [l,r) 内查找第一个合法位置
100 template <class F>
101 int findFirst(int p,int l,int r,int x,int y,F pred)
102 {
103     if (l>=y||r<=x||!pred(info[p])) return -1;
104     if (r-l==1) return l;
105     int m=(l+r)>>1;
106     pushdown(p);
107     int res=findFirst(p<<1,l,m,x,y,pred);
108     if (res!=-1) res=findFirst(p<<1|1,m,r,x,y,pred);
109     return res;
110 }
111
112 template <class F>
113 int findFirst(int l,int r,F pred) { return findFirst(1,0,n,l,r,pred); }
114
115 template <class F>
116 int findLast(int p,int l,int r,int x,int y,F pred)
117 {
118     if (l>=y||r<=x||!pred(info[p])) return -1;
119     if (r-l==1) return l;
120     int m=(l+r)>>1;
121     pushdown(p);
122     int res=findLast(p<<1|1,m,r,x,y,pred);
123     if (res!=-1) res=findLast(p<<1,l,m,x,y,pred);
124     return res;

```



```

125     }
126
127     template <class F>
128     int findLast(int l, int r, F pred) { return findLast(1, 0, n, l, r, pred); }
129 };
130
131 //这里默认乘法优先 (x*a+b)*c+d=x*(a*c)+(b*c+d)
132 struct Tag
133 {
134     i64 a=1, b=0;
135     void apply(Tag t)
136     {
137         a*=t.a;
138         b=b*t.a+t.b;
139     }
140 };
141
142 struct Info
143 {
144     i64 x=0, l=0, r=0;
145     void apply(Tag t)
146     {
147         int len=r-l+1;
148         x=x*t.a+len*t.b;
149     }
150 };
151
152 Info operator + (Info a, Info b)
153 {
154     return {a.x+b.x, min(a.l, b.l), max(a.r, b.r)};
155 }

```

可并堆 (pb_ds)

成员函数

- push(): 向堆中压入一个元素，返回该元素位置的迭代器。
- pop(): 将堆顶元素弹出。
- top(): 返回堆顶元素。
- size() 返回元素个数。
- empty() 返回是否非空。
- modify(point_iterator, const key): 把迭代器位置的 key 修改为传入的 key，并对底层储存结构进行排序。
- erase(point_iterator): 把迭代器位置的键值从堆中擦除。
- join(__gnu_pbds::priority_queue &other): 把 other 合并到 *this 并把 other 清空。

示例

```

1  #include <algorithm>
2  #include <cstdio>
3  #include <ext/pb_ds/priority_queue.hpp>
4  #include <iostream>
5  using namespace __gnu_pbds;
6  // 由于面向 Oier，本文以常用堆：pairing_heap_tag 作为范例
7  // 为了更好的阅读体验，定义宏如下：
8  using pair_heap = __gnu_pbds::priority_queue<int>;
9  pair_heap q1; // 大根堆，配对堆
10 pair_heap q2;
11 pair_heap::point_iterator id; // 一个迭代器
12
13 int main() {
14     id = q1.push(1);
15     // 堆中元素：[1];
16     for (int i = 2; i <= 5; i++) q1.push(i);
17     // 堆中元素：[1, 2, 3, 4, 5];
18     std::cout << q1.top() << std::endl;
19     // 输出结果：5;
20     q1.pop();
21     // 堆中元素：[1, 2, 3, 4];

```

```

22     id = q1.push(10);
23     // 堆中元素 : [1, 2, 3, 4, 10];
24     q1.modify(id, 1);
25     // 堆中元素 : [1, 1, 2, 3, 4];
26     std::cout << q1.top() << std::endl;
27     // 输出结果 : 4;
28     q1.pop();
29     // 堆中元素 : [1, 1, 2, 3];
30     id = q1.push(7);
31     // 堆中元素 : [1, 1, 2, 3, 7];
32     q1.erase(id);
33     // 堆中元素 : [1, 1, 2, 3];
34     q2.push(1), q2.push(3), q2.push(5);
35     // q1 中元素 : [1, 1, 2, 3], q2 中元素 : [1, 3, 5];
36     q2.join(q1);
37     // q1 中无元素, q2 中元素 : [1, 1, 1, 2, 3, 3, 5];
38 }

```

平衡树 (pb_ds)

成员函数

- insert(x): 向树中插入一个元素 x, 返回 std::pair<point_iterator, bool>。
- erase(x): 从树中删除一个元素/迭代器 x, 返回一个 bool 表明是否删除成功。
- order_of_key(x): 返回 x 以 Cmp_Fn 比较的排名。
- find_by_order(x): 返回 Cmp_Fn 比较的排名所对应元素的迭代器。
- lower_bound(x): 以 Cmp_Fn 比较做 lower_bound, 返回迭代器。
- upper_bound(x): 以 Cmp_Fn 比较做 upper_bound, 返回迭代器。
- join(x): 将 x 树并入当前树, 前提是两棵树的类型一样, x 树被删除。
- split(x,b): 以 Cmp_Fn 比较, 小于等于 x 的属于当前树, 其余的属于 b 树。
- empty(): 返回是否为空。
- size(): 返回大小。

注意 join(x) 函数需要保证并入树的键的值域与被并入树的键的值域 **不相交** (也就是说并入树内所有值必须全部大于/小于当前树内的所有值), 否则会抛出 join_error 异常。

如果要合并两棵值域有交集的树, 需要将一棵树的元素一一插入到另一棵树中。

示例

```

1  // Common Header Simple over C++11
2  #include <iostream>
3  using namespace std;
4  using ll = long long;
5  using ull = unsigned long long;
6  using ld = long double;
7  using pii = pair<int, int>;
8  #include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
9  #include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
10 __gnu_pbds::tree<pair<int, int>, __gnu_pbds::null_type, less<pair<int, int>>,
11                 __gnu_pbds::rb_tree_tag,
12                 __gnu_pbds::tree_order_statistics_node_update>
13     trr;
14
15 int main() {
16     int cnt = 0;
17     trr.insert(make_pair(1, cnt++));
18     trr.insert(make_pair(5, cnt++));
19     trr.insert(make_pair(4, cnt++));
20     trr.insert(make_pair(3, cnt++));
21     trr.insert(make_pair(2, cnt++));
22     // 树上元素 {{1,0},{2,4},{3,3},{4,2},{5,1}}
23     auto it = trr.lower_bound(make_pair(2, 0));
24     trr.erase(it);
25     // 树上元素 {{1,0},{3,3},{4,2},{5,1}}
26     auto it2 = trr.find_by_order(1);
27     cout << (*it2).first << endl;
28     // 输出排名 0 1 2 3 中的排名 1 的元素的 first:1

```

```

29     int pos = trr.order_of_key(*it2);
30     cout << pos << endl;
31     // 输出排名
32     decltype(trr) newtr;
33     trr.split(it2, newtr);
34     for (auto i = newtr.begin(); i != newtr.end(); ++i) {
35         cout << (*i).first << ' ';
36     }
37     cout << endl;
38     // {4,2},{5,1} 被放入新树
39     trr.join(newtr);
40     for (auto i = trr.begin(); i != trr.end(); ++i) {
41         cout << (*i).first << ' ';
42     }
43     cout << endl;
44     cout << newtr.size() << endl;
45     // 将 newtr 树并入 trr 树, newtr 树被删除。
46     return 0;
47 }

```

哈希表 (pb_ds)

当 map 用即可。

```

1  #include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
2  #include <ext/pb_ds/hash_policy.hpp>
3  using u64=unsigned long long;
4
5  mt19937_64 rnd(chrono::steady_clock::now().time_since_epoch().count());
6  struct Hash
7  {
8      u64 operator ()(u64 x) const
9      {
10         static const u64 s1=rnd(),s2=rnd(),s3=rnd();
11         x+=s1;
12         x=(x^(x>>33))*s2;
13         x=(x^(x>>30))*s3;
14         return x;
15     }
16 };
17
18 __gnu_pbds::gp_hash_table<u64,u64,Hash> mp;

```

字符串

字符串哈希 (随机模数)

允许 k 次失配的字符串匹配

枚举原串起点，二分出第一个失配位置，直到找不到失配位置或失配次数超过 k ，时间复杂度 $\mathcal{O}(m + kn \log m)$ 。

最长公共子串

二分答案，把对应长度串的哈希值丢进 map/unordered_map 里判就好，时间复杂度 $\mathcal{O}(m + n \log^2 n)$ 。

Code

