

Algorithm Library

CRatiQ

South China Normal University

February 24, 2025

Contents

常用文件	3
DEBUG 头	3
__int128 输出流	3
常用数学函数	3
纳秒级随机种子	4
Linux 对拍	4
数学	4
欧拉筛	4
取模类 (MInt)	5
组合数	7
多项式	8
原根表	11
线性基	12
min-plus 卷积	13
模意义分数还原	13
Exgcd	14
一次函数下取整区间和	14
二元一次不定方程	15
行列式求值	15
高斯消元法	16
枚举二进制下有 k 个 1 的数	16
康托展开	17
数据结构	18
并查集 (启发式合并 + 带撤销)	18
笛卡尔树	18
状压 RMQ	19
ST 表	20
树状数组	20
线段树	21
可并堆 (pb_ds)	23
成员函数	23
示例	23
平衡树 (pb_ds)	24
成员函数	24
示例	24
哈希表 (pb_ds)	25
字符串	25
字符串哈希 (随机模数)	25
允许 k 次失配的字符串匹配	25
最长公共子串	25
Code	25
KMP	26
字符串周期	26
统计前缀出现次数	26
求满足一些要求的 Border	26
Code	26
Z 函数	26
AC 自动机	27
后缀数组	28
(广义) 后缀自动机	28
不同子串个数	29
字典序第 k 大子串	29
最小循环移位	29

出现次数	29
首次出现位置	29
所有出现位置	29
最短未出现字符串	29
最长公共子串	29
Code	29
Manacher	30
回文自动机	31
本质不同回文子串数	31
回文子串出现次数	31
Code	31
含通配符字符串匹配	32
图论	32
拓扑排序	32
树的直径	33
树的重心	33
Dijkstra	34
SPFA	34
Johnson	35
强连通分量	35
边双连通分量	36
轻重链剖分	38
虚树	39
欧拉路径	40
2-SAT	41
最大流	42
最小费用最大流	43
二分图最大权匹配 (KM)	45
三元环计数	47
树哈希	47
矩阵树定理	48
计算几何	49
EPS	49
Point	49
Line	50
距离	50
点绕中心旋转	50
关于线的对称点	50
位置关系判断	51
线段交点	51
过定点做圆的切线	51
两圆交点	52
多边形面积	52
自适应辛普森法	52
静态凸包	52
旋转卡壳求直径	53
半平面交	53

常用文件

DEBUG 头

```
1  #include <bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3  using i64=long long;
4  using i128=__int128;
5
6  namespace DBG
7  {
8      template <class T>
9      void _dbg(const char *f,T t) { cerr<<f<<'\n'; }
10
11     template <class A,class... B>
12     void _dbg(const char *f,A a,B... b)
13     {
14         while (*f!=',') cerr<<*f++;
15         cerr<<'\n';
16         _dbg(f+1,b...);
17     }
18
19     template <class T>
20     ostream& operator << (ostream& os,const vector<T> &v)
21     {
22         os<<"[ ";
23         for (const auto &x:v) os<<x<<", ";
24         os<<"]";
25         return os;
26     }
27
28     #define dbg(...) _dbg(#__VA_ARGS__, __VA_ARGS__)
29 }
30
31 using namespace DBG;
```

__int128 输出流

```
1  ostream &operator << (ostream &os,i128 n)
2  {
3      string s;
4      bool neg=n<0;
5      if (neg) n=-n;
6      while (n)
7      {
8          s+='0'+n%10;
9          n/=10;
10     }
11     if (neg) s+='-';
12     reverse(s.begin(),s.end());
13     if (s.empty()) s+='0';
14     return os<<s;
15 }
```

常用数学函数

```
1  i64 ceilDiv(i64 n,i64 m)
2  {
3      if (n>=0) return (n+m-1)/m;
4      else return n/m;
5  }
6
7  i64 floorDiv(i64 n,i64 m)
8  {
9      if (n>=0) return n/m;
10     else return (n-m+1)/m;
11 }
12
13 i128 gcd(i128 a,i128 b)
14 {
```

```

15     return b?gcd(b,a%b):a;
16 }

```

纳秒级随机种子

```

1 mt19937_64 rng(chrono::steady_clock::now().time_since_epoch().count());

```

Linux 对拍

记得先 `chmod 777 check.sh`.

```

1 for ((i=0;i<100;i++))
2 do
3     ./A_Generator > A.in
4     ./A < A.in > A.out
5     ./A_Good < A.in > A.ans
6
7     if diff A.out A.ans;
8     then
9         echo "AC"
10    else
11        echo "WA"
12        exit 1
13    fi
14 done

```

数学

欧拉筛

时间复杂度为 $\mathcal{O}(n)$ 。

ϕ 为欧拉函数 $\varphi(n)$, μ 为莫比乌斯函数 $\mu(n)$, d 为约数个数 $\sigma_0(n)$, f 为约数和 $\sigma_1(n)$ 。

假如一个积性函数 f 满足: 对于任意质数 p 和正整数 k , 可以在 $\mathcal{O}(1)$ 时间内计算 $f(p^k)$, 那么可以在 $\mathcal{O}(n)$ 时间内筛出 $f(1), f(2), \dots, f(n)$ 的值。

设合数 n 的质因子分解是 $\prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$, 其中 $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ 为质数, 我们在线性筛中记录 $g_n = p_1^{\alpha_1}$, 假如 n 被 $x \cdot p$ 筛掉 (p 是质数), 那么 g 满足如下递推式:

$$g_n = \begin{cases} g_x \cdot p & x \bmod p = 0 \\ p & \text{otherwise} \end{cases}$$

假如 $n = g_n$, 说明 n 就是某个质数的次幂, 可以 $\mathcal{O}(1)$ 计算 $f(n)$; 否则, $f(n) = f(\frac{n}{g_n}) \cdot f(g_n)$ 。

```

1 vector<int> minp,primes;
2 // vector<int> phi;
3 // vector<int> mu;
4 // vector<int> d,num;
5 // vector<int> f,g;
6
7 void sieve(int n)
8 {
9     minp.assign(n+1,0);
10    primes.clear();
11    // phi.assign(n+1,0);
12    // mu.assign(n+1,0);
13    // d.assign(n+1,0);
14    // num.assign(n+1,0);
15    // f.assign(n+1,0);
16    // g.assign(n+1,0);
17    // phi[1]=1;
18    // mu[1]=1;
19    // d[1]=1;

```

```

20 // f[1]=g[1]=1;
21 for (int i=2;i<=n;i++)
22 {
23     if (!minp[i])
24     {
25         minp[i]=i;
26         primes.push_back(i);
27         // phi[i]=i-1;
28         // mu[i]=-1;
29         // d[i]=2;
30         // num[i]=1;
31         // f[i]=g[i]=i+1;
32     }
33     for (auto p:primes)
34     {
35         if (i*p>n) break;
36         minp[i*p]=p;
37         if (p==minp[i])
38         {
39             // phi[i*p]=phi[i]*p;
40             // mu[i*p]=0;
41             // num[i*p]=num[i]+1;
42             // d[i*p]=d[i]/num[i*p]*(num[i*p]+1);
43             // g[i*p]=g[i]*p+1;
44             // f[i*p]=f[i]/g[i]*g[i*p];
45             break;
46         }
47         // phi[i*p]=phi[i]*phi[p];
48         // mu[i*p]=-mu[i];
49         // num[i*p]=1;
50         // d[i*p]=d[i]<<1;
51         // f[i*p]=f[i]*f[p];
52         // g[i*p]=p+1;
53     }
54 }
55 }

```

取模类 (MInt)

对 MInt<0> 修改 Mod 可以起到动态模数的效果，但常数较大。

```

1  template <class T>
2  constexpr T power(T a,i64 b)
3  {
4      T res=1;
5      for (;b>=1,a*=a)
6          if (b&1) res*=a;
7      return res;
8  }
9
10 template <int P>
11 struct MInt
12 {
13     int x;
14     constexpr MInt():x{} {}
15     constexpr MInt(i64 x):x{norm(x%getMod())} {}
16
17     static int Mod;
18     constexpr static int getMod()
19     {
20         if (P>0) return P;
21         else return Mod;
22     }
23
24     constexpr static void setMod(int Mod_) { Mod=Mod_; }
25
26     constexpr int norm(int x) const
27     {
28         if (x<0) x+=getMod();
29         if (x>=getMod()) x-=getMod();
30         return x;

```

```

31     }
32
33     constexpr int val() const { return x; }
34
35     explicit constexpr operator int () const { return x; }
36
37     constexpr MInt operator - () const
38     {
39         MInt res;
40         res.x=norm(getMod()-x);
41         return res;
42     }
43
44     constexpr MInt inv() const
45     {
46         assert(x!=0);
47         return power(*this,getMod()-2);
48     }
49
50     constexpr MInt &operator *= (MInt rhs) &
51     {
52         x=1ll*x*rhs.x%getMod();
53         return *this;
54     }
55
56     constexpr MInt &operator += (MInt rhs) &
57     {
58         x=norm(x+rhs.x);
59         return *this;
60     }
61
62     constexpr MInt &operator -= (MInt rhs) &
63     {
64         x=norm(x-rhs.x);
65         return *this;
66     }
67
68     constexpr MInt &operator /= (MInt rhs) &
69     {
70         return *this*=rhs.inv();
71     }
72
73     friend constexpr MInt operator * (MInt lhs,MInt rhs)
74     {
75         MInt res=lhs;
76         res*=rhs;
77         return res;
78     }
79
80     friend constexpr MInt operator + (MInt lhs,MInt rhs)
81     {
82         MInt res=lhs;
83         res+=rhs;
84         return res;
85     }
86
87     friend constexpr MInt operator - (MInt lhs,MInt rhs)
88     {
89         MInt res=lhs;
90         res-=rhs;
91         return res;
92     }
93
94     friend constexpr MInt operator / (MInt lhs,MInt rhs)
95     {
96         MInt res=lhs;
97         res/=rhs;
98         return res;
99     }
100
101     friend constexpr istream &operator >> (istream &is,MInt &a)

```

```

102     {
103         i64 v;
104         is>>v;
105         a=MInt(v);
106         return is;
107     }
108
109     friend constexpr ostream &operator << (ostream &os,const MInt &a) { return os<<a.val(); }
110
111     friend constexpr bool operator == (MInt lhs,MInt rhs) { return lhs.val()==rhs.val(); }
112
113     friend constexpr bool operator != (MInt lhs,MInt rhs) { return lhs.val()!=rhs.val(); }
114 };
115
116 template<>
117 int MInt<0>::Mod=1;
118
119 template<int V,int P>
120 constexpr MInt<P> CInv=MInt<P>(V).inv();

```

组合数

```

1 struct Comb
2 {
3     int n;
4     vector<Z> _fac,_inv,_finv;
5
6     Comb():n{0},_fac{1},_inv{0},_finv{1}{}
7     Comb(int n):Comb() { init(n); }
8
9     void init(int m)
10    {
11        m=min(m,Z::getMod()-1);
12        if (m<=n) return;
13        _fac.resize(m+1);
14        _inv.resize(m+1);
15        _finv.resize(m+1);
16
17        for (int i=n+1;i<=m;i++)
18            _fac[i]=_fac[i-1]*i;
19        _finv[m]=_fac[m].inv();
20        for (int i=m;i>n;i--)
21        {
22            _finv[i-1]=_finv[i]*i;
23            _inv[i]=_finv[i]*_fac[i-1];
24        }
25        n=m;
26    }
27
28    Z fac(int m)
29    {
30        if (m>n) init(m<<1);
31        return _fac[m];
32    }
33
34    Z finv(int m)
35    {
36        if (m>n) init(m<<1);
37        return _finv[m];
38    }
39
40    Z inv(int m)
41    {
42        if (m>n) init(m<<1);
43        return _inv[m];
44    }
45
46    Z binom(int n,int m)
47    {
48        if (n<m||m<0) return 0;
49        return fac(n)*finv(m)*finv(n-m);

```



```

50     }
51 } comb;

```

多项式

```

1  vector<int> rev;
2  vector<Z> roots{0,1};
3
4  void dft(vector<Z> &a)
5  {
6      int n=a.size();
7      if (int(rev.size())!=n)
8      {
9          int k=__builtin_ctz(n)-1;
10         rev.resize(n);
11         for (int i=0;i<n;i++)
12             rev[i]=rev[i>>1]>>1|(i&1)<<k;
13     }
14     for (int i=0;i<n;i++)
15         if (rev[i]<i)
16             swap(a[i],a[rev[i]]);
17     if (int(roots.size())<n)
18     {
19         int k=__builtin_ctz(roots.size());
20         roots.resize(n);
21         while ((1<<k)<n)
22         {
23             Z e=power(Z(3),(P-1)>>(k+1));
24             for (int i=1<<(k-1);i<(1<<k);i++)
25             {
26                 roots[i<<1]=roots[i];
27                 roots[i<<1|1]=roots[i]*e;
28             }
29             k++;
30         }
31     }
32     for (int k=1;k<n;k<<=1)
33         for (int i=0;i<n;i+=k*2)
34             for (int j=0;j<k;j++)
35             {
36                 Z u=a[i+j],v=a[i+j+k]*roots[j+k];
37                 a[i+j]=u+v;
38                 a[i+j+k]=u-v;
39             }
40 }
41
42 void idft(vector<Z> &a)
43 {
44     int n=a.size();
45     reverse(a.begin()+1,a.end());
46     dft(a);
47     Z inv=(1-P)/n;
48     for (int i=0;i<n;i++) a[i]*=inv;
49 }
50
51 struct Poly
52 {
53     vector<Z> a;
54
55     Poly(){}
56     explicit Poly(int size,function<Z(int)>f=[](int) { return 0; }):a(size)
57     { for (int i=0;i<size;i++) a[i]=f(i); }
58     Poly(const vector<Z> &a):a(a){}
59     Poly(const initializer_list<Z> &a):a(a){}
60
61     int size() const { return a.size(); }
62
63     void resize(int n) { a.resize(n); }
64
65     Z operator [] (int idx) const
66     {