```

1  bool isPrime(int n)
2  {
3      if (n<=1) return 0;
4      for (int i=2;i*i<=n;i++)
5          if (n%i==0) return 0;
6      return 1;
7  }
8
9  int findPrime(int n)
10 {
11     while (!isPrime(n)) n++;

```

```

12     return n;
13 }
14
15 mt19937 rng(time(0));
16 const int P=findPrime(rng()%9000000000+1000000000);
17 struct StrHash
18 {
19     int n;
20     vector<int> h,p;
21
22     StrHash(const string &s){ init(s); }
23
24     void init(const string &s)
25     {
26         n=s.size();
27         h.resize(n+1);
28         p.resize(n+1);
29         p[0]=1;
30         for (int i=0;i<n;i++) h[i+1]=(10ll*h[i]+s[i]-'a'+1)%P;
31         for (int i=0;i<n;i++) p[i+1]=10ll*p[i]%P;
32     }
33
34     //查询 [l,r) 的区间哈希
35     int get(int l,int r) { return (h[r]+1ll*(P-h[l])*p[r-l])%P; }
36 };

```

KMP

字符串周期

最小正周期是 $n - \text{pre.back}()$ ，反复跳 pre 可以得到串的所有周期。

统计前缀出现次数

```

1 vector<int> ans(n+1);
2 for (int i=0;i<n;i++) ans[pre[i]]++;
3 for (int i=n-1;i>0;i--) ans[pre[i-1]] += ans[i];
4 for (int i=0;i<n;i++) ans[i]++;

```

求满足一些要求的 Border

比如有出现次数要求、两个前缀的最长公共 Border 什么的。

根据 pre 指针建出 Border 树，用类似 SAM 的 parent 树的处理方法就好。

Code

```

1 vector<int> KMP(const string &s)
2 {
3     int now=0;
4     vector<int> pre(s.size(),0);
5     for (int i=1;i<s.size();i++)
6     {
7         while (now&&s[i]!=s[now]) now=pre[now-1];
8         if (s[i]==s[now]) now++;
9         pre[i]=now;
10    }
11    return pre;
12 }

```

Z 函数

```

1 vector<int> zFunction(string s)
2 {
3     int n=s.size();
4     vector<int> z(n);
5     z[0]=n;
6     for (int i=1,j=1;i<n;i++)

```

```

7     {
8         z[i]=max(0,min(j+z[j]-i,z[i-j]));
9         while (i+z[i]<n&& s[z[i]]==s[i+z[i]]) z[i]++;
10        if (i+z[i]>j+z[j]) j=i;
11    }
12    return z;
13 }

```

AC 自动机

每个节点代表一个前缀，指针指向最大 Border。

```

1  struct ACAM
2  {
3      static constexpr int ALPHABET=26;
4      struct Node
5      {
6          int len;
7          int link;
8          array<int,ALPHABET> next;
9          Node():len{0},link{0},next{}{}
10     };
11
12     vector<Node> t;
13
14     ACAM() { init(); }
15
16     void init()
17     {
18         t.assign(2,Node());
19         t[0].next.fill(1);
20         t[0].len=-1;
21     }
22
23     int newNode()
24     {
25         t.emplace_back();
26         return t.size()-1;
27     }
28
29     int add(const string &a)
30     {
31         int p=1;
32         for (auto c:a)
33         {
34             int x=c-'a';
35             if (t[p].next[x]==0)
36             {
37                 t[p].next[x]=newNode();
38                 t[t[p].next[x]].len=t[p].len+1;
39             }
40             p=t[p].next[x];
41         }
42         return p;
43     }
44
45     void work()
46     {
47         queue<int> q;
48         q.push(1);
49         while (!q.empty())
50         {
51             int x=q.front();
52             q.pop();
53             for (int i=0;i<ALPHABET;i++)
54             {
55                 if (t[x].next[i]==0) t[x].next[i]=t[t[x].link].next[i];
56                 else
57                 {
58                     t[t[x].next[i]].link=t[t[x].link].next[i];
59                     q.push(t[x].next[i]);

```

```

60     }
61     }
62 }
63 }
64
65 int next(int p,int x) { return t[p].next[x]; }
66
67 int link(int p) { return t[p].link; }
68
69 int size() { return t.size(); }
70 };

```

后缀数组

```

1  struct SA
2  {
3      int n;
4      vector<int> sa,rk,lc;
5      SA(const string &s)
6      {
7          n=s.length();
8          sa.resize(n);
9          rk.resize(n);
10         lc.resize(n-1);
11         iota(sa.begin(),sa.end(),0);
12         sort(sa.begin(),sa.end(),[&](int a,int b){ return s[a]<s[b]; });
13         rk[sa[0]]=0;
14         for (int i=1;i<n;i++) rk[sa[i]]=rk[sa[i-1]]+(s[sa[i]]!=s[sa[i-1]]);
15         int k=1;
16         vector<int> tmp,cnt(n);
17         tmp.reserve(n);
18         while (rk[sa[n-1]]<n-1)
19         {
20             tmp.clear();
21             for (int i=0;i<k;i++) tmp.push_back(n-k+i);
22             for (auto i:sa)
23                 if (i>=k) tmp.push_back(i-k);
24             fill(cnt.begin(),cnt.end(),0);
25             for (int i=0;i<n;i++) cnt[rk[i]]++;
26             for (int i=1;i<n;i++) cnt[i]+=cnt[i-1];
27             for (int i=n-1;i>=0;i--) sa[--cnt[rk[tmp[i]]]]=tmp[i];
28             swap(rk,tmp);
29             rk[sa[0]]=0;
30             for (int i=1;i<n;i++)
31                 rk[sa[i]]=rk[sa[i-1]]+(tmp[sa[i-1]]<tmp[sa[i]] || sa[i-1]+k==n || tmp[sa[i-1]+k]<tmp[sa[i]+k]);
32             k<=<=1;
33         }
34         for (int i=0,j=0;i<n;i++)
35         {
36             if (rk[i]==0) j=0;
37             else
38             {
39                 for (j-=j>0;i+j<n&&sa[rk[i]-1]+j<n&&s[i+j]==s[sa[rk[i]-1]+j]); j++;
40                 lc[rk[i]-1]=j;
41             }
42         }
43     }
44 };

```

(广义) 后缀自动机

每个节点代表的是一个 endpos 集合，指针指向最小超集。

不同子串个数

考虑节点 i 代表的子串数是 $\text{len}(i) - \text{len}(\text{link}(i))$ ，求和即可。

字典序第 k 大子串

等价自动机上第 k 大路径，预处理每个状态后续路径数后 dfs 即可。

最小循环移位

对 $S + S$ 建自动机，字典序最小的 $|S|$ 长路径就是答案。

出现次数

每次插入字符后对终点做个标记，答案就是查询串在自动机上对应节点在 parent 树上的子树内标记和。

首次出现位置

维护每个节点对应首次出现位置 firstpos。

具体来说，插入点时 $\text{firstpos}(\text{cur}) = \text{len}(\text{cur}) + 1$ ，克隆点时 $\text{firstpos}(\text{clone}) = \text{firstpos}(q)$ 。

答案即为 $\text{firstpos}(t) - |T| + 1$ 。

所有出现位置

每次插入字符后对终点做个标记，查询时遍历 parent 树上的子树内标记并输出。

最短未出现字符串

自动机上 dp 即可，如果没有转移 dp 值就是 1，否则是各转移最小 dp 值加一，答案是根的 dp 值。

最长公共子串

把串都丢到自动机里，每次记录节点被哪些串占用，被所有串占用节点中 len 最大的就是答案。

Code

```
1  struct SAM
2  {
3      static constexpr int ALPHABET=26;
4      struct Node
5      {
6          int len;
7          int link;
8          array<int,ALPHABET> next;
9          Node():len{},link{},next{} {}
10     };
11
12     vector<Node> t;
13
14     SAM() { init(); }
15
16     void init()
17     {
18         t.assign(2,Node());
19         t[0].next.fill(1);
20         t[0].len=-1;
21     }
22
23     int newNode()
24     {
25         t.emplace_back();
26         return t.size()-1;
27     }
28
29     int extend(int lst,int c)
30     {
31         if (t[lst].next[c]&&t[t[lst].next[c]].len==t[lst].len+1)
32             return t[lst].next[c];
33         int p=lst,np=newNode(),flag=0;
```

```

34     t[np].len=t[p].len+1;
35     while (!t[p].next[c])
36     {
37         t[p].next[c]=np;
38         p=t[p].link;
39     }
40     if (!p)
41     {
42         t[np].link=1;
43         return np;
44     }
45     int q=t[p].next[c];
46     if (t[q].len==t[p].len+1)
47     {
48         t[np].link=q;
49         return np;
50     }
51     if (p==lst) flag=1,np=0,t.pop_back();
52     int nq=newNode();
53     t[nq].link=t[q].link;
54     t[nq].next=t[q].next;
55     t[nq].len=t[p].len+1;
56     t[q].link=t[np].link=nq;
57     while (p&& t[p].next[c]==q)
58     {
59         t[p].next[c]=nq;
60         p=t[p].link;
61     }
62     return flag?nq:np;
63 }
64
65 int add(const string &a)
66 {
67     int p=1;
68     for (auto c:a) p=extend(p,c-'a');
69     return p;
70 }
71
72 int next(int p,int x) { return t[p].next[x]; }
73
74 int link(int p) { return t[p].link; }
75
76 int len(int p) { return t[p].len; }
77
78 int size() { return t.size(); }
79 };

```

Manacher

```

1  vector<int> manacher(vector<int> s)
2  {
3      vector<int> t{0};
4      for (auto c:s)
5      {
6          t.push_back(c);
7          t.push_back(0);
8      }
9      int n=t.size();
10     vector<int> r(n);
11     for (int i=0,j=0;i<n;i++)
12     {
13         if (j*2-i>=0&&j+r[j]>i) r[i]=min(r[j*2-i],j+r[j]-i);
14         while (i-r[i]>=0&&i+r[i]<n&&t[i-r[i]]==t[i+r[i]]) r[i]++;
15         if (i+r[i]>j+r[j]) j=i;
16     }
17     return r;
18 }

```


回文自动机

每个节点代表的是一个回文子串，指针指向最长回文后缀。

本质不同回文子串数

即自动机点数，记得减去奇偶根。

回文子串出现次数

即 fail 树子树内终点标记和。

Code

```
1 struct PAM
2 {
3     static constexpr int ALPHABET_SIZE=28;
4     struct Node
5     {
6         int len,link,cnt;
7         array<int,ALPHABET_SIZE> next;
8         Node():len{},link{},cnt{},next{}{}
9     };
10    vector<Node> t;
11    int suff;
12    string s;
13
14    PAM() { init(); }
15
16    void init()
17    {
18        t.assign(2,Node());
19        t[0].len=-1;
20        suff=1;
21        s.clear();
22    }
23
24    int newNode()
25    {
26        t.emplace_back();
27        return t.size()-1;
28    }
29
30    bool add(char c,char offset='a')
31    {
32        int pos=s.size();
33        s+=c;
34        int let=c-offset;
35        int cur=suff,curlen=0;
36        while (1)
37        {
38            curlen=t[cur].len;
39            if (pos-curlen-1>=0&&s[pos-curlen-1]==s[pos]) break;
40            cur=t[cur].link;
41        }
42        if (t[cur].next[let])
43        {
44            suff=t[cur].next[let];
45            return 0;
46        }
47        int num=newNode();
48        suff=num;
49        t[num].len=t[cur].len+2;
50        t[cur].next[let]=num;
51        if (t[num].len==1)
52        {
53            t[num].link=t[num].cnt=1;
54            return 1;
55        }
56        while (1)
```

```

57     {
58         cur=t[cur].link;
59         curlen=t[cur].len;
60         if (pos-curlen-1>=0&&s[pos-curlen-1]==s[pos])
61         {
62             t[num].link=t[cur].next[let];
63             break;
64         }
65     }
66     t[num].cnt=t[t[num].link].cnt+1;
67     return 1;
68 }
69 };

```

含通配符字符串匹配

返回匹配的位置集合。

```

1  vector<int> match(string &s,string &t)
2  {
3      static mt19937 rng(chrono::steady_clock::now().time_since_epoch().count());
4      static array<Z,256> c;
5      static bool initd=0;
6      if (!initd)
7      {
8          initd=1;
9          for (Z &x:c) x=rng();
10         c['*']=0;//wildcard
11     }
12     int n=s.size(),m=t.size();
13     if (n<m) return {};
14     vector<int> res;
15     Poly f(n),ff(n),fff(n),g(m),gg(m),ggg(m);
16     for (int i=0;i<n;i++)
17     {
18         f[i]=c[s[i]];
19         ff[i]=f[i]*f[i];
20         fff[i]=ff[i]*f[i];
21     }
22     for (int i=0;i<m;i++)
23     {
24         g[i]=c[t[m-i-1]];
25         gg[i]=g[i]*g[i];
26         ggg[i]=gg[i]*g[i];
27     }
28     Poly fffg=fff*g,ffgg=ff*gg,fggg=f*ggg;
29     for (int i=0;i<=n-m;i++)
30         if ((fffg[m-1+i]+fggg[m-1+i]-ffgg[m-1+i]*2)==0)
31             res.push_back(i);
32     return res;
33 }
34 /*
35 a***b***c*****
36 bcd
37
38 match(s,t)=[ 1, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, ]
39 */

```

图论

拓扑排序

```

1  vector<int> topo(vector<vector<int>> &adj)
2  {
3      int n=adj.size();
4      vector<int> res,in(n);
5      queue<int> q;
6      for (int u=0;u<n;u++)
7          for (int v:adj[u])

```

```

8         in[v]++;
9     for (int u=0;u<n;u++)
10         if (!in[u])
11             q.push(u);
12     while (!q.empty())
13     {
14         int u=q.front();
15         q.pop();
16         res.push_back(u);
17         for (int v:adj[u])
18         {
19             in[v]--;
20             if (!in[v]) q.push(v);
21         }
22     }
23     return res;
24 }

```

树的直径

```

1 int diameter(vector<vector<int>> &adj)
2 {
3     int n=adj.size(),d=0;
4     vector<int> dp(n);
5
6     auto dfs=[&](auto &self,int u,int f)->void
7     {
8         for (int v:adj[u])
9         {
10             if (v==f) continue;
11             self(self,v,u);
12             d=max(d,dp[u]+dp[v]+1); //w(u,v)=1
13             dp[u]=max(dp[u],dp[v]+1); //w(u,v)=1
14         }
15     };
16
17     dfs(dfs,0,0);
18     return d;
19 }

```

动态树直径 (CF1192B)

指支持动态修改树边的权值，复杂度为 $\mathcal{O}(\log n)$ 。

代码 d,e->D,E 那段是题目强制在线的解密。

```

1 struct Tag
2 {
3     i64 dt=0;
4     void apply(Tag t)
5     {
6         dt+=t.dt;
7     }
8 };
9
10 struct Info
11 {
12     i64 ans=0,mx=0,mn=1e18,lm=0,rm=0;
13     void apply(Tag t)
14     {
15         mx+=t.dt;
16         mn+=t.dt;
17         lm-=t.dt;
18         rm-=t.dt;
19     }
20 };
21
22 Info operator + (Info a,Info b)
23 {
24     Info c;

```

```

25     c.ans=max({a.ans,b.ans,a.rm+b.mx,a.mx+b.lm});
26     c.mx=max(a.mx,b.mx);
27     c.mn=min(a.mn,b.mn);
28     c.lm=max({a.lm,b.lm,b.mx-2*a.mn});
29     c.rm=max({a.rm,b.rm,a.mx-2*b.mn});
30     return c;
31 }
32
33 void R()
34 {
35     i64 n,q,w;
36     cin>>n>>q>>w;
37     vector<int> in(n),out(n),ord;
38     vector<i64> dep(n,-1);
39     vector<array<i64,3>> edges(n-1);
40     vector<vector<array<i64,2>>> adj(n);
41     for (int i=1;i<n;i++)
42     {
43         i64 a,b,c;
44         cin>>a>>b>>c;
45         a--,b--;
46         edges[i-1]={a,b,c};
47         adj[a].push_back({b,c});
48         adj[b].push_back({a,c});
49     }
50
51     auto dfs=[&](auto &self,int u)->void
52     {
53         in[u]=out[u]=ord.size();
54         ord.push_back(u);
55         for (auto [v,w]:adj[u])
56         {
57             if (dep[v]!=-1) continue;
58             dep[v]=dep[u]+w;
59             self(self,v);
60             out[u]=ord.size();
61             ord.push_back(u);
62         }
63     };
64
65     dep[0]=0;
66     dfs(dfs,0);
67
68     SGT<Info,Tag> sgt(ord.size());
69     for (int i=0;i<ord.size();i++)
70         sgt.modify(i,{0ll,dep[ord[i]],dep[ord[i]],-dep[ord[i]],-dep[ord[i]]});
71
72     i64 las=0;
73     for (int i=0;i<q;i++)
74     {
75         i64 d,e,D,E;
76         cin>>d>>e;
77         D=(d+las)%(n-1);
78         E=(e+las)%w;
79         auto &[x,y,w]=edges[D];
80         if (in[x]>in[y]) swap(x,y);
81         sgt.rangeApply(in[y],out[y]+1,{E-w});
82         w=E;
83         cout<<(las=sgt.rangeQuery(0,ord.size()).ans)<<"\n";
84     }
85     return;
86 }

```

树的重心