```

```

67         if (idx<size()) return a[idx];
68         else return 0;
69     }
70
71     Z &operator [] (int idx) { return a[idx]; }
72
73     Poly mulxk(int k) const
74     {
75         auto b=a;
76         b.insert(b.begin(),k,0);
77         return Poly(b);
78     }
79
80     Poly modxk(int k) const
81     {
82         k=min(k,size());
83         return Poly(vector<Z>(a.begin(),a.begin()+k));
84     }
85
86     Poly divxk(int k) const
87     {
88         if (size()<=k) return Poly();
89         return Poly(vector<Z>(a.begin()+k,a.end()));
90     }
91
92     friend Poly operator + (const Poly &a,const Poly &b)
93     {
94         vector<Z> res(max(a.size(),b.size()));
95         for (int i=0;i<int(res.size());i++)
96             res[i]=a[i]+b[i];
97         return Poly(res);
98     }
99
100    friend Poly operator - (const Poly &a,const Poly &b)
101    {
102        vector<Z> res(max(a.size(),b.size()));
103        for (int i=0;i<int(res.size());i++)
104            res[i]=a[i]-b[i];
105        return Poly(res);
106    }
107
108    friend Poly operator - (const Poly &a)
109    {
110        vector<Z> res(a.size());
111        for (int i=0;i<int(res.size());i++)
112            res[i]=-a[i];
113        return Poly(res);
114    }
115
116    friend Poly operator * (Poly a,Poly b)
117    {
118        if (!a.size()||!b.size()) return Poly();
119        if (a.size()<b.size()) swap(a,b);
120        if (b.size()<128)
121        {
122            Poly c(a.size()+b.size()-1);
123            for (int i=0;i<a.size();i++)
124                for (int j=0;j<b.size();j++)
125                    c[i+j]+=a[i]*b[j];
126            return c;
127        }
128        int sz=1,tot=a.size()+b.size()-1;
129        while (sz<tot) sz<<=1;
130        a.a.resize(sz);
131        b.a.resize(sz);
132        dft(a.a);
133        dft(b.a);
134        for (int i=0;i<sz;i++)
135            a.a[i]=a[i]*b[i];
136        idft(a.a);
137        a.resize(tot);

```

```

138     return a;
139 }
140
141 friend Poly operator * (Z a, Poly b)
142 {
143     for (int i=0; i<int(b.size()); i++) b[i]*=a;
144     return b;
145 }
146
147 friend Poly operator * (Poly a, Z b)
148 {
149     for (int i=0; i<int(a.size()); i++) a[i]*=b;
150     return a;
151 }
152
153 Poly &operator += (Poly b) { return (*this)=(*this)+b; }
154 Poly &operator -= (Poly b) { return (*this)=(*this)-b; }
155 Poly &operator *= (Poly b) { return (*this)=(*this)*b; }
156 Poly &operator *= (Z b) { return (*this)=(*this)*b; }
157
158 Poly deriv() const
159 {
160     if (a.empty()) return Poly();
161     vector<Z> res(size()-1);
162     for (int i=0; i<size()-1; i++)
163         res[i]=(i+1)*a[i+1];
164     return Poly(res);
165 }
166
167 Poly integr() const
168 {
169     vector<Z> res(size()+1);
170     for (int i=0; i<size(); i++)
171         res[i+1]=a[i]/(i+1);
172     return Poly(res);
173 }
174
175 Poly inv(int m) const
176 {
177     Poly x{a[0].inv()};
178     int k=1;
179     while (k<m)
180     {
181         k<=1;
182         x=(x*(Poly{2}-modxk(k)*x)).modxk(k);
183     }
184     return x.modxk(m);
185 }
186
187 Poly ln(int m) const { return (deriv()*inv(m)).integr().modxk(m); }
188
189 Poly exp(int m) const
190 {
191     Poly x{1};
192     int k=1;
193     while (k<m)
194     {
195         k<=1;
196         x=(x*(Poly{1}-x.ln(k)+modxk(k))).modxk(k);
197     }
198     return x.modxk(m);
199 }
200
201 Poly pow(int k, int m) const
202 {
203     int i=0;
204     while (i<size()&& a[i].val()==0) i++;
205     if (i==size() || 1ll*i*k>=m) return Poly(vector<Z>(m));
206     Z v=a[i];
207     auto f=divxk(i)*v.inv();
208     return (f.ln(m-i*k)*k).exp(m-i*k).mulxk(i*k)*power(v, k);

```

```

209     }
210
211     Poly sqrt(int m) const
212     {
213         Poly x{1};
214         int k=1;
215         while (k<m)
216         {
217             k<<=1;
218             x=(x+(modxk(k)*x.inv(k)).modxk(k))*((P+1)/2);
219         }
220         return x.modxk(m);
221     }
222     Poly mult(Poly b) const
223     {
224         if (b.size()==0) return Poly();
225         int n=b.size();
226         reverse(b.a.begin(),b.a.end());
227         return ((*this)*b).divxk(n-1);
228     }
229
230     vector<Z> eval(vector<Z> x) const
231     {
232         if (size()==0) return vector<Z>(x.size(),0);
233         const int n=max(int(x.size()),size());
234         vector<Poly> q(n<<2);
235         vector<Z> ans(x.size());
236         x.resize(n);
237         function<void(int,int,int)> build=[&](int p,int l,int r)
238         {
239             if (r-l==1) q[p]=Poly{1,-x[l]};
240             else
241             {
242                 int m=(l+r)>>1;
243                 build(p<<1,l,m);
244                 build(p<<1|1,m,r);
245                 q[p]=q[p<<1]*q[p<<1|1];
246             }
247         };
248         function<void(int,int,int,const Poly&)> work=[&](int p,int l,int r,const Poly &num)
249         {
250             if (r-l==1)
251             {
252                 if (l<int(ans.size())) ans[l]=num[0];
253             }
254             else
255             {
256                 int m=(l+r)>>1;
257                 work(p<<1,l,m,num.mult(q[p<<1|1]).modxk(m-l));
258                 work(p<<1|1,m,r,num.mult(q[p<<1]).modxk(r-m));
259             }
260         };
261         build(1,0,n);
262         work(1,0,n,mult(q[1].inv(n)));
263         return ans;
264     }
265 };

```

原根表

	prime	r	k	g
1	3	1	1	2
2	5	1	2	2
3	17	1	4	3
4	97	3	5	5
5	193	3	6	5
6	257	1	8	3
7	7681	15	9	17
8	12289	3	12	11
9	40961	5	13	3
10	65537	1	16	3

```

12 786433          3  18 10
13 5767169        11 19 3
14 7340033        7  20 3
15 23068673       11 21 3
16 104857601      25 22 3
17 167772161      5  25 3
18 469762049      7  26 3
19 1004535809     479 21 3
20 2013265921     15 27 31
21 2281701377     17 27 3
22 3221225473     3  30 5
23 75161927681    35 31 3
24 77309411329    9  33 7
25 206158430209   3  36 22
26 2061584302081  15 37 7
27 2748779069441  5  39 3
28 6597069766657  3  41 5
29 39582418599937 9  42 5
30 79164837199873 9  43 5
31 263882790666241 15 44 7
32 1231453023109121 35 45 3
33 1337006139375617 19 46 3
34 3799912185593857 27 47 5
35 4222124650659841 15 48 19
36 7881299347898369 7  50 6
37 31525197391593473 7  52 3
38 180143985094819841 5  55 6
39 1945555039024054273 27 56 5
40 4179340454199820289 29 57 3

```

线性基

```

1  struct LB
2  {
3      static constexpr int L=60;
4      array<i64,L+1> a{};
5
6      LB(){}
7
8      LB(const vector<i64> &v) { init(v); }
9
10     bool insert(i64 t)
11     {
12         for (int i=L;i>=0;i--)
13             if (t&(1ll<<i))
14             {
15                 if (!a[i])
16                 {
17                     a[i]=t;
18                     return 1;
19                 }
20                 else t^=a[i];
21             }
22         return 0;
23     }
24
25     void init(const vector<i64> &v) { for (auto x:v) insert(x); }
26
27     bool check(i64 t)
28     {
29         for (int i=L;i>=0;i--)
30             if (t&(1ll<<i))
31                 if (!a[i]) return 0;
32                 else t^=a[i];
33         return 1;
34     }
35
36     i64 QueryMax()
37     {
38         i64 res=0;
39         for (int i=L;i>=0;i--)

```

```

40         res=max(res,res^a[i]);
41     return res;
42 }
43
44 i64 QueryMin()
45 {
46     for (int i=0;i<=L;i++)
47         if (a[i]) return a[i];
48     return 0;
49 }
50
51 i64 QueryKth(int k)
52 {
53     i64 res=0;
54     int cnt=0;
55     array<i64,L+1> tmp{};
56     for (int i=0;i<=L;i++)
57     {
58         for (int j=i-1;j>=0;j--)
59             if (a[i]&(1ll<<j)) a[i]^=a[j];
60         if (a[i]) tmp[cnt++]=a[i];
61     }
62     if (k>=(1ll<<cnt)) return -1;
63     for (int i=0;i<cnt;i++)
64         if (k&(1ll<<i)) res^=tmp[i];
65     return res;
66 }
67 };

```

min-plus 卷积

$\mathcal{O}(n \log n)$, 但要求 b 是凸的。

```

1  template <class T>
2  vector<T> min_plus_convolution(const vector<T> &a,const vector<T> &b)
3  {
4      int n=a.size(),m=b.size();
5      vector<T> c(n+m-1);
6
7      function<void(int,int,int,int)> solve=[&](int l,int r,int ql,int qr)
8      {
9          if (l>r) return;
10         int mid=(l+r)>>1;
11         while (ql+m<=l) ++ql;
12         while (qr>r) --qr;
13         int qmid=-1;
14         c[mid]=inf;
15         for (int i=ql;i<=qr;i++)
16         {
17             if (a[i]+b[mid-i]-i<c[mid])
18             {
19                 c[mid]=a[i]+b[mid-i];
20                 qmid=i;
21             }
22             else if (mid-i>=0&&mid-i<m) qmid=i;
23         }
24         solve(l,mid-1,ql,mid);
25         solve(mid+1,r,qmid,qr);
26     };
27
28     solve(0,n+m-2,0,n-1);
29     return c;
30 }

```

模意义分数还原

分别是求：分子不大于 A 时分子最大的分数；分子分母最大值最小的分数。

```

1  pair<int,int> restore(int q,int A)
2  {

```

```

3     int x=q,y=P,a=1,b=0;
4     while (x>A)
5     {
6         swap(x,y);
7         swap(a,b);
8         a-=x/y*b;
9         x%=y;
10    }
11    return make_pair(x,a);
12 }
13
14 pair<int,int> restore(int x)
15 {
16     vector<int> a;
17     int p=P;
18     Z inv=Z(x).inv();
19     while (x)
20     {
21         a.push_back(x);
22         swap(x,p);
23         x%=p;
24     }
25     pair<int,int> res{P,P};
26     for (auto ca:a)
27     {
28         int cb=(Z(ca)*inv).x;
29         ca=min(ca,P-ca);
30         cb=min(cb,P-cb);
31         if (max(res.first,res.second)>max(ca,cb))
32             res={ca,cb};
33     }
34     return res;
35 }

```

Exgcd

可以证明 $|x| \leq b, |y| \leq a$ 。

```

1 void exgcd(i64 a,i64 b,i64 &x,i64 &y)
2 {
3     if (!b)
4     {
5         x=1; y=0;
6         return;
7     }
8     exgcd(b,a%b,x,y);
9     swap(x,y);
10    y-=a/b*x;
11    return;
12 }

```

一次函数下取整区间和

求 $\sum_{i=0}^n \lfloor \frac{ai+b}{c} \rfloor$ 。

其实是类欧，时间复杂度为 $\mathcal{O}(\log n)$ 。

```

1 //求 sum_{i=0}^{n} floor(a*i+b/c).
2 i64 floorSum(i64 a,i64 b,i64 c,i64 n)
3 {
4     i64 res=0;
5     if (a>=c)
6     {
7         res+=n*(n+1)*(a/c)/2;
8         a%=c;
9     }
10    if (b>=c)
11    {
12        res+=(n+1)*(b/c);
13        b%=c;

```

```

14     }
15     i64 m=(a*n+b)/c;
16     if (m==0) return res;
17     res+=n*m-floorSum(c,c-b-1,a,m-1);
18     return res;
19 }

```

二元一次不定方程

给定不定方程 $ax + by = c$ 。

若该方程无整数解，输出 -1 。

若该方程有整数解，且有正整数解，则输出其正整数解的数量，所有正整数解中 x 的最小值，所有正整数解中 y 的最小值，所有正整数解中 x 的最大值，以及所有正整数解中 y 的最大值。