```

1 vector<int> centroid(vector<vector<int>> &adj,int rt)
2 {
3     int n=adj.size();
4     vector<int> siz(n),res(n),w(n),fa(n);
5
6     auto dfs=[&](auto &self,int u,int f)->void

```

```

7   {
8       siz[u]=1,res[u]=u,fa[u]=f;
9       for (int v:adj[u])
10      {
11          if (v==f) continue;
12          self(self,v,u);
13          siz[u]+=siz[v];
14          w[u]=max(w[u],siz[v]);
15      }
16      for (int v:adj[u])
17      {
18          if (v==f) continue;
19          int p=res[v];
20          while (p!=u)
21          {
22              if (max(w[p],siz[u]-siz[p])<=siz[u]/2)
23              {
24                  res[u]=p;
25                  break;
26              }
27              else p=fa[p];
28          }
29      }
30  };
31
32  dfs(dfs,rt,rt);
33  return res;
34  }

```

Dijkstra

注意设定合适的 inf。

```

1  vector<i64> dijk(const vector<vector<pair<int,i64>>> &adj,int s)
2  {
3      int n=adj.size();
4      using pa=pair<i64,int>;
5      vector<i64> d(n,inf);
6      vector<int> ed(n);
7      priority_queue<pa,vector<pa>,greater<pa>> q;
8      q.push({0,s}); d[s]=0;
9      while (!q.empty())
10     {
11         int u=q.top().second;
12         q.pop();
13         ed[u]=1;
14         for (auto [v,w]:adj[u])
15             if (d[u]+w<d[v])
16             {
17                 d[v]=d[u]+w;
18                 q.push({d[v],v});
19             }
20         while (!q.empty()&&ed[q.top().second]) q.pop();
21     }
22     return d;
23 }

```

SPFA

注意设定合适的 inf。

```

1  vector<i64> spfa(const vector<vector<pair<int,i64>>> &adj,int s)
2  {
3      int n=adj.size();
4      assert(n);
5      queue<int> q;
6      vector<int> len(n),ed(n);
7      vector<i64> d(n,inf);
8      q.push(s); d[s]=0;
9      while (!q.empty())

```

```

10     {
11         int u=q.front();
12         q.pop();
13         ed[u]=0;
14         for (auto [v,w]:adj[u])
15             if (d[u]+w<d[v])
16                 {
17                     d[v]=d[u]+w;
18                     len[v]=len[u]+1;
19                     if (len[v]>n) return {};
20                     if (!ed[v]) ed[v]=1,q.push(v);
21                 }
22     }
23     return d;
24 }

```

Johnson

```

1  vector<vector<i64>> dijk(const vector<vector<pair<int,i64>>> &adj)
2  {
3      vector<vector<i64>> res;
4      for (int i=0;i<adj.size();i++)
5          res.push_back(dijk(adj,i));
6      return res;
7  }
8
9  vector<i64> spfa(const vector<vector<pair<int,i64>>> &adj)
10 {
11     int n=adj.size();
12     assert(n);
13     queue<int> q;
14     vector<int> len(n),ed(n,1);
15     vector<i64> d(n);
16     for (int i=0;i<n;i++) q.push(i);
17     while (!q.empty())
18     {
19         int u=q.front();
20         q.pop();
21         ed[u]=0;
22         for (auto [v,w]:adj[u])
23             if (d[u]+w<d[v])
24                 {
25                     d[v]=d[u]+w;
26                     len[v]=len[u]+1;
27                     if (len[v]>n) return {};
28                     if (!ed[v]) ed[v]=1,q.push(v);
29                 }
30     }
31     return d;
32 }
33
34 vector<vector<i64>> john(vector<vector<pair<int,i64>>> adj)
35 {
36     int n=adj.size();
37     assert(n);
38     auto h=spfa(adj);
39     if (!h.size()) return {};
40     for (int u=0;u<n;u++)
41         for (auto &[v,w]:adj[u])
42             w+=h[u]-h[v];
43     auto res=dijk(adj);
44     for (int u=0;u<n;u++)
45         for (int v=0;v<n;v++)
46             if (res[u][v]!=inf)
47                 res[u][v]-=h[u]-h[v];
48     return res;
49 }

```

强连通分量

```
1 struct SCC
2 {
3     int n,cur,cnt;
4     vector<vector<int>> adj;
5     vector<int> stk,dfn,low,bel;
6
7     SCC() {}
8     SCC(int n) { init(n); }
9
10    void init(int n)
11    {
12        this->n=n;
13        adj.assign(n,{});
14        stk.clear();
15        dfn.assign(n,-1);
16        low.resize(n);
17        bel.assign(n,-1);
18        cur=cnt=0;
19    }
20
21    void add(int u,int v) { adj[u].push_back(v); }
22
23    void dfs(int x)
24    {
25        dfn[x]=low[x]=cur++;
26        stk.push_back(x);
27        for (auto y:adj[x])
28        {
29            if (dfn[y]==-1)
30            {
31                dfs(y);
32                low[x]=min(low[x],low[y]);
33            }
34            else if (bel[y]==-1) low[x]=min(low[x],dfn[y]);
35        }
36        if (dfn[x]==low[x])
37        {
38            int y;
39            do
40            {
41                y=stk.back();
42                bel[y]=cnt;
43                stk.pop_back();
44            } while (y!=x);
45            cnt++;
46        }
47    }
48
49    vector<int> work()
50    {
51        for (int i=0;i<n;i++)
52            if (dfn[i]==-1) dfs(i);
53        return bel;
54    }
55
56    struct Graph
57    {
58        int n;
59        vector<pair<int,int>> edges;
60        vector<int> siz,cnte;
61    };
62
63    Graph compress()
64    {
65        Graph G;
66        G.n=cnt;
67        G.siz.resize(cnt);
68        G.cnte.resize(cnt);
69        for (int i=0;i<n;i++)
```

```

70     {
71         G.siz[bel[i]]++;
72         for (auto j:adj[i])
73             if (bel[i]!=bel[j])
74                 G.edges.emplace_back(bel[j],bel[i]);
75     }
76     return G;
77 };
78 };

```

边双连通分量

```

1  struct EBCC
2  {
3      int n;
4      vector<vector<int>> adj;
5      vector<int> stk,dfn,low,bel;
6      int cur,cnt;
7
8      EBCC() {}
9      EBCC(int n) { init(n); }
10
11     void init(int n)
12     {
13         this->n=n;
14         adj.assign(n,{});
15         dfn.assign(n,-1);
16         low.resize(n);
17         bel.assign(n,-1);
18         stk.clear();
19         cur=cnt=0;
20     }
21
22     void add(int u,int v)
23     {
24         adj[u].push_back(v);
25         adj[v].push_back(u);
26     }
27
28     void dfs(int x,int p)
29     {
30         dfn[x]=low[x]=cur++;
31         stk.push_back(x);
32         for (auto y:adj[x])
33         {
34             if (y==p) continue;
35             if (dfn[y]==-1)
36             {
37                 dfs(y,x);
38                 low[x]=min(low[x],low[y]);
39             }
40             else if (bel[y]==-1&&dfn[y]<dfn[x]) low[x]=min(low[x],dfn[y]);
41         }
42         if (dfn[x]==low[x])
43         {
44             int y;
45             do
46             {
47                 y=stk.back();
48                 bel[y]=cnt;
49                 stk.pop_back();
50             } while (y!=x);
51             cnt++;
52         }
53     }
54
55     vector<int> work()
56     {
57         dfs(0,-1);
58         return bel;
59     }

```



```

60
61 struct Graph
62 {
63     int n;
64     vector<pair<int,int>> edges;
65     vector<int> siz,cnte;
66 };
67
68 Graph compress()
69 {
70     Graph G;
71     G.n=cnt;
72     G.siz.resize(cnt);
73     G.cnte.resize(cnt);
74     for (int i=0;i<n;i++)
75     {
76         G.siz[bel[i]]++;
77         for (auto j:adj[i])
78         {
79             if (bel[i]<bel[j]) G.edges.emplace_back(bel[i],bel[j]);
80             else if (i<j) G.cnte[bel[i]]++;
81         }
82     }
83     return G;
84 };
85 };

```

轻重链剖分