若方程有整数解，但没有正整数解，输出所有整数解中 x 的最小正整数值， y 的最小正整数值。

```

1 void exgcd(i64 a,i64 b,i64 &x,i64 &y)
2 {
3     if (!b)
4     {
5         x=1; y=0;
6         return;
7     }
8     exgcd(b,a%b,x,y);
9     swap(x,y);
10    y-=a/b*x;
11    return;
12 }
13
14 i64 ceilDiv(i64 n,i64 m)
15 {
16     if (n>=0) return (n+m-1)/m;
17     else return n/m;
18 }
19
20 i64 floorDiv(i64 n,i64 m)
21 {
22     if (n>=0) return n/m;
23     else return (n-m+1)/m;
24 }
25
26 void R()
27 {
28     i64 a,b,c,x,y,t;
29     cin>>a>>b>>c;
30     t=__gcd(a,b);
31     if (c%t)
32     {
33         cout<<"-1\n";
34         return;
35     }
36     exgcd(a,b,x,y);
37     x*=c/t,y*=c/t;
38     i64 l=ceilDiv(1ll-x,b/t),r=floorDiv(y-1ll,a/t);
39     if (l>r) cout<<x+l*b/t<<' '<<y-r*a/t<<'\n';
40     else cout<<r-l+1ll<<' '<<x+l*b/t<<' '<<y-r*a/t<<' '<<x+r*b/t<<' '<<y-l*a/t<<'\n';
41     return;
42 }

```

行列式求值

时间复杂度为 $\mathcal{O}(n^3)$ 。

```

1 Z det(vector<vector<Z>> a)
2 {
3     int n=a.size(),fl=1;
4     Z res=1;
5     for (int i=0;i<n;i++)

```



```

6      {
7          for (int j=i+1;j<n;j++)
8          {
9              while (a[i][i].x)
10             {
11                 int d=a[j][i].x/a[i][i].x;
12                 for (int k=i;k<n;k++)
13                     a[j][k]-=a[i][k]*d;
14                 swap(a[i],a[j]);
15                 fl=-fl;
16             }
17             swap(a[i],a[j]);
18             fl=-fl;
19         }
20     }
21     for (int i=0;i<n;i++) res*=a[i][i];
22     res*=fl;
23     return res;
24 }

```

高斯消元法

返回 -1 代表无解, 其余情况返回自由元数。

```

1  using Real=long double;
2  constexpr Real eps=1e-8;
3
4  int Gauss(vector<vector<Real>> a,vector<Real> &x)
5  {
6      int n=a.size(),i=0,j=0;
7      for (;i<n&&j<n;i++,j++)
8      {
9          int mx=i;
10         for (int k=i+1;k<n;k++)
11             if (abs(a[k][j])>abs(a[mx][j]))
12                 mx=k;
13         if (mx!=i) swap(a[mx],a[i]);
14         if (fabs(a[i][j])<eps)
15         {
16             i--;
17             continue;
18         }
19         for (int k=i+1;k<n;k++)
20             if (fabs(a[k][j])>eps)
21             {
22                 Real t=a[k][j]/a[i][j];
23                 for (int l=j;l<n;l++)
24                     a[k][l]-=a[i][l]*t;
25                 a[k][j]=0;
26             }
27     }
28     for (int k=i;k<n;k++)
29         if (fabs(a[k][j])>eps)
30             return -1;//No solution
31     if (i<n) return n-i;//number of free elements
32     for (int k=n-1;k>=0;k--)
33     {
34         for (int l=k+1;l<n;l++)
35             a[k][n]-=a[k][l]*x[l];
36         x[k]=a[k][n]/a[k][k];
37     }
38     return 0;//Only one solution
39 }

```

枚举二进制下有 k 个 1 的数

```

1  for (int s=(1<<k)-1,t;s<1<<n;t=s+(s&-s),s=(s&-t)>>__lg(s&-s)+1|t)

```

康托展开

$n \leq 20$ 时使用, 时间复杂度为 $\mathcal{O}(n^2)$ 。

```
1 //记得预处理前 20 位阶乘
2 i64 fac[21]={1};
3
4 i64 cantor(vector<int> p,int n)
5 {
6     vector<int> a(n);
7     i64 res=1;
8     for (int i=0;i<n;i++)
9         for (int j=i+1;j<n;j++)
10             if (p[j]<p[i])
11                 a[i]++;
12     for (int i=0;i<n-1;i++)
13         res+=a[i]*fac[n-i-1];
14     return res;
15 }
16
17 vector<int> decantor(i64 x,int n)
18 {
19     x--;
20     vector<int> rest(n),a(n),p(n);
21     iota(rest.begin(),rest.end(),1);
22     for (int i=0;i<n;i++)
23     {
24         a[i]=x/fac[n-i-1];
25         x%=fac[n-i-1];
26     }
27     for (int i=0;i<n;i++)
28     {
29         p[i]=rest[a[i]];
30         rest.erase(lower_bound(rest.begin(),rest.end(),p[i]));
31     }
32     return p;
33 }
```

$n > 20$ 时使用, 时间复杂度为 $\mathcal{O}(n \log n)$ 。

逆康托要求传入 $\text{ord} - 1 = \sum_{i=1}^n a_i(n-i)!$ 的 a 。

```
1 Z cantor(vector<int> p,int n)
2 {
3     Z res=1;
4     vector<int> a(n);
5     BIT<int> bit(n+1);
6     for (int i=n-1;i>=0;i--)
7     {
8         a[i]=bit.sum(p[i]);
9         bit.add(p[i],1);
10    }
11    for (int i=0;i<n-1;i++)
12        res+=Z(a[i])*comb.fac(n-i-1);
13    return res;
14 }
15
16 vector<int> decantor(vector<int> a,int n)
17 {
18     int cnt=0;
19     vector<int> p(n);
20     __gnu_pbds::tree<pair<int,int>,__gnu_pbds::null_type,
21     less<pair<int,int>>,__gnu_pbds::rb_tree_tag,
22     __gnu_pbds::tree_order_statistics_node_update> tr;
23
24     for (int i=1;i<=n;i++)
25         tr.insert({i,cnt++});
26     for (int i=0;i<n;i++)
27     {
28         p[i]=tr.find_by_order(a[i])->first;
29         tr.erase(tr.lower_bound({p[i],0}));
30     }
31 }
```

```

31     return p;
32 }

```

数据结构

并查集（启发式合并 + 带撤销）

```

1  struct DSU
2  {
3      int n=0;
4      vector<int> fa,siz;
5      stack<int> s;
6
7      DSU(int n) { init(n); }
8
9      void init(int n)
10     {
11         fa.resize(n);
12         iota(fa.begin(),fa.end(),0);
13         siz.assign(n,1);
14         while (!s.empty()) s.pop();
15     }
16
17     int get(int x) { return fa[x]==x?x:get(fa[x]); }
18
19     void merge(int x,int y)
20     {
21         x=get(x),y=get(y);
22         if (x==y) return;
23         if (siz[x]<siz[y]) swap(x,y);
24         s.push(y),fa[y]=x,siz[x]+=siz[y];
25     }
26
27     void undo()
28     {
29         if (s.empty()) return;
30         int y=s.top();
31         s.pop();
32         siz[fa[y]]-=siz[y];
33         fa[y]=y;
34     }
35
36     void back(int t=0) { while (s.size()>t) undo(); }
37 };

```

笛卡尔树

```

1  struct CartesianTree
2  {
3      vector<int> ls,rs;
4
5      CartesianTree(){}
6
7      template<class T>
8      CartesianTree(vector<T> &a) { init(a); }
9
10     template<class T>
11     void init(vector<T> &a)
12     {
13         int n=a.size(),top=0;
14         vector<int> stk(n);
15         ls.assign(n,-1);
16         rs.assign(n,-1);
17         for (int i=1;i<n;i++)
18         {
19             int k=top;
20             while (k>=0&&a[stk[k]]>a[i])
21                 k--;
22             if (k>=0) rs[stk[k]]=i;

```

```

23         if (k<top) ls[i]=stk[k+1];
24         stk[++k]=i;
25         top=k;
26     }
27 }
28 };

```

状压 RMQ

```

1  template <class T,class Cmp=less<T>>
2  struct RMQ
3  {
4      const Cmp cmp=Cmp();
5      static constexpr unsigned B=64;
6      using u64=unsigned long long;
7      int n;
8      vector<vector<T>> a;
9      vector<T> pre,suf,ini;
10     vector<u64> stk;
11
12     RMQ() {}
13     RMQ(const vector<T> &v) { init(v); }
14
15     void init(const vector<T> &v)
16     {
17         n=v.size();
18         pre=suf=ini=v;
19         stk.resize(n);
20         if (!n) return;
21         const int M=(n-1)/B+1;
22         const int lg=__lg(M);
23         a.assign(lg+1,vector<T>(M));
24         for (int i=0;i<M;i++)
25         {
26             a[0][i]=v[i*B];
27             for (int j=1;j<B&& i*B+j<n;j++)
28                 a[0][i]=min(a[0][i],v[i*B+j],cmp);
29         }
30         for (int i=1;i<n;i++)
31             if (i%B) pre[i]=min(pre[i],pre[i-1],cmp);
32         for (int i=n-2;i>=0;i--)
33             if (i%B!=B-1) suf[i]=min(suf[i],suf[i+1],cmp);
34         for (int j=0;j<lg;j++)
35             for (int i=0;i+(2<<j)<=M;i++)
36                 a[j+1][i]=min(a[j][i],a[j][i+(1<<j)],cmp);
37         for (int i=0;i<M;i++)
38         {
39             const int l=i*B;
40             const int r=min(1U*n,l+B);
41             u64 s=0;
42             for (int j=l;j<r;j++)
43             {
44                 while (s&&cmp(v[j],v[__lg(s)+l])) s^=1ULL<<__lg(s);
45                 s|=1ULL<<(j-l);
46                 stk[j]=s;
47             }
48         }
49     }
50
51     //查询区间 [l,r) 的 RMQ
52     T operator()(int l,int r)
53     {
54         if (l/B!=(r-1)/B)
55         {
56             T ans=min(suf[l],pre[r-1],cmp);
57             l=l/B+1,r=r/B;
58             if (l<r)
59             {
60                 int k=__lg(r-l);
61                 ans=min({ans,a[k][l],a[k][r-(1<<k)]},cmp);
62             }

```

```

63         return ans;
64     }
65     else
66     {
67         int x=B*(l/B);
68         return ini[__builtin_ctzll(stk[r-1]>>(l-x))+l];
69     }
70 }
71 };

```

ST 表

```

1  template <class T>
2  struct ST
3  {
4      int n;
5      vector<vector<T>> a;
6
7      ST() {}
8      ST(const vector<T> &v) { init(v); }
9
10     void init(const vector<T> &v)
11     {
12         n=v.size();
13         if (!n) return;
14         const int lg=__lg(n);
15         a.assign(lg+1,vector<T>(n));
16         a[0]=v;
17         for (int j=0;j<lg;j++)
18             for (int i=0;i+(2<<j)<=n;i++)
19                 a[j+1][i]=__gcd(a[j][i],a[j][i+(1<<j)]);
20     }
21
22     T operator()(int l,int r)
23     {
24         int k=__lg(r-l);
25         return __gcd(a[k][l],a[k][r-(1<<k)]);
26     }
27 };

```

树状数组

```

1  template <class T>
2  struct BIT
3  {
4      int n;
5      vector<T> a;
6
7      BIT(int n_=0) { init(n_); }
8
9      void init(int n_)
10     {
11         n=n_;
12         a.assign(n,T{});
13     }
14
15     void add(int x,const T &v)
16     {
17         for (int i=x+1;i<=n;i+=i&-i)
18             a[i-1]=a[i-1]+v;
19     }
20
21     //查询区间 [0,x)
22     T sum(int x)
23     {
24         T ans{};
25         for (int i=x;i>0;i-=i&-i)
26             ans=ans+a[i-1];
27         return ans;
28     }

```

```

29
30 //查询区间 [l,r)
31 T rangeSum(int l,int r) { return sum(r)-sum(l); }
32
33 int select(const T &k)
34 {
35     int x=0;
36     T cur{};
37     for (int i=1<<__lg(n);i;i>>=1)
38     {
39         if (x+i<=n&&cur+a[x+i-1]<=k)
40         {
41             x+=i;
42             cur=cur+a[x-1];
43         }
44     }
45     return x;
46 }
47 };

```

线段树

```

1  template <class Info,class Tag>
2  struct SGT
3  {
4      int n;
5      vector<Info> info;
6      vector<Tag> tag;
7
8      SGT():n(0) {}
9      SGT(int n_,Info v_=Info()) { init(n_,v_); }
10
11     template <class T>
12     SGT(vector<T> init_) { init(init_); }
13
14     void init(int n_,Info v_=Info()) { init(vector(n_,v_)); }
15
16     template <class T>
17     void init(vector<T> init_)
18     {
19         n=init_.size();
20         info.assign(4<<__lg(n),Info());
21         tag.assign(4<<__lg(n),Tag());
22         function<void(int,int,int)> build=[&](int p,int l,int r)
23         {
24             if (r-l==1)
25             {
26                 info[p]=init_[l];
27                 return;
28             }
29             int m=(l+r)>>1;
30             build(p<<1,l,m);
31             build(p<<1|1,m,r);
32             pushup(p);
33         };
34         build(1,0,n);
35     }
36
37     void pushup(int p) { info[p]=info[p<<1]+info[p<<1|1]; }
38
39     void apply(int p,const Tag &v)
40     {
41         info[p].apply(v);
42         tag[p].apply(v);
43     }
44
45     void pushdown(int p)
46     {
47         apply(p<<1,tag[p]);
48         apply(p<<1|1,tag[p]);
49         tag[p]=Tag();

```

```

50     }
51
52 void modify(int p,int l,int r,int x,const Info &v)
53 {
54     if (r-l==1)
55     {
56         info[p]=v;
57         return;
58     }
59     int m=(l+r)>>1;
60     pushdown(p);
61     if (x<m) modify(p<<1,l,m,x,v);
62     else modify(p<<1|1,m,r,x,v);
63     pushup(p);
64 }
65
66 //O(log n) 单点修改
67 void modify(int p,const Info &v) { modify(1,0,n,p,v); }
68
69 Info rangeQuery(int p,int l,int r,int x,int y)
70 {
71     if (l>=y||r<=x) return Info();
72     if (l>=x&&r<=y) return info[p];
73     int m=(l+r)>>1;
74     pushdown(p);
75     return rangeQuery(p<<1,l,m,x,y)+rangeQuery(p<<1|1,m,r,x,y);
76 }
77
78 //O(log n) 区间查询 [l,r)
79 Info rangeQuery(int l,int r) { rangeQuery(1,0,n,l,r); }
80
81 void rangeApply(int p,int l,int r,int x,int y,const Tag &v)
82 {
83     if (l>=y||r<=x) return;
84     if (l>=x&&r<=y)
85     {
86         apply(p,v);
87         return;
88     }
89     int m=(l+r)>>1;
90     pushdown(p);
91     rangeApply(p<<1,l,m,x,y,v);
92     rangeApply(p<<1|1,m,r,x,y,v);
93     pushup(p);
94 }
95
96 //O(log n) 区间操作 [l,r)
97 void rangeApply(int l,int r,const Tag &v) { rangeApply(1,0,n,l,r,v); }
98
99 //O(log n) 区间 [l,r) 内查找第一个合法位置
100 template <class F>
101 int findFirst(int p,int l,int r,int x,int y,F pred)
102 {
103     if (l>=y||r<=x||!pred(info[p])) return -1;
104     if (r-l==1) return l;
105     int m=(l+r)>>1;
106     pushdown(p);
107     int res=findFirst(p<<1,l,m,x,y,pred);
108     if (res==-1) res=findFirst(p<<1|1,m,r,x,y,pred);
109     return res;
110 }
111
112 template <class F>
113 int findFirst(int l,int r,F pred) { return findFirst(1,0,n,l,r,pred); }
114
115 template <class F>
116 int findLast(int p,int l,int r,int x,int y,F pred)
117 {
118     if (l>=y||r<=x||!pred(info[p])) return -1;
119     if (r-l==1) return l;
120     int m=(l+r)>>1;

```

```

121     pushdown(p);
122     int res=findLast(p<<1|1,m,r,x,y,pred);
123     if (res==-1) res=findLast(p<<1,l,m,x,y,pred);
124     return res;
125 }
126
127 template <class F>
128 int findLast(int l,int r,F pred) { return findLast(1,0,n,l,r,pred); }
129 };
130
131 //这里默认乘法优先 (x*a+b)*c+d=x*(a*c)+(b*c+d)
132 struct Tag
133 {
134     i64 a=1,b=0;
135     void apply(Tag t)
136     {
137         a*=t.a;
138         b=b*t.a+t.b;
139     }
140 };
141
142 struct Info
143 {
144     i64 x=0,l=0,r=0;
145     void apply(Tag t)
146     {
147         int len=r-l+1;
148         x=x*t.a+len*t.b;
149     }
150 };
151
152 Info operator + (Info a,Info b)
153 {
154     return {a.x+b.x,min(a.l,b.l),max(a.r,b.r)};
155 }

```

可并堆 (pb_ds)

成员函数

- push(): 向堆中压入一个元素, 返回该元素位置的迭代器。
- pop(): 将堆顶元素弹出。
- top(): 返回堆顶元素。
- size() 返回元素个数。
- empty() 返回是否非空。
- modify(point_iterator, const key): 把迭代器位置的 key 修改为传入的 key, 并对底层储存结构进行排序。
- erase(point_iterator): 把迭代器位置的键值从堆中擦除。
- join(__gnu_pbds::priority_queue &other): 把 other 合并到 *this 并把 other 清空。

示例

```

1  #include <algorithm>
2  #include <cstdio>
3  #include <ext/pb_ds/priority_queue.hpp>
4  #include <iostream>
5  using namespace __gnu_pbds;
6  // 由于面向 OIer, 本文以常用堆 : pairing_heap_tag 作为范例
7  // 为了更好的阅读体验, 定义宏如下 :
8  using pair_heap = __gnu_pbds::priority_queue<int>;
9  pair_heap q1; // 大根堆, 配对堆
10 pair_heap q2;
11 pair_heap::point_iterator id; // 一个迭代器
12
13 int main() {
14     id = q1.push(1);
15     // 堆中元素 : [1];
16     for (int i = 2; i <= 5; i++) q1.push(i);
17     // 堆中元素 : [1, 2, 3, 4, 5];

```



```

18     std::cout << q1.top() << std::endl;
19     // 输出结果 : 5;
20     q1.pop();
21     // 堆中元素 : [1, 2, 3, 4];
22     id = q1.push(10);
23     // 堆中元素 : [1, 2, 3, 4, 10];
24     q1.modify(id, 1);
25     // 堆中元素 : [1, 1, 2, 3, 4];
26     std::cout << q1.top() << std::endl;
27     // 输出结果 : 4;
28     q1.pop();
29     // 堆中元素 : [1, 1, 2, 3];
30     id = q1.push(7);
31     // 堆中元素 : [1, 1, 2, 3, 7];
32     q1.erase(id);
33     // 堆中元素 : [1, 1, 2, 3];
34     q2.push(1), q2.push(3), q2.push(5);
35     // q1 中元素 : [1, 1, 2, 3], q2 中元素 : [1, 3, 5];
36     q2.join(q1);
37     // q1 中无元素, q2 中元素 : [1, 1, 1, 2, 3, 3, 5];
38 }

```

平衡树 (pb_ds)

成员函数

- insert(x): 向树中插入一个元素 x, 返回 std::pair<point_iterator, bool>。
- erase(x): 从树中删除一个元素/迭代器 x, 返回一个 bool 表明是否删除成功。
- order_of_key(x): 返回 x 以 Cmp_Fn 比较的排名。
- find_by_order(x): 返回 Cmp_Fn 比较的排名所对应元素的迭代器。
- lower_bound(x): 以 Cmp_Fn 比较做 lower_bound, 返回迭代器。
- upper_bound(x): 以 Cmp_Fn 比较做 upper_bound, 返回迭代器。
- join(x): 将 x 树并入当前树, 前提是两棵树的类型一样, x 树被删除。
- split(x,b): 以 Cmp_Fn 比较, 小于等于 x 的属于当前树, 其余的属于 b 树。
- empty(): 返回是否为空。
- size(): 返回大小。

注意 join(x) 函数需要保证并入树的键的值域与被并入树的键的值域 **不相交** (也就是说并入树内所有值必须全部大于/小于当前树内的所有值), 否则会抛出 join_error 异常。

如果要合并两棵值域有交集的树, 需要将一棵树的元素一一插入到另一棵树中。

示例

```

1  // Common Header Simple over C++11
2  #include <iostream>
3  using namespace std;
4  using ll = long long;
5  using ull = unsigned long long;
6  using ld = long double;
7  using pii = pair<int, int>;
8  #include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
9  #include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
10 __gnu_pbds::tree<pair<int, int>, __gnu_pbds::null_type, less<pair<int, int>>,
11                 __gnu_pbds::rb_tree_tag,
12                 __gnu_pbds::tree_order_statistics_node_update>
13     trr;
14
15 int main() {
16     int cnt = 0;
17     trr.insert(make_pair(1, cnt++));
18     trr.insert(make_pair(5, cnt++));
19     trr.insert(make_pair(4, cnt++));
20     trr.insert(make_pair(3, cnt++));
21     trr.insert(make_pair(2, cnt++));
22     // 树上元素 {{1,0},{2,4},{3,3},{4,2},{5,1}}
23     auto it = trr.lower_bound(make_pair(2, 0));
24     trr.erase(it);

```

```

25 // 树上元素 {{1,0},{3,3},{4,2},{5,1}}
26 auto it2 = trr.find_by_order(1);
27 cout << (*it2).first << endl;
28 // 输出排名 0 1 2 3 中的排名 1 的元素的 first:1
29 int pos = trr.order_of_key(*it2);
30 cout << pos << endl;
31 // 输出排名
32 decltype(trr) newtr;
33 trr.split(it2, newtr);
34 for (auto i = newtr.begin(); i != newtr.end(); ++i) {
35     cout << (*i).first << ' ';
36 }
37 cout << endl;
38 // {4,2},{5,1} 被放入新树
39 trr.join(newtr);
40 for (auto i = trr.begin(); i != trr.end(); ++i) {
41     cout << (*i).first << ' ';
42 }
43 cout << endl;
44 cout << newtr.size() << endl;
45 // 将 newtr 树并入 trr 树, newtr 树被删除。
46 return 0;
47 }

```

哈希表 (pb_ds)

当 map 用即可。

```

1 #include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
2 #include <ext/pb_ds/hash_policy.hpp>
3 using u64=unsigned long long;
4
5 mt19937_64 rnd(chrono::steady_clock::now().time_since_epoch().count());
6 struct Hsh
7 {
8     u64 operator ()(u64 x) const
9     {
10         static const u64 s1=rnd(),s2=rnd(),s3=rnd();
11         x+=s1;
12         x=(x^(x>>33))*s2;
13         x=(x^(x>>30))*s3;
14         return x;
15     }
16 };
17
18 __gnu_pbds::gp_hash_table<u64,u64,Hsh> mp;

```

字符串

字符串哈希 (随机模数)

允许 k 次失配的字符串匹配

枚举原串起点，二分出第一个失配位置，直到找不到失配位置或失配次数超过 k ，时间复杂度 $\mathcal{O}(m + kn \log m)$ 。

最长公共子串

二分答案，把对应长度串的哈希值丢进 map/unordered_map 里判就好，时间复杂度 $\mathcal{O}(m + n \log^2 n)$ 。

Code

```

1 bool isPrime(int n)
2 {
3     if (n<=1) return 0;
4     for (int i=2;i*i<=n;i++)
5         if (n%i==0) return 0;
6     return 1;
7 }

```

```

8
9  int findPrime(int n)
10 {
11     while (!isPrime(n)) n++;
12     return n;
13 }
14
15 mt19937 rng(time(0));
16 const int P=findPrime(rng()%9000000000+1000000000);
17 struct StrHash
18 {
19     int n;
20     vector<int> h,p;
21
22     StrHash(const string &s){ init(s); }
23
24     void init(const string &s)
25     {
26         n=s.size();
27         h.resize(n+1);
28         p.resize(n+1);
29         p[0]=1;
30         for (int i=0;i<n;i++) h[i+1]=(10ll*h[i]+s[i]-'a'+1)%P;
31         for (int i=0;i<n;i++) p[i+1]=10ll*p[i]%P;
32     }
33
34     //查询 [l,r) 的区间哈希
35     int get(int l,int r) { return (h[r]+1ll*(P-h[l])*p[r-l])%P; }
36 };

```

KMP

字符串周期

最小正周期是 $n - \text{pre.back}()$ ，反复跳 pre 可以得到串的所有周期。

统计前缀出现次数

```

1  vector<int> ans(n+1);
2  for (int i=0;i<n;i++) ans[pre[i]]++;
3  for (int i=n-1;i>0;i--) ans[pre[i-1]] += ans[i];
4  for (int i=0;i<n;i++) ans[i]++;

```

求满足一些要求的 Border

比如有出现次数要求、两个前缀的最长公共 Border 什么的。

根据 pre 指针建出 Border 树，用类似 SAM 的 parent 树的处理方法就好。

Code

```

1  vector<int> KMP(const string &s)
2  {
3      int now=0;
4      vector<int> pre(s.size(),0);
5      for (int i=1;i<s.size();i++)
6      {
7          while (now&& s[i]!=s[now]) now=pre[now-1];
8          if (s[i]==s[now]) now++;
9          pre[i]=now;
10     }
11     return pre;
12 }

```

Z 函数

```

1  vector<int> zFunction(string s)
2  {

```

```

3     int n=s.size();
4     vector<int> z(n);
5     z[0]=n;
6     for (int i=1,j=1;i<n;i++)
7     {
8         z[i]=max(0,min(j+z[j]-i,z[i-j]));
9         while (i+z[i]<n&& s[z[i]]==s[i+z[i]]) z[i]++;
10        if (i+z[i]>j+z[j]) j=i;
11    }
12    return z;
13 }