```

1 struct HLD
2 {
3     int n;
4     vector<int> siz,top,dep,pa,in,out,seq;
5     vector<vector<int>> adj;
6     int cur;
7
8     HLD(){}
9     HLD(int n) { init(n); }
10
11 void init(int n)
12 {
13     this->n=n;
14     siz.resize(n);
15     top.resize(n);
16     dep.resize(n);
17     pa.resize(n);
18     in.resize(n);
19     out.resize(n);
20     seq.resize(n);
21     cur=0;
22     adj.assign(n,{});
23 }
24
25 void addEdge(int u,int v)
26 {
27     adj[u].push_back(v);
28     adj[v].push_back(u);
29 }
30
31 void work(int rt=0)
32 {
33     top[rt]=rt;
34     dep[rt]=0;
35     pa[rt]=-1;
36     dfs1(rt);
37     dfs2(rt);
38 }
39
40 void dfs1(int u)
41 {
42     if (pa[u]!=-1) adj[u].erase(find(adj[u].begin(),adj[u].end(),pa[u]));

```

```

43     siz[u]=1;
44     for (auto &v:adj[u])
45     {
46         pa[v]=u;
47         dep[v]=dep[u]+1;
48         dfs1(v);
49         siz[u]+=siz[v];
50         if (siz[v]>siz[adj[u][0]])
51             swap(v,adj[u][0]);
52     }
53 }
54
55 void dfs2(int u)
56 {
57     in[u]=cur++;
58     seq[in[u]]=u;
59     for (auto v:adj[u])
60     {
61         top[v]=(v==adj[u][0])?top[u]:v;
62         dfs2(v);
63     }
64     out[u]=cur;
65 }
66
67 int lca(int u,int v)
68 {
69     while (top[u]!=top[v])
70     {
71         if (dep[top[u]]>dep[top[v]]) u=pa[top[u]];
72         else v=pa[top[v]];
73     }
74     return dep[u]<dep[v]?u:v;
75 }
76
77 int dist(int u,int v) { return dep[u]+dep[v]-(dep[lca(u,v)]<<1); }
78
79 int jump(int u,int k)
80 {
81     if (dep[u]<k) return -1;
82     int d=dep[u]-k;
83     while (dep[top[u]]>d) u=pa[top[u]];
84     return seq[in[u]-dep[u]+d];
85 }
86
87 bool isAncestor(int u,int v) { return in[u]<=in[v]&&in[v]<out[u]; }
88
89 int rootedParent(int u,int v)//u->root,v->point
90 {
91     if (u==v) return u;
92     if (!isAncestor(v,u)) return pa[v];
93     auto it=upper_bound(adj[v].begin(),adj[v].end(),u,[&](int x,int y){ return in[x]<in[y]; })-1;
94     return *it;
95 }
96
97 int rootedSize(int u,int v)//same as rootedParent
98 {
99     if (u==v) return n;
100    if (!isAncestor(v,u)) return siz[v];
101    return n-siz[rootedParent(u,v)];
102 }
103
104 int rootedLca(int a,int b,int c) { return lca(a,b)^lca(b,c)^lca(c,a); }
105 };

```

虚树

```

1 struct VirtualTree
2 {
3     int n,rt;
4     HLD hld;
5     vector<int> a;

```

```

6     vector<bool> is;
7     vector<vector<int>> son;
8
9     VirtualTree(){}
10    VirtualTree(int n) { init(n); }
11
12    void init(int n)
13    {
14        this->n=n;
15        hld.init(n);
16        is.assign(n,0);
17        son.assign(n,{});
18    }
19
20    void addEdge(int u,int v)
21    {
22        hld.addEdge(u,v);
23    }
24
25    void work(int rt=0)
26    {
27        this->rt=rt;
28        hld.work(rt);
29    }
30
31    void solve(vector<int> &in)
32    {
33        auto cmp=[&](int x,int y)->bool
34        {
35            return hld.in[x]<hld.in[y];
36        };
37
38        for (int x:a)
39        {
40            is[x]=0;
41            son[x].clear();
42        }
43        a=in;
44        for (int x:a) is[x]=1;
45        a.push_back(rt);
46        sort(a.begin(),a.end(),cmp);
47
48        int k=a.size();
49        for (int i=1;i<k;i++)
50            a.push_back(hld.lca(a[i-1],a[i]));
51        sort(a.begin(),a.end(),cmp);
52        a.erase(unique(a.begin(),a.end()),a.end());
53        for (int i=1;i<a.size();i++)
54            son[hld.lca(a[i-1],a[i])].push_back(a[i]);
55    };
56
57    bool isKey(int u)
58    {
59        return is[u];
60    }
61
62    vector<int>& operator [] (int u)
63    {
64        return son[u];
65    }
66 };

```

欧拉路径

```

1     vector<int> euler(vector<vector<int>> adj)
2     {
3         int n=adj.size(),x=0;
4         vector<int> in(n),out(n);
5         for (int u=0;u<n;u++)
6             for (int v:adj[u])
7                 out[u]++,in[v]++;

```

```

8   for (int i=0;i<n;i++)
9       if (in[i]!=out[i])
10          {
11              if (abs(in[i]-out[i])>1) return {};
12              x++;
13          }
14   if (x>2) return {};
15   for (int i=0;i<n;i++)
16       if (out[i]>in[i])
17          {
18              x=i;
19              break;
20          }
21   for (int i=0;i<n;i++)
22       sort(adj[i].begin(),adj[i].end(),greater<int>());
23
24   vector<int> res;
25   auto dfs=[&](auto &self,int u)->void
26   {
27       while (!adj[u].empty())
28       {
29           int v=adj[u].back();
30           adj[u].pop_back();
31           self(self,v);
32           res.push_back(v);
33       }
34   };
35
36   dfs(dfs,x);
37   res.push_back(x);
38   reverse(res.begin(),res.end());
39   return res;
40 }

```

2-SAT

```

1   struct TwoSat
2   {
3       int n;
4       vector<vector<int>> e;
5       vector<bool> ans;
6
7       TwoSat(int n):n(n),e(n<<1),ans(n){}
8
9       void addClause(int u,bool f,int v,bool g)
10      {
11          e[u*2+!f].push_back(v*2+g);
12          e[v*2+!g].push_back(u*2+f);
13      }
14
15      bool satisfiable()
16      {
17          vector<int> id(n*2,-1),dfn(n*2,-1),low(n*2,-1),stk;
18          int now=0,cnt=0;
19          function<void(int)> tarjan=[&](int u)
20          {
21              stk.push_back(u);
22              dfn[u]=low[u]=now++;
23              for (auto v:e[u])
24              {
25                  if (dfn[v]==-1)
26                  {
27                      tarjan(v);
28                      low[u]=min(low[u],low[v]);
29                  }
30                  else if (id[v]==-1)
31                      low[u]=min(low[u],dfn[v]);
32              }
33              if (dfn[u]==low[u])
34              {
35                  int v;

```

```

36         do
37         {
38             v=stk.back();
39             stk.pop_back();
40             id[v]=cnt;
41         } while (v!=u);
42         cnt++;
43     }
44 };
45 for (int i=0;i<n*2;i++)
46     if (dfn[i]==-1)
47         tarjan(i);
48 for (int i=0;i<n;i++)
49 {
50     if (id[i*2]==id[i*2+1]) return 0;
51     ans[i]=id[i*2]>id[i*2+1];
52 }
53 return 1;
54 }
55 vector<bool> answer() { return ans; }
56 };

```

最大流

```

1  template <class T>
2  struct MaxFlow
3  {
4      struct _Edge
5      {
6          int to;
7          T cap;
8          _Edge(int to,T cap):to(to),cap(cap){}
9      };
10
11      int n;
12      vector<_Edge> e;
13      vector<vector<int>>> g;
14      vector<int> cur,h;
15
16      MaxFlow(){}
17      MaxFlow(int n) { init(n); }
18
19      void init(int n)
20      {
21          this->n=n;
22          e.clear();
23          g.assign(n,{});
24          cur.resize(n);
25          h.resize(n);
26      }
27
28      bool bfs(int s,int t)
29      {
30          h.assign(n,-1);
31          queue<int> que;
32          h[s]=0;
33          que.push(s);
34          while (!que.empty())
35          {
36              const int u=que.front();
37              que.pop();
38              for (int i:g[u])
39              {
40                  auto [v,c]=e[i];
41                  if (c>0&&h[v]==-1)
42                  {
43                      h[v]=h[u]+1;
44                      if (v==t) return 1;
45                      que.push(v);
46                  }
47              }

```