```

AC 自动机

每个节点代表一个前缀，指针指向最大 Border。

```

1  struct ACAM
2  {
3      static constexpr int ALPHABET=26;
4      struct Node
5      {
6          int len;
7          int link;
8          array<int,ALPHABET> next;
9          Node():len{0},link{0},next{}{}
10     };
11
12     vector<Node> t;
13
14     ACAM() { init(); }
15
16     void init()
17     {
18         t.assign(2,Node());
19         t[0].next.fill(1);
20         t[0].len=-1;
21     }
22
23     int newNode()
24     {
25         t.emplace_back();
26         return t.size()-1;
27     }
28
29     int add(const string &a)
30     {
31         int p=1;
32         for (auto c:a)
33         {
34             int x=c-'a';
35             if (t[p].next[x]==0)
36             {
37                 t[p].next[x]=newNode();
38                 t[t[p].next[x]].len=t[p].len+1;
39             }
40             p=t[p].next[x];
41         }
42         return p;
43     }
44
45     void work()
46     {
47         queue<int> q;
48         q.push(1);
49         while (!q.empty())
50         {
51             int x=q.front();
52             q.pop();
53             for (int i=0;i<ALPHABET;i++)
54             {
55                 if (t[x].next[i]==0) t[x].next[i]=t[t[x].link].next[i];

```

```

56         else
57         {
58             t[t[x].next[i]].link=t[t[x].link].next[i];
59             q.push(t[x].next[i]);
60         }
61     }
62 }
63 }
64
65 int next(int p,int x) { return t[p].next[x]; }
66
67 int link(int p) { return t[p].link; }
68
69 int size() { return t.size(); }
70 };

```

后缀数组

```

1  struct SA
2  {
3      int n;
4      vector<int> sa,rk,lc;
5      SA(const string &s)
6      {
7          n=s.length();
8          sa.resize(n);
9          rk.resize(n);
10         lc.resize(n-1);
11         iota(sa.begin(),sa.end(),0);
12         sort(sa.begin(),sa.end(),[&](int a,int b){ return s[a]<s[b]; });
13         rk[sa[0]]=0;
14         for (int i=1;i<n;i++) rk[sa[i]]=rk[sa[i-1]]+(s[sa[i]]!=s[sa[i-1]]);
15         int k=1;
16         vector<int> tmp,cnt(n);
17         tmp.reserve(n);
18         while (rk[sa[n-1]]<n-1)
19         {
20             tmp.clear();
21             for (int i=0;i<k;i++) tmp.push_back(n-k+i);
22             for (auto i:sa)
23                 if (i>=k) tmp.push_back(i-k);
24             fill(cnt.begin(),cnt.end(),0);
25             for (int i=0;i<n;i++) cnt[rk[i]]++;
26             for (int i=1;i<n;i++) cnt[i]+=cnt[i-1];
27             for (int i=n-1;i>=0;i--) sa[--cnt[rk[tmp[i]]]]=tmp[i];
28             swap(rk,tmp);
29             rk[sa[0]]=0;
30             for (int i=1;i<n;i++)
31                 rk[sa[i]]=rk[sa[i-1]]+(tmp[sa[i-1]]<tmp[sa[i]] || sa[i-1]+k==n || tmp[sa[i-1]+k]<tmp[sa[i]+k]);
32             k<=<=1;
33         }
34         for (int i=0,j=0;i<n;i++)
35         {
36             if (rk[i]==0) j=0;
37             else
38             {
39                 for (j=j>0;i+j<n&&sa[rk[i]-1]+j<n&&s[i+j]==s[sa[rk[i]-1]+j]); j++;
40                 lc[rk[i]-1]=j;
41             }
42         }
43     }
44 };

```

(广义) 后缀自动机

每个节点代表的是一个 endpos 集合，指针指向最小超集。

不同子串个数

考虑节点 i 代表的子串数是 $\text{len}(i) - \text{len}(\text{link}(i))$ ，求和即可。

字典序第 k 大子串

等价自动机上第 k 大路径，预处理每个状态后续路径数后 `dfs` 即可。

最小循环移位

对 $S + S$ 建自动机，字典序最小的 $|S|$ 长路径就是答案。

出现次数

每次插入字符后对终点做个标记，答案就是查询串在自动机上对应节点在 `parent` 树上的子树内标记和。

首次出现位置

维护每个节点对应首次出现位置 `firstpos`。

具体来说，插入点时 $\text{firstpos}(\text{cur}) = \text{len}(\text{cur}) + 1$ ，克隆点时 $\text{firstpos}(\text{clone}) = \text{firstpos}(q)$ 。

答案即为 $\text{firstpos}(t) - |T| + 1$ 。

所有出现位置

每次插入字符后对终点做个标记，查询时遍历 `parent` 树上的子树内标记并输出。

最短未出现字符串

自动机上 `dp` 即可，如果没有转移 `dp` 值就是 1，否则是各转移最小 `dp` 值加一，答案是根的 `dp` 值。

最长公共子串

把串都丢到自动机里，每次记录节点被哪些串占用，被所有串占用节点中 `len` 最大的就是答案。

Code

```
1 struct SAM
2 {
3     static constexpr int ALPHABET=26;
4     struct Node
5     {
6         int len;
7         int link;
8         array<int,ALPHABET> next;
9         Node():len{},link{},next{} {}
10    };
11
12    vector<Node> t;
13
14    SAM() { init(); }
15
16    void init()
17    {
18        t.assign(2,Node());
19        t[0].next.fill(1);
20        t[0].len=-1;
21    }
22
23    int newNode()
24    {
25        t.emplace_back();
26        return t.size()-1;
27    }
28
```

```

29 int extend(int lst,int c)
30 {
31     if (t[lst].next[c]&&t[t[lst].next[c]].len==t[lst].len+1)
32         return t[lst].next[c];
33     int p=lst,np=newNode(),flag=0;
34     t[np].len=t[p].len+1;
35     while (!t[p].next[c])
36     {
37         t[p].next[c]=np;
38         p=t[p].link;
39     }
40     if (!p)
41     {
42         t[np].link=1;
43         return np;
44     }
45     int q=t[p].next[c];
46     if (t[q].len==t[p].len+1)
47     {
48         t[np].link=q;
49         return np;
50     }
51     if (p==lst) flag=1,np=0,t.pop_back();
52     int nq=newNode();
53     t[nq].link=t[q].link;
54     t[nq].next=t[q].next;
55     t[nq].len=t[p].len+1;
56     t[q].link=t[np].link=nq;
57     while (p&&t[p].next[c]==q)
58     {
59         t[p].next[c]=nq;
60         p=t[p].link;
61     }
62     return flag?nq:np;
63 }
64
65 int add(const string &a)
66 {
67     int p=1;
68     for (auto c:a) p=extend(p,c-'a');
69     return p;
70 }
71
72 int next(int p,int x) { return t[p].next[x]; }
73
74 int link(int p) { return t[p].link; }
75
76 int len(int p) { return t[p].len; }
77
78 int size() { return t.size(); }
79 };

```

Manacher

```

1 vector<int> manacher(vector<int> s)
2 {
3     vector<int> t{0};
4     for (auto c:s)
5     {
6         t.push_back(c);
7         t.push_back(0);
8     }
9     int n=t.size();
10    vector<int> r(n);
11    for (int i=0,j=0;i<n;i++)
12    {
13        if (j*2-i>=0&&j+r[j]>i) r[i]=min(r[j*2-i],j+r[j]-i);
14        while (i-r[i]>=0&&i+r[i]<n&&t[i-r[i]]==t[i+r[i]]) r[i]++;
15        if (i+r[i]>j+r[j]) j=i;
16    }
17    return r;

```

18 }

回文自动机

每个节点代表的是一个回文子串，指针指向最长回文后缀。

本质不同回文子串数

即自动机点数，记得减去奇偶根。

回文子串出现次数

即 fail 树子树内终点标记和。

Code

```
1 struct PAM
2 {
3     static constexpr int ALPHABET_SIZE=28;
4     struct Node
5     {
6         int len,link,cnt;
7         array<int,ALPHABET_SIZE> next;
8         Node():len{},link{},cnt{},next{}{}
9     };
10    vector<Node> t;
11    int suff;
12    string s;
13
14    PAM() { init(); }
15
16    void init()
17    {
18        t.assign(2,Node());
19        t[0].len=-1;
20        suff=1;
21        s.clear();
22    }
23
24    int newNode()
25    {
26        t.emplace_back();
27        return t.size()-1;
28    }
29
30    bool add(char c,char offset='a')
31    {
32        int pos=s.size();
33        s+=c;
34        int let=c-offset;
35        int cur=suff,curlen=0;
36        while (1)
37        {
38            curlen=t[cur].len;
39            if (pos-curlen-1>=0&&s[pos-curlen-1]==s[pos]) break;
40            cur=t[cur].link;
41        }
42        if (t[cur].next[let])
43        {
44            suff=t[cur].next[let];
45            return 0;
46        }
47        int num=newNode();
48        suff=num;
49        t[num].len=t[cur].len+2;
50        t[cur].next[let]=num;
51        if (t[num].len==1)
52        {
53            t[num].link=t[num].cnt=1;
```



```

54         return 1;
55     }
56     while (1)
57     {
58         cur=t[cur].link;
59         curlen=t[cur].len;
60         if (pos-curlen-1>=0&&s[pos-curlen-1]==s[pos])
61         {
62             t[num].link=t[cur].next[let];
63             break;
64         }
65     }
66     t[num].cnt=t[t[num].link].cnt+1;
67     return 1;
68 }
69 };

```

含通配符字符串匹配

返回匹配的位置集合。

```

1  vector<int> match(string &s,string &t)
2  {
3      static mt19937 rng(chrono::steady_clock::now().time_since_epoch().count());
4      static array<Z,256> c;
5      static bool initd=0;
6      if (!initd)
7      {
8          initd=1;
9          for (Z &x:c) x=rng();
10         c['*']=0;//wildcard
11     }
12     int n=s.size(),m=t.size();
13     if (n<m) return {};
14     vector<int> res;
15     Poly f(n),ff(n),fff(n),g(m),gg(m),ggg(m);
16     for (int i=0;i<n;i++)
17     {
18         f[i]=c[s[i]];
19         ff[i]=f[i]*f[i];
20         fff[i]=ff[i]*f[i];
21     }
22     for (int i=0;i<m;i++)
23     {
24         g[i]=c[t[m-i-1]];
25         gg[i]=g[i]*g[i];
26         ggg[i]=gg[i]*g[i];
27     }
28     Poly fffg=fff*g,ffgg=ff*gg,fggg=f*ggg;
29     for (int i=0;i<=n-m;i++)
30         if ((fffg[m-1+i]+fggg[m-1+i]-ffgg[m-1+i]*2)==0)
31             res.push_back(i);
32     return res;
33 }
34 /*
35 a**b***c*****
36 bcd
37
38 match(s,t)=[ 1, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, ]
39 */

```

图论

拓扑排序

```

1  vector<int> topo(vector<vector<int>> &adj)
2  {
3      int n=adj.size();
4      vector<int> res,in(n);

```

```

5     queue<int> q;
6     for (int u=0;u<n;u++)
7         for (int v:adj[u])
8             in[v]++;
9     for (int u=0;u<n;u++)
10        if (!in[u])
11            q.push(u);
12    while (!q.empty())
13    {
14        int u=q.front();
15        q.pop();
16        res.push_back(u);
17        for (int v:adj[u])
18        {
19            in[v]--;
20            if (!in[v]) q.push(v);
21        }
22    }
23    return res;
24 }

```

树的直径

```

1 int diameter(vector<vector<int>> &adj)
2 {
3     int n=adj.size(),d=0;
4     vector<int> dp(n);
5
6     auto dfs=[&](auto &self,int u,int f)->void
7     {
8         for (int v:adj[u])
9         {
10             if (v==f) continue;
11             self(self,v,u);
12             d=max(d,dp[u]+dp[v]+1); //w(u,v)=1
13             dp[u]=max(dp[u],dp[v]+1); //w(u,v)=1
14         }
15     };
16
17     dfs(dfs,0,0);
18     return d;
19 }

```

树的重心

```

1 vector<int> centroid(vector<vector<int>> &adj,int rt)
2 {
3     int n=adj.size();
4     vector<int> siz(n),res(n),w(n),fa(n);
5
6     auto dfs=[&](auto &self,int u,int f)->void
7     {
8         siz[u]=1,res[u]=u,fa[u]=f;
9         for (int v:adj[u])
10        {
11            if (v==f) continue;
12            self(self,v,u);
13            siz[u]+=siz[v];
14            w[u]=max(w[u],siz[v]);
15        }
16        for (int v:adj[u])
17        {
18            if (v==f) continue;
19            int p=res[v];
20            while (p!=u)
21            {
22                if (max(w[p],siz[u]-siz[p])<=siz[u]/2)
23                {
24                    res[u]=p;
25                    break;
26                }
27            }
28        }
29    };
30     dfs(dfs,rt,0);
31     return res;
32 }

```

```

26         }
27         else p=fa[p];
28     }
29 }
30 };
31
32 dfs(dfs,rt,rt);
33 return res;
34 }

```

Dijkstra

注意设定合适的 inf。

```

1 vector<i64> dijk(const vector<vector<pair<int,i64>>> &adj,int s)
2 {
3     int n=adj.size();
4     using pa=pair<i64,int>;
5     vector<i64> d(n,inf);
6     vector<int> ed(n);
7     priority_queue<pa,vector<pa>,greater<pa>> q;
8     q.push({0,s}); d[s]=0;
9     while (!q.empty())
10     {
11         int u=q.top().second;
12         q.pop();
13         ed[u]=1;
14         for (auto [v,w]:adj[u])
15             if (d[u]+w<d[v])
16             {
17                 d[v]=d[u]+w;
18                 q.push({d[v],v});
19             }
20         while (!q.empty()&&ed[q.top().second]) q.pop();
21     }
22     return d;
23 }

```

SPFA

注意设定合适的 inf。

```

1 vector<i64> spfa(const vector<vector<pair<int,i64>>> &adj,int s)
2 {
3     int n=adj.size();
4     assert(n);
5     queue<int> q;
6     vector<int> len(n),ed(n);
7     vector<i64> d(n,inf);
8     q.push(s); d[s]=0;
9     while (!q.empty())
10     {
11         int u=q.front();
12         q.pop();
13         ed[u]=0;
14         for (auto [v,w]:adj[u])
15             if (d[u]+w<d[v])
16             {
17                 d[v]=d[u]+w;
18                 len[v]=len[u]+1;
19                 if (len[v]>n) return {};
20                 if (!ed[v]) ed[v]=1,q.push(v);
21             }
22     }
23     return d;
24 }

```

Johnson

```
1 vector<vector<i64>> dijk(const vector<vector<pair<int,i64>>> &adj)
2 {
3     vector<vector<i64>> res;
4     for (int i=0;i<adj.size();i++)
5         res.push_back(dijk(adj,i));
6     return res;
7 }
8
9 vector<i64> spfa(const vector<vector<pair<int,i64>>> &adj)
10 {
11     int n=adj.size();
12     assert(n);
13     queue<int> q;
14     vector<int> len(n),ed(n,1);
15     vector<i64> d(n);
16     for (int i=0;i<n;i++) q.push(i);
17     while (!q.empty())
18     {
19         int u=q.front();
20         q.pop();
21         ed[u]=0;
22         for (auto [v,w]:adj[u])
23             if (d[u]+w<d[v])
24             {
25                 d[v]=d[u]+w;
26                 len[v]=len[u]+1;
27                 if (len[v]>n) return {};
28                 if (!ed[v]) ed[v]=1,q.push(v);
29             }
30     }
31     return d;
32 }
33
34 vector<vector<i64>> john(vector<vector<pair<int,i64>>> adj)
35 {
36     int n=adj.size();
37     assert(n);
38     auto h=spfa(adj);
39     if (!h.size()) return {};
40     for (int u=0;u<n;u++)
41         for (auto &[v,w]:adj[u])
42             w+=h[u]-h[v];
43     auto res=dijk(adj);
44     for (int u=0;u<n;u++)
45         for (int v=0;v<n;v++)
46             if (res[u][v]!=inf)
47                 res[u][v]-=h[u]-h[v];
48     return res;
49 }
```

强连通分量

```
1 struct SCC
2 {
3     int n,cur,cnt;
4     vector<vector<int>> adj;
5     vector<int> stk,dfn,low,bel;
6
7     SCC() {}
8     SCC(int n) { init(n); }
9
10    void init(int n)
11    {
12        this->n=n;
13        adj.assign(n,{});
14        stk.clear();
15        dfn.assign(n,-1);
16        low.resize(n);
17        bel.assign(n,-1);
18    }
```

```

18     cur=cnt=0;
19 }
20
21 void add(int u,int v) { adj[u].push_back(v); }
22
23 void dfs(int x)
24 {
25     dfn[x]=low[x]=cur++;
26     stk.push_back(x);
27     for (auto y:adj[x])
28     {
29         if (dfn[y]==-1)
30         {
31             dfs(y);
32             low[x]=min(low[x],low[y]);
33         }
34         else if (bel[y]==-1) low[x]=min(low[x],dfn[y]);
35     }
36     if (dfn[x]==low[x])
37     {
38         int y;
39         do
40         {
41             y=stk.back();
42             bel[y]=cnt;
43             stk.pop_back();
44         } while (y!=x);
45         cnt++;
46     }
47 }
48
49 vector<int> work()
50 {
51     for (int i=0;i<n;i++)
52         if (dfn[i]==-1) dfs(i);
53     return bel;
54 }
55
56 struct Graph
57 {
58     int n;
59     vector<pair<int,int>> edges;
60     vector<int> siz,cnt;
61 };
62
63 Graph compress()
64 {
65     Graph G;
66     G.n=cnt;
67     G.siz.resize(cnt);
68     G.cnt.resize(cnt);
69     for (int i=0;i<n;i++)
70     {
71         G.siz[bel[i]]++;
72         for (auto j:adj[i])
73             if (bel[i]!=bel[j])
74                 G.edges.emplace_back(bel[j],bel[i]);
75     }
76     return G;
77 };
78 };

```

边双连通分量

```

1 struct EBCC
2 {
3     int n;
4     vector<vector<int>> adj;
5     vector<int> stk,dfn,low,bel;
6     int cur,cnt;
7

```

```

8     EBCC() {}
9     EBCC(int n) { init(n); }
10
11     void init(int n)
12     {
13         this->n=n;
14         adj.assign(n,{});
15         dfn.assign(n,-1);
16         low.resize(n);
17         bel.assign(n,-1);
18         stk.clear();
19         cur=cnt=0;
20     }
21
22     void add(int u,int v)
23     {
24         adj[u].push_back(v);
25         adj[v].push_back(u);
26     }
27
28     void dfs(int x,int p)
29     {
30         dfn[x]=low[x]=cur++;
31         stk.push_back(x);
32         for (auto y:adj[x])
33         {
34             if (y==p) continue;
35             if (dfn[y]==-1)
36             {
37                 dfs(y,x);
38                 low[x]=min(low[x],low[y]);
39             }
40             else if (bel[y]==-1&&dfn[y]<dfn[x]) low[x]=min(low[x],dfn[y]);
41         }
42         if (dfn[x]==low[x])
43         {
44             int y;
45             do
46             {
47                 y=stk.back();
48                 bel[y]=cnt;
49                 stk.pop_back();
50             } while (y!=x);
51             cnt++;
52         }
53     }
54
55     vector<int> work()
56     {
57         dfs(0,-1);
58         return bel;
59     }
60
61     struct Graph
62     {
63         int n;
64         vector<pair<int,int>> edges;
65         vector<int> siz,cnte;
66     };
67
68     Graph compress()
69     {
70         Graph G;
71         G.n=cnt;
72         G.siz.resize(cnt);
73         G.cnte.resize(cnt);
74         for (int i=0;i<n;i++)
75         {
76             G.siz[bel[i]]++;
77             for (auto j:adj[i])
78             {

```

```

79         if (bel[i]<bel[j]) G.edges.emplace_back(bel[i],bel[j]);
80         else if (i<j) G.cnte[bel[i]]++;
81     }
82 }
83 return G;
84 };
85 };

```

轻重链剖分

```

1  struct HLD
2  {
3      int n;
4      vector<int> siz,top,dep,pa,in,out,seq;
5      vector<vector<int>> adj;
6      int cur;
7
8      HLD(){}
9      HLD(int n) { init(n); }
10
11     void init(int n)
12     {
13         this->n=n;
14         siz.resize(n);
15         top.resize(n);
16         dep.resize(n);
17         pa.resize(n);
18         in.resize(n);
19         out.resize(n);
20         seq.resize(n);
21         cur=0;
22         adj.assign(n,{});
23     }
24
25     void addEdge(int u,int v)
26     {
27         adj[u].push_back(v);
28         adj[v].push_back(u);
29     }
30
31     void work(int rt=0)
32     {
33         top[rt]=rt;
34         dep[rt]=0;
35         pa[rt]=-1;
36         dfs1(rt);
37         dfs2(rt);
38     }
39
40     void dfs1(int u)
41     {
42         if (pa[u]!=-1) adj[u].erase(find(adj[u].begin(),adj[u].end(),pa[u]));
43         siz[u]=1;
44         for (auto &v:adj[u])
45         {
46             pa[v]=u;
47             dep[v]=dep[u]+1;
48             dfs1(v);
49             siz[u]+=siz[v];
50             if (siz[v]>siz[adj[u][0]])
51                 swap(v,adj[u][0]);
52         }
53     }
54
55     void dfs2(int u)
56     {
57         in[u]=cur++;
58         seq[in[u]]=u;
59         for (auto v:adj[u])
60         {
61             top[v]=(v==adj[u][0])?top[u]:v;

```

```

62         dfs2(v);
63     }
64     out[u]=cur;
65 }
66
67 int lca(int u,int v)
68 {
69     while (top[u]!=top[v])
70     {
71         if (dep[top[u]]>dep[top[v]]) u=pa[top[u]];
72         else v=pa[top[v]];
73     }
74     return dep[u]<dep[v]?u:v;
75 }
76
77 int dist(int u,int v) { return dep[u]+dep[v]-(dep[lca(u,v)]<<1); }
78
79 int jump(int u,int k)
80 {
81     if (dep[u]<k) return -1;
82     int d=dep[u]-k;
83     while (dep[top[u]]>d) u=pa[top[u]];
84     return seq[in[u]-dep[u]+d];
85 }
86
87 bool isAncestor(int u,int v) { return in[u]<=in[v]&&in[v]<out[u]; }
88
89 int rootedParent(int u,int v)//u->root,v->point
90 {
91     if (u==v) return u;
92     if (!isAncestor(v,u)) return pa[v];
93     auto it=upper_bound(adj[v].begin(),adj[v].end(),u,[&](int x,int y){ return in[x]<in[y]; })-1;
94     return *it;
95 }
96
97 int rootedSize(int u,int v)//same as rootedParent
98 {
99     if (u==v) return n;
100    if (!isAncestor(v,u)) return siz[v];
101    return n-siz[rootedParent(u,v)];
102 }
103
104 int rootedLca(int a,int b,int c) { return lca(a,b)^lca(b,c)^lca(c,a); }
105 };

```

虚树

```

1  struct VirtualTree
2  {
3      int n,rt;
4      HLD hld;
5      vector<int> a;
6      vector<bool> is;
7      vector<vector<int>> son;
8
9      VirtualTree(){}
10     VirtualTree(int n) { init(n); }
11
12     void init(int n)
13     {
14         this->n=n;
15         hld.init(n);
16         is.assign(n,0);
17         son.assign(n,{});
18     }
19
20     void addEdge(int u,int v)
21     {
22         hld.addEdge(u,v);
23     }
24

```



```

25 void work(int rt=0)
26 {
27     this->rt=rt;
28     hld.work(rt);
29 }
30
31 void solve(vector<int> &in)
32 {
33     auto cmp=[&](int x,int y)->bool
34     {
35         return hld.in[x]<hld.in[y];
36     };
37
38     for (int x:a)
39     {
40         is[x]=0;
41         son[x].clear();
42     }
43     a=in;
44     for (int x:a) is[x]=1;
45     a.push_back(rt);
46     sort(a.begin(),a.end(),cmp);
47
48     int k=a.size();
49     for (int i=1;i<k;i++)
50         a.push_back(hld.lca(a[i-1],a[i]));
51     sort(a.begin(),a.end(),cmp);
52     a.erase(unique(a.begin(),a.end()),a.end());
53     for (int i=1;i<a.size();i++)
54         son[hld.lca(a[i-1],a[i])].push_back(a[i]);
55 };
56
57 bool isKey(int u)
58 {
59     return is[u];
60 }
61
62 vector<int>& operator [] (int u)
63 {
64     return son[u];
65 }
66 };

```

欧拉路径

```

1 vector<int> euler(vector<vector<int>> adj)
2 {
3     int n=adj.size(),x=0;
4     vector<int> in(n),out(n);
5     for (int u=0;u<n;u++)
6         for (int v:adj[u])
7             out[u]++,in[v]++;
8     for (int i=0;i<n;i++)
9         if (in[i]!=out[i])
10            {
11                if (abs(in[i]-out[i])>1) return {};
12                x++;
13            }
14     if (x>2) return {};
15     for (int i=0;i<n;i++)
16         if (out[i]>in[i])
17            {
18                x=i;
19                break;
20            }
21     for (int i=0;i<n;i++)
22         sort(adj[i].begin(),adj[i].end(),greater<int>());
23
24     vector<int> res;
25     auto dfs=[&](auto &self,int u)->void
26     {

```

```

27     while (!adj[u].empty())
28     {
29         int v=adj[u].back();
30         adj[u].pop_back();
31         self(self,v);
32         res.push_back(v);
33     }
34 };
35
36 dfs(dfs,x);
37 res.push_back(x);
38 reverse(res.begin(),res.end());
39 return res;
40 }

```

2-SAT

```

1 struct TwoSat
2 {
3     int n;
4     vector<vector<int>> e;
5     vector<bool> ans;
6
7     TwoSat(int n):n(n),e(n<<1),ans(n){}
8
9     void addClause(int u,bool f,int v,bool g)
10    {
11        e[u*2+!f].push_back(v*2+g);
12        e[v*2+!g].push_back(u*2+f);
13    }
14
15    bool satisfiable()
16    {
17        vector<int> id(n*2,-1),dfn(n*2,-1),low(n*2,-1),stk;
18        int now=0,cnt=0;
19        function<void(int)> tarjan=[&](int u)
20        {
21            stk.push_back(u);
22            dfn[u]=low[u]=now++;
23            for (auto v:e[u])
24            {
25                if (dfn[v]==-1)
26                {
27                    tarjan(v);
28                    low[u]=min(low[u],low[v]);
29                }
30                else if (id[v]==-1)
31                    low[u]=min(low[u],dfn[v]);
32            }
33            if (dfn[u]==low[u])
34            {
35                int v;
36                do
37                {
38                    v=stk.back();
39                    stk.pop_back();
40                    id[v]=cnt;
41                } while (v!=u);
42                cnt++;
43            }
44        };
45        for (int i=0;i<n*2;i++)
46            if (dfn[i]==-1)
47                tarjan(i);
48        for (int i=0;i<n;i++)
49        {
50            if (id[i*2]==id[i*2+1]) return 0;
51            ans[i]=id[i*2]>id[i*2+1];
52        }
53        return 1;
54    }