```

48     }
49     return 0;
50 }
51
52 T dfs(int u,int t,T f)
53 {
54     if (u==t) return f;
55     auto r=f;
56     for (int &i=cur[u];i<int(g[u].size());i++)
57     {
58         const int j=g[u][i];
59         auto [v,c]=e[j];
60         if (c>0&&h[v]==h[u]+1)
61         {
62             auto a=dfs(v,t,min(r,c));
63             e[j].cap-=a;
64             e[j^1].cap+=a;
65             r-=a;
66             if (r==0) return f;
67         }
68     }
69     return f-r;
70 }
71
72 void addEdge(int u,int v,T c)
73 {
74     g[u].push_back(e.size());
75     e.emplace_back(v,c);
76     g[v].push_back(e.size());
77     e.emplace_back(u,0);
78 }
79
80 T flow(int s,int t)
81 {
82     T ans=0;
83     while (bfs(s,t))
84     {
85         cur.assign(n,0);
86         ans+=dfs(s,t,numeric_limits<T>::max());
87     }
88     return ans;
89 }
90
91 vector<bool> minCut()
92 {
93     vector<bool> c(n);
94     for (int i=0;i<n;i++) c[i]=(h[i]!=-1);
95     return c;
96 }
97
98 struct Edge
99 {
100     int from;
101     int to;
102     T cap;
103     T flow;
104 };
105
106 vector<Edge> edges()
107 {
108     vector<Edge> a;
109     for (int i=0;i<e.size();i+=2)
110     {
111         Edge x;
112         x.from=e[i+1].to;
113         x.to=e[i].to;
114         x.cap=e[i].cap+e[i+1].cap;
115         x.flow=e[i+1].cap;
116         a.push_back(x);
117     }
118     return a;

```

```

119     }
120 };

```

最小费用最大流

```

1  template <class T>
2  struct MinCostFlow
3  {
4      struct _Edge
5      {
6          int to;
7          T cap;
8          T cost;
9          _Edge(int to,T cap,T cost):to(to),cap(cap),cost(cost){}
10     };
11
12     int n;
13     vector<_Edge> e;
14     vector<vector<int>> g;
15     vector<T> h,dis;
16     vector<int> pre;
17
18     bool john(int s,int t)
19     {
20         dis.assign(n,numeric_limits<T>::max());
21         pre.assign(n,-1);
22         priority_queue<pair<T,int>,vector<pair<T,int>>,greater<pair<T,int>>> q;
23         dis[s]=0;
24         q.emplace(0,s);
25         while (!q.empty())
26         {
27             T d=q.top().first;
28             int u=q.top().second;
29             q.pop();
30             if (dis[u]!=d) continue;
31             for (int i:g[u])
32             {
33                 int v=e[i].to;
34                 T cap=e[i].cap;
35                 T cost=e[i].cost;
36                 if (cap>0&&dis[v]>d+h[u]-h[v]+cost)
37                 {
38                     dis[v]=d+h[u]-h[v]+cost;
39                     pre[v]=i;
40                     q.emplace(dis[v],v);
41                 }
42             }
43         }
44         return dis[t]!=numeric_limits<T>::max();
45     }
46
47     MinCostFlow(){}
48     MinCostFlow(int n) { init(n); }
49
50     void init(int n_)
51     {
52         n=n_;
53         e.clear();
54         g.assign(n,{});
55     }
56
57     void addEdge(int u,int v,T cap,T cost)
58     {
59         g[u].push_back(e.size());
60         e.emplace_back(v,cap,cost);
61         g[v].push_back(e.size());
62         e.emplace_back(u,0,-cost);
63     }
64
65     pair<T,T> flow(int s,int t)
66

```

```

67 {
68     T flow=0;
69     T cost=0;
70     h.assign(n,0);
71     while (john(s,t))
72     {
73         for (int i=0;i<n;i++) h[i]+=dis[i];
74         T aug=numeric_limits<int>::max();
75         for (int i=t;i!=s;i=e[pre[i]^1].to)
76             aug=min(aug,e[pre[i]].cap);
77         for (int i=t;i!=s;i=e[pre[i]^1].to)
78         {
79             e[pre[i]].cap-=aug;
80             e[pre[i]^1].cap+=aug;
81         }
82         flow+=aug;
83         cost+=aug*h[t];
84     }
85     return make_pair(flow,cost);
86 }
87
88 struct Edge
89 {
90     int from;
91     int to;
92     T cap;
93     T cost;
94     T flow;
95 };
96
97 vector<Edge> edges()
98 {
99     vector<Edge> a;
100     for (int i=0;i<e.size();i+=2)
101     {
102         Edge x;
103         x.from=e[i+1].to;
104         x.to=e[i].to;
105         x.cap=e[i].cap+e[i+1].cap;
106         x.cost=e[i].cost;
107         x.flow=e[i+1].cap;
108         a.push_back(x);
109     }
110     return a;
111 }
112 };

```

二分图最大权匹配 (KM)

时间复杂度为 $O(n^3)$ 。

```

1 //注意将负权边加上 inf, inf 不要设得过大
2 //xy 是左部点对应右部点
3 //yx 是右部点对应左部点
4 template <class T>
5 struct MaxAssignment
6 {
7     vector<T> lx,ly,s,cst;
8     vector<int> xy,yx,p,sx;
9     vector<bool> visx,visy;
10
11     T solve(int nx,int ny,vector<vector<T>> a)
12     {
13         assert(0<=nx&&nx<=ny);
14         assert(int(a.size())==nx);
15         for (int i=0;i<nx;i++)
16         {
17             assert(int(a[i].size())==ny);
18             for (auto x:a[i])
19                 assert(x>=0);
20         }

```



```

21 auto upd=[&](int x)->void
22 {
23     for (int y=0;y<ny;y++)
24     {
25         if (lx[x]+ly[y]-a[x][y]<s[y])
26         {
27             s[y]=lx[x]+ly[y]-a[x][y];
28             sx[y]=x;
29         }
30     }
31     return;
32 };
33 cst.resize(nx+1);
34 cst[0]=0;
35 lx.assign(nx,numeric_limits<T>::max());
36 ly.assign(ny,0);
37 xy.assign(nx,-1);
38 yx.assign(ny,-1);
39 sx.resize(ny);
40 for (int cur=0;cur<nx;cur++)
41 {
42     queue<int> q;
43     visx.assign(nx,0);
44     visy.assign(ny,0);
45     s.assign(ny,numeric_limits<T>::max());
46     p.assign(nx,-1);
47     for (int x=0;x<nx;x++)
48     {
49         if (xy[x]==-1)
50         {
51             q.push(x);
52             visx[x]=1;
53             upd(x);
54         }
55     }
56     int ex,ey;
57     bool fl=0;
58     while (!fl)
59     {
60         while (!q.empty()&&!fl)
61         {
62             auto x=q.front();
63             q.pop();
64             for (int y=0;y<ny;y++)
65             {
66                 if (a[x][y]==lx[x]+ly[y]&&!visy[y])
67                 {
68                     if (yx[y]==-1)
69                     {
70                         ex=x;
71                         ey=y;
72                         fl=1;
73                         break;
74                     }
75                     q.push(yx[y]);
76                     p[yx[y]]=x;
77                     visy[y]=visx[yx[y]]=1;
78                     upd(yx[y]);
79                 }
80             }
81         }
82         if (fl) break;
83         T delta=numeric_limits<T>::max();
84         for (int y=0;y<ny;y++)
85             if (!visy[y])
86                 delta=min(delta,s[y]);
87         for (int x=0;x<nx;x++)
88             if (visx[x])
89                 lx[x]-=delta;
90         for (int y=0;y<ny;y++)
91         {

```

```

92         if (visy[y])
93             ly[y] += delta;
94         else
95             s[y] -= delta;
96     }
97     for (int y=0; y<ny; y++)
98     {
99         if (!visy[y] && s[y] == 0)
100         {
101             if (yx[y] == -1)
102             {
103                 ex = sx[y];
104                 ey = y;
105                 fl = 1;
106                 break;
107             }
108             q.push(yx[y]);
109             p[yx[y]] = sx[y];
110             visy[y] = visx[yx[y]] = 1;
111             upd(yx[y]);
112         }
113     }
114 }
115 cst[cur+1] = cst[cur];
116 for (int x=ex, y=ey, ty; x != -1; x=p[x], y=ty)
117 {
118     cst[cur+1] += a[x][y];
119     if (xy[x] != -1)
120         cst[cur+1] -= a[x][xy[x]];
121     ty = xy[x];
122     xy[x] = y;
123     yx[y] = x;
124 }
125 }
126 return cst[nx];
127 }
128
129 vector<int> assignment() { return xy; }
130
131 pair<vector<T>, vector<T>> labels()
132 { return make_pair(lx, ly); }
133
134 vector<T> weights() { return cst; }
135 };

```

三元环计数

时间复杂度为 $\mathcal{O}(m\sqrt{m})$ 。