```

```

55     vector<bool> answer() { return ans; }
56 };

```

最大流

```

1  template <class T>
2  struct MaxFlow
3  {
4      struct _Edge
5      {
6          int to;
7          T cap;
8          _Edge(int to,T cap):to(to),cap(cap){}
9      };
10
11     int n;
12     vector<_Edge> e;
13     vector<vector<int>> g;
14     vector<int> cur,h;
15
16     MaxFlow(){}
17     MaxFlow(int n) { init(n); }
18
19     void init(int n)
20     {
21         this->n=n;
22         e.clear();
23         g.assign(n,{});
24         cur.resize(n);
25         h.resize(n);
26     }
27
28     bool bfs(int s,int t)
29     {
30         h.assign(n,-1);
31         queue<int> que;
32         h[s]=0;
33         que.push(s);
34         while (!que.empty())
35         {
36             const int u=que.front();
37             que.pop();
38             for (int i:g[u])
39             {
40                 auto [v,c]=e[i];
41                 if (c>0&&h[v]==-1)
42                 {
43                     h[v]=h[u]+1;
44                     if (v==t) return 1;
45                     que.push(v);
46                 }
47             }
48         }
49         return 0;
50     }
51
52     T dfs(int u,int t,T f)
53     {
54         if (u==t) return f;
55         auto r=f;
56         for (int &i=cur[u];i<int(g[u].size());i++)
57         {
58             const int j=g[u][i];
59             auto [v,c]=e[j];
60             if (c>0&&h[v]==h[u]+1)
61             {
62                 auto a=dfs(v,t,min(r,c));
63                 e[j].cap-=a;
64                 e[j^1].cap+=a;
65                 r-=a;
66                 if (r==0) return f;

```

```

67         }
68     }
69     return f-r;
70 }
71
72 void addEdge(int u,int v,T c)
73 {
74     g[u].push_back(e.size());
75     e.emplace_back(v,c);
76     g[v].push_back(e.size());
77     e.emplace_back(u,0);
78 }
79
80 T flow(int s,int t)
81 {
82     T ans=0;
83     while (bfs(s,t))
84     {
85         cur.assign(n,0);
86         ans+=dfs(s,t,numeric_limits<T>::max());
87     }
88     return ans;
89 }
90
91 vector<bool> minCut()
92 {
93     vector<bool> c(n);
94     for (int i=0;i<n;i++) c[i]=(h[i]!=-1);
95     return c;
96 }
97
98 struct Edge
99 {
100     int from;
101     int to;
102     T cap;
103     T flow;
104 };
105
106 vector<Edge> edges()
107 {
108     vector<Edge> a;
109     for (int i=0;i<e.size();i+=2)
110     {
111         Edge x;
112         x.from=e[i+1].to;
113         x.to=e[i].to;
114         x.cap=e[i].cap+e[i+1].cap;
115         x.flow=e[i+1].cap;
116         a.push_back(x);
117     }
118     return a;
119 }
120 };

```

最小费用最大流

```

1  template <class T>
2  struct MinCostFlow
3  {
4      struct _Edge
5      {
6          int to;
7          T cap;
8          T cost;
9          _Edge(int to,T cap,T cost):to(to),cap(cap),cost(cost){}
10
11      };
12
13      int n;
14      vector<_Edge> e;

```

```

15 vector<vector<int>> g;
16 vector<T> h,dis;
17 vector<int> pre;
18
19 bool john(int s,int t)
20 {
21     dis.assign(n,numeric_limits<T>::max());
22     pre.assign(n,-1);
23     priority_queue<pair<T,int>,vector<pair<T,int>>,greater<pair<T,int>>> q;
24     dis[s]=0;
25     q.emplace(0,s);
26     while (!q.empty())
27     {
28         T d=q.top().first;
29         int u=q.top().second;
30         q.pop();
31         if (dis[u]!=d) continue;
32         for (int i:g[u])
33         {
34             int v=e[i].to;
35             T cap=e[i].cap;
36             T cost=e[i].cost;
37             if (cap>0&&dis[v]>d+h[u]-h[v]+cost)
38             {
39                 dis[v]=d+h[u]-h[v]+cost;
40                 pre[v]=i;
41                 q.emplace(dis[v],v);
42             }
43         }
44     }
45     return dis[t]!=numeric_limits<T>::max();
46 }
47
48 MinCostFlow(){}
49 MinCostFlow(int n) { init(n); }
50
51 void init(int n_)
52 {
53     n=n_;
54     e.clear();
55     g.assign(n,{});
56 }
57
58 void addEdge(int u,int v,T cap,T cost)
59 {
60     g[u].push_back(e.size());
61     e.emplace_back(v,cap,cost);
62     g[v].push_back(e.size());
63     e.emplace_back(u,0,-cost);
64 }
65
66 pair<T,T> flow(int s,int t)
67 {
68     T flow=0;
69     T cost=0;
70     h.assign(n,0);
71     while (john(s,t))
72     {
73         for (int i=0;i<n;i++) h[i]+=dis[i];
74         T aug=numeric_limits<int>::max();
75         for (int i=t;i!=s;i=e[pre[i]^1].to)
76             aug=min(aug,e[pre[i]].cap);
77         for (int i=t;i!=s;i=e[pre[i]^1].to)
78         {
79             e[pre[i]].cap-=aug;
80             e[pre[i]^1].cap+=aug;
81         }
82         flow+=aug;
83         cost+=aug*h[t];
84     }
85     return make_pair(flow,cost);

```

```

86     }
87
88     struct Edge
89     {
90         int from;
91         int to;
92         T cap;
93         T cost;
94         T flow;
95     };
96
97     vector<Edge> edges()
98     {
99         vector<Edge> a;
100         for (int i=0;i<e.size();i+=2)
101         {
102             Edge x;
103             x.from=e[i+1].to;
104             x.to=e[i].to;
105             x.cap=e[i].cap+e[i+1].cap;
106             x.cost=e[i].cost;
107             x.flow=e[i+1].cap;
108             a.push_back(x);
109         }
110         return a;
111     }
112 };

```

二分图最大权匹配 (KM)

时间复杂度为 $O(n^3)$ 。

```

1 //注意将负权边加上 inf, inf 不要设得过大
2 //xy 是左部点对应右部点
3 //yx 是右部点对应左部点
4 template <class T>
5 struct MaxAssignment
6 {
7     vector<T> lx,ly,s,cst;
8     vector<int> xy,yx,p,sx;
9     vector<bool> visx,visy;
10
11     T solve(int nx,int ny,vector<vector<T>> a)
12     {
13         assert(0<=nx&&nx<=ny);
14         assert(int(a.size())==nx);
15         for (int i=0;i<nx;i++)
16         {
17             assert(int(a[i].size())==ny);
18             for (auto x:a[i])
19                 assert(x>=0);
20         }
21         auto upd=[&](int x)->void
22         {
23             for (int y=0;y<ny;y++)
24             {
25                 if (lx[x]+ly[y]-a[x][y]<s[y])
26                 {
27                     s[y]=lx[x]+ly[y]-a[x][y];
28                     sx[y]=x;
29                 }
30             }
31             return;
32         };
33         cst.resize(nx+1);
34         cst[0]=0;
35         lx.assign(nx,numeric_limits<T>::max());
36         ly.assign(ny,0);
37         xy.assign(nx,-1);
38         yx.assign(ny,-1);
39         sx.resize(ny);

```

```

40     for (int cur=0;cur<nx;cur++)
41     {
42         queue<int> q;
43         visx.assign(nx,0);
44         visy.assign(ny,0);
45         s.assign(ny,numeric_limits<T>::max());
46         p.assign(nx,-1);
47         for (int x=0;x<nx;x++)
48         {
49             if (xy[x]==-1)
50             {
51                 q.push(x);
52                 visx[x]=1;
53                 upd(x);
54             }
55         }
56         int ex,ey;
57         bool fl=0;
58         while (!fl)
59         {
60             while (!q.empty()&&!fl)
61             {
62                 auto x=q.front();
63                 q.pop();
64                 for (int y=0;y<ny;y++)
65                 {
66                     if (a[x][y]==lx[x]+ly[y]&&!visy[y])
67                     {
68                         if (yx[y]==-1)
69                         {
70                             ex=x;
71                             ey=y;
72                             fl=1;
73                             break;
74                         }
75                         q.push(yx[y]);
76                         p[yx[y]]=x;
77                         visy[y]=visx[yx[y]]=1;
78                         upd(yx[y]);
79                     }
80                 }
81             }
82             if (fl) break;
83             T delta=numeric_limits<T>::max();
84             for (int y=0;y<ny;y++)
85                 if (!visy[y])
86                     delta=min(delta,s[y]);
87             for (int x=0;x<nx;x++)
88                 if (visx[x])
89                     lx[x]-=delta;
90             for (int y=0;y<ny;y++)
91             {
92                 if (visy[y])
93                     ly[y]+=delta;
94                 else
95                     s[y]-=delta;
96             }
97             for (int y=0;y<ny;y++)
98             {
99                 if (!visy[y]&&s[y]==0)
100                 {
101                     if (yx[y]==-1)
102                     {
103                         ex=sx[y];
104                         ey=y;
105                         fl=1;
106                         break;
107                     }
108                     q.push(yx[y]);
109                     p[yx[y]]=sx[y];
110                     visy[y]=visx[yx[y]]=1;

```

```

111         upd(yx[y]);
112     }
113 }
114 }
115 cst[cur+1]=cst[cur];
116 for (int x=ex,y=ey,ty;x!=-1;x=p[x],y=ty)
117 {
118     cst[cur+1]+=a[x][y];
119     if (xy[x]!=-1)
120         cst[cur+1]-=a[x][xy[x]];
121     ty=xy[x];
122     xy[x]=y;
123     yx[y]=x;
124 }
125 }
126 return cst[nx];
127 }
128
129 vector<int> assignment() { return xy; }
130
131 pair<vector<T>,vector<T>> labels()
132 { return make_pair(lx,ly); }
133
134 vector<T> weights() { return cst; }
135 };

```

三元环计数

时间复杂度为 $\mathcal{O}(m\sqrt{m})$ 。

```

1  i64 triple(vector<pair<int,int>> &edges)
2  {
3      int n=0;
4      for (auto [u,v]:edges) n=max({n,u,v});
5      n++;
6      vector<int> d(n),id(n),rk(n),cnt(n);
7      vector<vector<int>> adj(n);
8      for (auto [u,v]:edges) d[u]++,d[v]++;
9      iota(id.begin(),id.end(),0);
10     sort(id.begin(),id.end(),[&](int x,int y)
11     {
12         return d[x]<d[y];
13     });
14     for (int i=0;i<n;i++) rk[id[i]]=i;
15     for (auto [u,v]:edges)
16     {
17         if (rk[u]>rk[v]) swap(u,v);
18         adj[u].push_back(v);
19     }
20     i64 res=0;
21     for (int i=0;i<n;i++)
22     {
23         for (int u:adj[i]) cnt[u]=1;
24         for (int u:adj[i])
25             for (int v:adj[u])
26                 res+=cnt[v];
27         for (int u:adj[i]) cnt[u]=0;
28     }
29     return res;
30 };

```

树哈希

有根树返回各子树 hash 值，无根树返回一个至多长为 2 的 vector。

```

1  vector<int> tree_hash(vector<vector<int>> &adj,int rt)
2  {
3      int n=adj.size();
4      static map<vector<int>,i64> mp;
5      static int id=0;

```



```

6     vector<int> h(n);
7
8     auto dfs=[&](auto &self,int u,int f)->void
9     {
10         vector<int> c;
11         for (int v:adj[u])
12             if (v!=f)
13             {
14                 self(self,v,u);
15                 c.push_back(h[v]);
16             }
17         sort(c.begin(),c.end());
18         if (!mp.count(c)) mp[c]=id++;
19         h[u]=mp[c];
20     };
21
22     dfs(dfs,rt,rt);
23     return h;
24 }
25
26 vector<int> tree_hash(vector<vector<int>> &adj)
27 {
28     int n=adj.size();
29     if (n==0) return {};
30     vector<int> siz(n),mx(n);
31
32     auto dfs=[&](auto &self,int u)->void
33     {
34         siz[u]=1;
35         for (int v:adj[u])
36             if (!siz[v])
37             {
38                 self(self,v);
39                 siz[u]+=siz[v];
40                 mx[u]=max(mx[u],siz[v]);
41             }
42         mx[u]=max(mx[u],n-siz[u]);
43     };
44
45     dfs(dfs,0);
46     int m=*min_element(mx.begin(),mx.end());
47     vector<int> rt;
48     for (int i=0;i<n;i++)
49         if (mx[i]==m)
50             rt.push_back(i);
51     for (int &u:rt) u=tree_hash(adj,u)[u];
52     sort(rt.begin(),rt.end());
53     return rt;
54 }

```

矩阵树定理

记度矩阵为 D , 邻接矩阵为 A 。

对无向图情况: $L(G) = D(G) - A(G)$ 。

对有向图外向树情况: $L(G) = D^{in}(G) - A(G)$ 。

对有向图内向树情况: $L(G) = D^{out}(G) - A(G)$ 。

图 G 以 r 为根的生成树个数等于 $L(G)$ 舍去第 r 行第 r 列的 $n-1$ 阶主子式。

代码中 $t=0$ 是无向图情况, $t=1$ 是有向图根为 1 的外向树情况。

```

1 void R()
2 {
3     int n,m,t;
4     cin>>n>>m>>t;
5     vector<vector<Z>>> L(n-1,vector<Z>(n-1)),D(n,vector<Z>(n)),A(n,vector<Z>(n));
6     for (int i=1;i<=m;i++)
7     {

```

```

8         int u,v,w;
9         cin>>u>>v>>w;
10        if (u==v) continue;
11        u--,v--;
12        D[v][v]+=w;
13        A[u][v]+=w;
14        if (t==0)
15        {
16            D[u][u]+=w;
17            A[v][u]+=w;
18        }
19    }
20    for (int i=1;i<n;i++)
21        for (int j=1;j<n;j++)
22            L[i-1][j-1]=D[i][j]-A[i][j];
23    cout<<det(L);
24    return;
25 }

```

计算几何

EPS

```

1  const double eps=1e-8;
2  int sgn(double x)
3  {
4      if (fabs(x)<eps) return 0;
5      if (x>0) return 1;
6      return -1;
7  }

```

Point

```

1  template <class T>
2  struct Point
3  {
4      T x,y;
5      Point(T x_=0,T y_=0):x(x_),y(y_) {}
6
7      Point &operator += (Point p) &
8      {
9          x+=p.x;
10         y+=p.y;
11         return *this;
12     }
13
14     Point &operator -= (Point p) &
15     {
16         x-=p.x;
17         y-=p.y;
18         return *this;
19     }
20
21     Point &operator *= (T v) &
22     {
23         x*=v;
24         y*=v;
25         return *this;
26     }
27
28     Point operator - () const { return Point(-x,-y); }
29
30     friend Point operator + (Point a,Point b) { return a+=b; }
31     friend Point operator - (Point a,Point b) { return a-=b; }
32     friend Point operator * (Point a,T b) { return a*=b; }
33     friend Point operator * (T a,Point b) { return b*=a; }
34
35     friend bool operator == (Point a,Point b) { return a.x==b.x&& a.y==b.y; }
36 }

```

```

37     friend istream &operator >> (istream &is, Point &p) { return is>>p.x>>p.y; }
38
39     friend ostream &operator << (ostream &os, Point p) { return os<<'('<<p.x<<', '<<p.y<<')'; }
40 };
41
42 template <class T>
43 int sgn(const Point<T> &a) { return a.y>0||(a.y==0&&a.x>0)?1:-1; }
44
45 template <class T>
46 T dot(Point<T> a, Point<T> b) { return a.x*b.x+a.y*b.y; }
47
48 template <class T>
49 T cross(Point<T> a, Point<T> b) { return a.x*b.y-a.y*b.x; }
50
51 template <class T>
52 T square(Point<T> p) { return dot(p,p); }
53
54 template <class T>
55 double length(Point<T> p) { return sqrt(double(square(p))); }
56
57 long double length(Point<long double> p) { return sqrt(square(p)); }

```

Line

```

1  template <class T>
2  struct Line
3  {
4      Point<T> a,b;
5      Line(Point<T> a_=Point<T>(), Point<T> b_=Point<T>()):a(a_),b(b_) {}
6  };

```

距离

```

1  template <class T>
2  double dis_PP(Point<T> a, Point<T> b) { return length(a-b); }
3
4  template <class T>
5  double dis_PL(Point<T> a, Line<T> l) { return fabs(cross(a-l.a, a-l.b))/dis_PP(l.a, l.b); }
6
7  template <class T>
8  double dis_PS(Point<T> a, Line<T> l)
9  {
10     if (dot(a-l.a, l.b-l.a)<0) return dis_PP(a, l.a);
11     if (dot(a-l.b, l.a-l.b)<0) return dis_PP(a, l.b);
12     return dis_PL(a, l);
13 }

```

点绕中心旋转

```

1  template <class T>
2  Point<T> rotate(Point<T> a, double alpha)
3  { return Point<T>(a.x*cos(alpha)-a.y*sin(alpha), a.x*sin(alpha)+a.y*cos(alpha)); }

```

关于线的对称点

```

1  template <class T>
2  Point<T> lineRoot(Point<T> a, Line<T> l)
3  {
4      Point<T> v=l.b-l.a;
5      return l.a+v*(dot(a-l.a,v)/dot(v,v));
6  }
7
8  template <class T>
9  Point<T> symetry_PL(Point<T> a, Line<T> l) { return a+(lineRoot(a,l)-a)*2; }

```

位置关系判断

```
1  template <class T>
2  bool pointOnSegment(Point<T> a,Line<T> l)
3  { return (sgn(cross(a-l.a,a-l.b))==0)&&(sgn(dot(a-l.a,a-l.b))<=0); }
4
5  template <class T>
6  bool lineCrossLine(Line<T> a,Line<T> b)
7  {
8      double f1=cross(b.a-a.a,a.b-a.a),f2=cross(b.b-a.a,a.b-a.a);
9      double g1=cross(a.a-b.a,b.b-b.a),g2=cross(a.b-b.a,b.b-b.a);
10     return ((f1<0)^(f2<0))&&((g1<0)^(g2<0));
11 }
12
13 template <class T>
14 bool pointOnLineLeft(Point<T> a,Line<T> l) { return cross(l.b-l.a,a-l.a)>0; }
15
16 //适用任意多边形, O(n)
17 template <class T>
18 bool pointInPolygon(Point<T> a,const vector<Point<T>> &p)
19 {
20     int n=p.size();
21     for (int i=0;i<n;i++)
22         if (pointOnSegment(a,Line<T>(p[i],p[(i+1)%n])))
23             return 1;
24     bool t=0;
25     for (int i=0;i<n;i++)
26     {
27         Point<T> u=p[i],v=p[(i+1)%n];
28         if (u.x<a.x&&v.x>a.x&&pointOnLineLeft(a,Line<T>(v,u))) t^=1;
29         if (u.x>a.x&&v.x<a.x&&pointOnLineLeft(a,Line<T>(u,v))) t^=1;
30     }
31     return t;
32 }
33
34 //适用凸多边形, O(log n)
35 template <class T>
36 bool pointInPolygon_(Point<T> a,const vector<Point<T>> &p)
37 {
38     int n=p.size();
39     if (cross(a-p[0],p[1]-p[0])<0||cross(a-p[0],p[n-1]-p[0])>0) return 0;
40     if (pointOnSegment(a,Line<T>(p[0],p[1]))||pointOnSegment(a,Line<T>(p[n-1],p[0]))) return 1;
41     int l=1,r=n-1;
42     while (l<r)
43     {
44         int mid=(l+r)>>1;
45         if (cross(a-p[l],p[mid]-p[l])<0) l=mid;
46         else r=mid;
47     }
48     if (cross(a-p[l],p[r]-p[l])>0) return 0;
49     if (pointOnSegment(a,Line<T>(p[l],p[r]))) return 1;
50     return 1;
51 }
```

线段交点

```
1 //小心平行
2 template <class T>
3 Point<T> lineIntersection(Line<T> a,Line<T> b)
4 {
5     Point<T> u=a.a-b.a,v=a.b-a.a,w=b.b-b.a;
6     double t=cross(u,w)/cross(w,v);
7     return a.a+t*v;
8 }
```

过定点做圆的切线

```
1 template <class T>
2 vector<Line<T>> tan_PC(Point<T> a,Point<T> c,T r)
3 {
```

```

4     Point<T> v=c-a;
5     vector<Line<T>> res;
6     int dis=dis_PP(a,c);
7     if (sgn(dis-r)==0) res.push_back(rotate(v,acos(-1)/2));
8     else if (dis>r)
9     {
10         double alpha=asin(r/dis);
11         res.push_back(rotate(v,alpha));
12         res.push_back(rotate(v,-alpha));
13     }
14     return res;
15 }

```

两圆交点

```

1  template <class T>
2  vector<Point<T>> circleIntersection(Point<T> c1,T r1,Point<T> c2,T r2)
3  {
4      auto get=[&](Point<T> c,T r,double alpha)->Point<T>
5      { return Point<T>(c.x+cos(alpha)*r,c.y+sin(alpha)*r); };
6
7      auto angle=[&](Point<T> a)->double { return atan2(a.x,a.y); };
8
9      vector<Point<T>> res;
10     double d=dis_PP(c1,c2);
11     if (sgn(d)==0) return res;
12     if (sgn(r1+r2-d)<0) return res;
13     if (sgn(fabs(r1-r2)-d)>0) return res;
14     double alpha=angle(c2-c1);
15     double beta=acos((r1*r1-r2*r2+d*d)/(r1*d*2));
16     Point<T> p1=get(c1,r1,alpha-beta),p2=get(c1,r1,alpha+beta);
17     res.push_back(p1);
18     if (p1!=p2) res.push_back(p2);
19     return res;
20 }

```

多边形面积

```

1  template <class T>
2  double polygonArea(const vector<Point<T>> &p)
3  {
4      int n=p.size();
5      double res=0;
6      for (int i=1;i<n-1;i++) res+=cross(p[i]-p[0],p[i+1]-p[0]);
7      return fabs(res/2);
8  }

```

自适应辛普森法

```

1  //注意边界函数值不能小于 eps
2  double f(double x) { return pow(x,0.5); }
3  double calc(double l,double r)
4  {
5      double mid=(l+r)/2.0;
6      return (r-l)*(f(l)+f(r)+f(mid)*4.0)/6.0;
7  }
8  double simpson(double l,double r,double lst)
9  {
10     double mid=(l+r)/2.0;
11     double fl=calc(l,mid),fr=calc(mid,r);
12     if (sgn(fl+fr-lst)==0) return fl+fr;
13     else return simpson(l,mid,fl)+simpson(mid,r,fr);
14 }

```

静态凸包

```

1  template <class T>
2  vector<Point<T>> getHull(vector<Point<T>> p)
3  {

```

```

4     vector<Point<T>> h,l;
5     sort(p.begin(),p.end(),[&](auto a,auto b)
6     {
7         if (a.x!=b.x) return a.x<b.x;
8         else return a.y<b.y;
9     });
10    p.erase(unique(p.begin(),p.end()),p.end());
11    if (p.size()<=1) return p;
12    for (auto a:p)
13    {
14        while (h.size()>1&&sgn(cross(a-h.back(),a-h[h.size()-2]))<=0) h.pop_back();
15        while (l.size()>1&&sgn(cross(a-l.back(),a-l[l.size()-2]))>=0) l.pop_back();
16        l.push_back(a);
17        h.push_back(a);
18    }
19    l.pop_back();
20    reverse(h.begin(),h.end());
21    h.pop_back();
22    l.insert(l.end(),h.begin(),h.end());
23    return l;
24 }

```

旋转卡壳求直径

```

1  template <class T>
2  double getDiameter(vector<Point<T>> p)
3  {
4      double res=0;
5      if (p.size()==2) return dis_PP(p[0],p[1]);
6      int n=p.size();
7      p.push_back(p.front());
8      int j=2;
9      for (int i=0;i<n;i++)
10     {
11         while (sgn(cross(p[i+1]-p[i],p[j]-p[i])-cross(p[i+1]-p[i],p[j+1]-p[i]))<0)
12             j=(j+1)%n;
13         res=max({res,dis_PP(p[i],p[j]),dis_PP(p[i+1],p[j])});
14     }
15     return res;
16 }

```

半平面交

```

1  template <class T>
2  vector<Point<T>> hp(vector<Line<T>> lines)
3  {
4      sort(lines.begin(),lines.end(),[&](auto l1,auto l2)
5      {
6          auto d1=l1.b-l1.a;
7          auto d2=l2.b-l2.a;
8
9          if (sgn(d1)!=sgn(d2)) return sgn(d1)==1;
10         return cross(d1,d2)>0;
11     });
12
13     deque<Line<T>> ls;
14     deque<Point<T>> ps;
15     for (auto l:lines)
16     {
17         if (ls.empty())
18         {
19             ls.push_back(l);
20             continue;
21         }
22         while (!ps.empty()&&!pointOnLineLeft(ps.back(),l))
23         {
24             ps.pop_back();
25             ls.pop_back();
26         }
27         while (!ps.empty()&&!pointOnLineLeft(ps[0],l))

```

```

28     {
29         ps.pop_front();
30         ls.pop_front();
31     }
32     if (cross(l.b-l.a,ls.back().b-ls.back().a)==0)
33     {
34         if (dot(l.b-l.a,ls.back().b-ls.back().a)>0)
35         {
36             if (!pointOnLineLeft(ls.back().a,l))
37             {
38                 assert(ls.size()==1);
39                 ls[0]=l;
40             }
41             continue;
42         }
43         return {};
44     }
45     ps.push_back(lineIntersection(ls.back(),l));
46     ls.push_back(l);
47 }
48 while (!ps.empty() && !pointOnLineLeft(ps.back(),ls[0]))
49 {
50     ps.pop_back();
51     ls.pop_back();
52 }
53 if (ls.size() <= 2) return {};
54 ps.push_back(lineIntersection(ls[0],ls.back()));
55 return vector(ps.begin(),ps.end());
56 }

```