```

1  i64 triple(vector<pair<int, int>> &edges)
2  {
3      int n=0;
4      for (auto [u,v]:edges) n=max({n,u,v});
5      n++;
6      vector<int> d(n), id(n), rk(n), cnt(n);
7      vector<vector<int>> adj(n);
8      for (auto [u,v]:edges) d[u]++, d[v]++;
9      iota(id.begin(), id.end(), 0);
10     sort(id.begin(), id.end(), [&](int x, int y)
11     {
12         return d[x] < d[y];
13     });
14     for (int i=0; i<n; i++) rk[id[i]] = i;
15     for (auto [u,v]:edges)
16     {
17         if (rk[u] > rk[v]) swap(u,v);
18         adj[u].push_back(v);
19     }
20     i64 res=0;
21     for (int i=0; i<n; i++)
22     {

```

```

23         for (int u:adj[i]) cnt[u]=1;
24         for (int u:adj[i])
25             for (int v:adj[u])
26                 res+=cnt[v];
27         for (int u:adj[i]) cnt[u]=0;
28     }
29     return res;
30 };

```

树哈希

有根树返回各子树 hash 值，无根树返回一个至多长为 2 的 vector。

```

1  vector<int> tree_hash(vector<vector<int>> &adj,int rt)
2  {
3      int n=adj.size();
4      static map<vector<int>,i64> mp;
5      static int id=0;
6      vector<int> h(n);
7
8      auto dfs=[&](auto &self,int u,int f)->void
9      {
10         vector<int> c;
11         for (int v:adj[u])
12             if (v!=f)
13             {
14                 self(self,v,u);
15                 c.push_back(h[v]);
16             }
17         sort(c.begin(),c.end());
18         if (!mp.count(c)) mp[c]=id++;
19         h[u]=mp[c];
20     };
21
22     dfs(dfs,rt,rt);
23     return h;
24 }
25
26 vector<int> tree_hash(vector<vector<int>> &adj)
27 {
28     int n=adj.size();
29     if (n==0) return {};
30     vector<int> siz(n),mx(n);
31
32     auto dfs=[&](auto &self,int u)->void
33     {
34         siz[u]=1;
35         for (int v:adj[u])
36             if (!siz[v])
37             {
38                 self(self,v);
39                 siz[u]+=siz[v];
40                 mx[u]=max(mx[u],siz[v]);
41             }
42         mx[u]=max(mx[u],n-siz[u]);
43     };
44
45     dfs(dfs,0);
46     int m=*min_element(mx.begin(),mx.end());
47     vector<int> rt;
48     for (int i=0;i<n;i++)
49         if (mx[i]==m)
50             rt.push_back(i);
51     for (int &u:rt) u=tree_hash(adj,u)[u];
52     sort(rt.begin(),rt.end());
53     return rt;
54 }

```

矩阵树定理

记度矩阵为 D ，邻接矩阵为 A 。

对无向图情况： $L(G) = D(G) - A(G)$ 。

对有向图外向树情况： $L(G) = D^{in}(G) - A(G)$ 。

对有向图内向树情况： $L(G) = D^{out}(G) - A(G)$ 。

图 G 以 r 为根的生成树个数等于 $L(G)$ 舍去第 r 行第 r 列的 $n - 1$ 阶主子式。

代码中 $t=0$ 是无向图情况， $t=1$ 是有向图根为 1 的外向树情况。

```
1 void R()
2 {
3     int n,m,t;
4     cin>>n>>m>>t;
5     vector<vector<Z>> L(n-1,vector<Z>(n-1)),D(n,vector<Z>(n)),A(n,vector<Z>(n));
6     for (int i=1;i<=m;i++)
7     {
8         int u,v,w;
9         cin>>u>>v>>w;
10        if (u==v) continue;
11        u--,v--;
12        D[v][v]+=w;
13        A[u][v]+=w;
14        if (t==0)
15        {
16            D[u][u]+=w;
17            A[v][u]+=w;
18        }
19    }
20    for (int i=1;i<n;i++)
21        for (int j=1;j<n;j++)
22            L[i-1][j-1]=D[i][j]-A[i][j];
23    cout<<det(L);
24    return;
25 }
```

计算几何

EPS

```
1 const double eps=1e-8;
2 int sgn(double x)
3 {
4     if (fabs(x)<eps) return 0;
5     if (x>0) return 1;
6     return -1;
7 }
```

Point

```
1 template <class T>
2 struct Point
3 {
4     T x,y;
5     Point(T x_=0,T y_=0):x(x_),y(y_) {}
6
7     Point &operator += (Point p) &
8     {
9         x+=p.x;
10        y+=p.y;
11        return *this;
12    }
13
14     Point &operator -= (Point p) &
15     {
16         x-=p.x;
```

```

17         y-=p.y;
18         return *this;
19     }
20
21     Point &operator *= (T v) &
22     {
23         x*=v;
24         y*=v;
25         return *this;
26     }
27
28     Point operator - () const { return Point(-x,-y); }
29
30     friend Point operator + (Point a,Point b) { return a+=b; }
31     friend Point operator - (Point a,Point b) { return a-=b; }
32     friend Point operator * (Point a,T b) { return a*=b; }
33     friend Point operator * (T a,Point b) { return b*=a; }
34
35     friend bool operator == (Point a,Point b) { return a.x==b.x&& a.y==b.y; }
36
37     friend istream &operator >> (istream &is,Point &p) { return is>>p.x>>p.y; }
38
39     friend ostream &operator << (ostream &os,Point p) { return os<<'('<<p.x<<','<<p.y<<')'; }
40 };
41
42 template <class T>
43 int sgn(const Point<T> &a) { return a.y>0||(a.y==0&&a.x>0)?1:-1; }
44
45 template <class T>
46 T dot(Point<T> a,Point<T> b) { return a.x*b.x+a.y*b.y; }
47
48 template <class T>
49 T cross(Point<T> a,Point<T> b) { return a.x*b.y-a.y*b.x; }
50
51 template <class T>
52 T square(Point<T> p) { return dot(p,p); }
53
54 template <class T>
55 double length(Point<T> p) { return sqrt(double(square(p))); }
56
57 long double length(Point<long double> p) { return sqrt(square(p)); }

```

Line

```

1  template <class T>
2  struct Line
3  {
4      Point<T> a,b;
5      Line(Point<T> a_=Point<T>(),Point<T> b_=Point<T>()):a(a_),b(b_) {}
6  };

```

距离

```

1  template <class T>
2  double dis_PP(Point<T> a,Point<T> b) { return length(a-b); }
3
4  template <class T>
5  double dis_PL(Point<T> a,Line<T> l) { return fabs(cross(a-l.a,a-l.b))/dis_PP(l.a,l.b); }
6
7  template <class T>
8  double dis_PS(Point<T> a,Line<T> l)
9  {
10     if (dot(a-l.a,l.b-l.a)<0) return dis_PP(a,l.a);
11     if (dot(a-l.b,l.a-l.b)<0) return dis_PP(a,l.b);
12     return dis_PL(a,l);
13 }

```

点绕中心旋转

```
1 template <class T>
2 Point<T> rotate(Point<T> a, double alpha)
3 { return Point<T>(a.x*cos(alpha)-a.y*sin(alpha), a.x*sin(alpha)+a.y*cos(alpha)); }
```

关于线的对称点

```
1 template <class T>
2 Point<T> lineRoot(Point<T> a, Line<T> l)
3 {
4     Point<T> v=l.b-l.a;
5     return l.a+v*(dot(a-l.a,v)/dot(v,v));
6 }
7
8 template <class T>
9 Point<T> symmetry_PL(Point<T> a, Line<T> l) { return a+(lineRoot(a,l)-a)*2; }
```

位置关系判断

```
1 template <class T>
2 bool pointOnSegment(Point<T> a, Line<T> l)
3 { return (sgn(cross(a-l.a, a-l.b))==0)&&(sgn(dot(a-l.a, a-l.b))<=0); }
4
5 template <class T>
6 bool lineCrossLine(Line<T> a, Line<T> b)
7 {
8     double f1=cross(b.a-a.a, a.b-a.a), f2=cross(b.b-a.a, a.b-a.a);
9     double g1=cross(a.a-b.a, b.b-b.a), g2=cross(a.b-b.a, b.b-b.a);
10    return ((f1<0)^(f2<0))&&((g1<0)^(g2<0));
11 }
12
13 template <class T>
14 bool pointOnLineLeft(Point<T> a, Line<T> l) { return cross(l.b-l.a, a-l.a)>0; }
15
16 //适用任意多边形, O(n)
17 template <class T>
18 bool pointInPolygon(Point<T> a, const vector<Point<T>> &p)
19 {
20     int n=p.size();
21     for (int i=0; i<n; i++)
22         if (pointOnSegment(a, Line<T>(p[i], p[(i+1)%n])))
23             return 1;
24     bool t=0;
25     for (int i=0; i<n; i++)
26     {
27         Point<T> u=p[i], v=p[(i+1)%n];
28         if (u.x<a.x&&v.x>a.x&&pointOnLineLeft(a, Line<T>(v, u))) t^=1;
29         if (u.x>a.x&&v.x<a.x&&pointOnLineLeft(a, Line<T>(u, v))) t^=1;
30     }
31     return t;
32 }
33
34 //适用凸多边形, O(log n)
35 template <class T>
36 bool pointInPolygon_(Point<T> a, const vector<Point<T>> &p)
37 {
38     int n=p.size();
39     if (cross(a-p[0], p[1]-p[0])<0 || cross(a-p[0], p[n-1]-p[0])>0) return 0;
40     if (pointOnSegment(a, Line<T>(p[0], p[1])) || pointOnSegment(a, Line<T>(p[n-1], p[0]))) return 1;
41     int l=1, r=n-1;
42     while (l+1<r)
43     {
44         int mid=(l+r)>>1;
45         if (cross(a-p[l], p[mid]-p[l])<0) l=mid;
46         else r=mid;
47     }
48     if (cross(a-p[l], p[r]-p[l])>0) return 0;
49     if (pointOnSegment(a, Line<T>(p[l], p[r]))) return 1;
50     return 1;
51 }
```

```
51 }
```

线段交点

```
1 //小心 平行
2 template <class T>
3 Point<T> lineIntersection(Line<T> a,Line<T> b)
4 {
5     Point<T> u=a.a-b.a,v=a.b-a.a,w=b.b-b.a;
6     double t=cross(u,w)/cross(w,v);
7     return a.a+t*v;
8 }
```

过定点做圆的切线

```
1 template <class T>
2 vector<Line<T>> tan_PC(Point<T> a,Point<T> c,T r)
3 {
4     Point<T> v=c-a;
5     vector<Line<T>> res;
6     int dis=dis_PP(a,c);
7     if (sgn(dis-r)==0) res.push_back(rotate(v,acos(-1)/2));
8     else if (dis>r)
9     {
10         double alpha=asin(r/dis);
11         res.push_back(rotate(v,alpha));
12         res.push_back(rotate(v,-alpha));
13     }
14     return res;
15 }
```

两圆交点

```
1 template <class T>
2 vector<Point<T>> circleIntersection(Point<T> c1,T r1,Point<T> c2,T r2)
3 {
4     auto get=[&](Point<T> c,T r,double alpha)->Point<T>
5     { return Point<T>(c.x+cos(alpha)*r,c.y+sin(alpha)*r); };
6
7     auto angle=[&](Point<T> a)->double { return atan2(a.x,a.y); };
8
9     vector<Point<T>> res;
10    double d=dis_PP(c1,c2);
11    if (sgn(d)==0) return res;
12    if (sgn(r1+r2-d)<0) return res;
13    if (sgn(fabs(r1-r2)-d)>0) return res;
14    double alpha=angle(c2-c1);
15    double beta=acos((r1*r1-r2*r2+d*d)/(r1*d*2));
16    Point<T> p1=get(c1,r1,alpha-beta),p2=get(c1,r1,alpha+beta);
17    res.push_back(p1);
18    if (p1!=p2) res.push_back(p2);
19    return res;
20 }
```

多边形面积

```
1 template <class T>
2 double polygonArea(const vector<Point<T>> &p)
3 {
4     int n=p.size();
5     double res=0;
6     for (int i=1;i<n-1;i++) res+=cross(p[i]-p[0],p[i+1]-p[0]);
7     return fabs(res/2);
8 }
```

自适应辛普森法

```
1 //注意边界函数值不能小于 eps
2 double f(double x) { return pow(x,0.5); }
3 double calc(double l,double r)
4 {
5     double mid=(l+r)/2.0;
6     return (r-l)*(f(l)+f(r)+f(mid)*4.0)/6.0;
7 }
8 double simpson(double l,double r,double lst)
9 {
10    double mid=(l+r)/2.0;
11    double fl=calc(l,mid),fr=calc(mid,r);
12    if (sgn(fl+fr-lst)==0) return fl+fr;
13    else return simpson(l,mid,fl)+simpson(mid,r,fr);
14 }
```

静态凸包

```
1 template <class T>
2 vector<Point<T>> getHull(vector<Point<T>> p)
3 {
4     vector<Point<T>> h,l;
5     sort(p.begin(),p.end(),[&](auto a,auto b)
6     {
7         if (a.x!=b.x) return a.x<b.x;
8         else return a.y<b.y;
9     });
10    p.erase(unique(p.begin(),p.end()),p.end());
11    if (p.size()<=1) return p;
12    for (auto a:p)
13    {
14        while (h.size()>1&&sgn(cross(a-h.back(),a-h[h.size()-2]))<=0) h.pop_back();
15        while (l.size()>1&&sgn(cross(a-l.back(),a-l[l.size()-2]))>=0) l.pop_back();
16        l.push_back(a);
17        h.push_back(a);
18    }
19    l.pop_back();
20    reverse(h.begin(),h.end());
21    h.pop_back();
22    l.insert(l.end(),h.begin(),h.end());
23    return l;
24 }
```

旋转卡壳求直径

```
1 template <class T>
2 double getDiameter(vector<Point<T>> p)
3 {
4     double res=0;
5     if (p.size()==2) return dis_PP(p[0],p[1]);
6     int n=p.size();
7     p.push_back(p.front());
8     int j=2;
9     for (int i=0;i<n;i++)
10    {
11        while (sgn(cross(p[i+1]-p[i],p[j]-p[i])-cross(p[i+1]-p[i],p[j+1]-p[j]))<0)
12            j=(j+1)%n;
13        res=max({res,dis_PP(p[i],p[j]),dis_PP(p[i+1],p[j])});
14    }
15    return res;
16 }
```

半平面交

```
1 template <class T>
2 vector<Point<T>> hp(vector<Line<T>> lines)
3 {
4     sort(lines.begin(),lines.end(),[&](auto l1,auto l2)
5     {
```



```

6         auto d1=l1.b-l1.a;
7         auto d2=l2.b-l2.a;
8
9         if (sgn(d1)!=sgn(d2)) return sgn(d1)==1;
10        return cross(d1,d2)>0;
11    });
12
13    deque<Line<T>> ls;
14    deque<Point<T>> ps;
15    for (auto l:lines)
16    {
17        if (ls.empty())
18        {
19            ls.push_back(l);
20            continue;
21        }
22        while (!ps.empty()&&!pointOnLineLeft(ps.back(),l))
23        {
24            ps.pop_back();
25            ls.pop_back();
26        }
27        while (!ps.empty()&&!pointOnLineLeft(ps[0],l))
28        {
29            ps.pop_front();
30            ls.pop_front();
31        }
32        if (cross(l.b-l.a,ls.back().b-ls.back().a)==0)
33        {
34            if (dot(l.b-l.a,ls.back().b-ls.back().a)>0)
35            {
36                if (!pointOnLineLeft(ls.back().a,l))
37                {
38                    assert(ls.size()==1);
39                    ls[0]=l;
40                }
41                continue;
42            }
43            return {};
44        }
45        ps.push_back(lineIntersection(ls.back(),l));
46        ls.push_back(l);
47    }
48    while (!ps.empty()&&!pointOnLineLeft(ps.back(),ls[0]))
49    {
50        ps.pop_back();
51        ls.pop_back();
52    }
53    if (ls.size()<=2) return {};
54    ps.push_back(lineIntersection(ls[0],ls.back()));
55    return vector(ps.begin(),ps.end());
56 }

```