2007年硕士研究生入学考试数学一试题及答案解析

一、选择题：(本题共10小题，每小题4分，共40分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 当 $x \to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$.　(B) $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$.　(D) $1-\cos\sqrt{x}$.　[**B**]

【分析】 利用已知无穷小量的等价代换公式，尽量将四个选项先转化为其等价无穷小量，再进行比较分析找出正确答案.

【详解】 当 $x \to 0^+$ 时，有 $1-e^{\sqrt{x}}=-(e^{\sqrt{x}}-1)\sim-\sqrt{x}$；$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$；

$1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{1}{2}(\sqrt{x})^2=\dfrac{1}{2}x.$　利用排除法知应选(B).

(2) 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$，渐近线的条数为

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.　[**D**]

【分析】 先找出无定义点，确定其是否为对应垂直渐近线；再考虑水平或斜渐近线。

【详解】 因为 $\lim\limits_{x\to0}[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)]=\infty$，所以 $x=0$ 为垂直渐近线；

又 $\lim\limits_{x\to-\infty}[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)]=0$，所以 y=0 为水平渐近线；

进一步，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=1$，

$$\lim_{x\to+\infty}[y-1\cdot x]=\lim_{x\to+\infty}[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x]=\lim_{x\to+\infty}[\ln(1+e^x)-x]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[\ln e^x(1+e^{-x})-x]=\lim_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})=0,$$

于是有斜渐近线：$y = x$.　故应选(D).

(3) 如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间[−3，−2]，[2，3]上的图形分别是直径为1的上、下半圆周，在区间[−2，0]，[0，2]的图形分别是直径为2的上、下半圆周，设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt.$ 则下列结论正确的是

(A) $F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$.　(B) $F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$.

(C) $F(-3)=\dfrac{3}{4}F(2)$.　(D) $F(-3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$.　[**C**]

【分析】 本题考查定积分的几何意义，应注意 $f(x)$ 在不同区间段上的符号，从而搞清楚相应积分与面积的关系。

【详解】 根据定积分的几何意义，知 $F(2)$ 为半径是1的半圆面积：$F(2)=\dfrac{1}{2}\pi$， F(3)是两个半圆面积之差：$F(3)=\frac{1}{2}[\pi\cdot 1^2-\pi\cdot(\frac{1}{2})^2]=\frac{3}{8}\pi=\frac{3}{4}F(2)$，

$$F(-3)=\int_0^{-3}f(x)dx=-\int_{-3}^{0}f(x)dx=\int_0^3 f(x)dx=F(3)$$

因此应选(C).

(4) 设函数 $f(x)$在 x=0 处连续，下列命题错误的是

(A) 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在，则 $f(0)$=0.　　(B) 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$存在，则 $f(0)$=0.

(C) 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在，则$f'(0)$存在.　　(D) 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$存在，则$f'(0)$存在

[**D**]

【分析】 本题为极限的逆问题，已知某极限存在的情况下，需要利用极限的四则运算等进行分析讨论。

【详解】(A),(B)两项中分母的极限为 0，因此分子的极限也必须为 0，均可推导出 $f(0)$=0. 若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$存在，则 $f(0)=0,\ f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，可见(C)也正确，故应选(D). 事实上，可举反例：$f(x)=|x|$在 x=0 处连续，且

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|-|-x|}{x}=0$存在，但 $f(x)=|x|$在 x=0 处不可导。

(5) 设函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上具有二阶导数，且 $f''(x)>0$. 令$u_n=f(n)(n=1,2,\cdots,)$，则下列结论正确的是

(A) 若$u_1>u_2$，则$\{u_n\}$必收敛.　　(B) 若$u_1>u_2$，则$\{u_n\}$必发散.

(C) 若$u_1<u_2$，则$\{u_n\}$必收敛.　　(D) 若$u_1<u_2$，则$\{u_n\}$必发散.　　[**D**]

【分析】 可直接证明或利用反例通过排除法进行讨论。

【详解】 设 $f(x)=x^2$，则 $f(x)$在$(0,+\infty)$上具有二阶导数，且$f''(x)>0,u_1<u_2$，但$\{u_n\}=\{n^2\}$发散，排除(C); 设 $f(x)=\frac{1}{x}$，则 $f(x)$在$(0,+\infty)$上具有二阶导数，且$f''(x)>0,u_1>u_2$，但$\{u_n\}=\{\frac{1}{n}\}$收敛，排除(B); 又若设$f(x)=-\ln x$，则 $f(x)$在$(0,+\infty)$上具有二阶导数，且$f''(x)>0,u_1>u_2$，但$\{u_n\}=\{-\ln n\}$发散，排除(A). 故应选(D).

(6) 设曲线$L: f(x,y)=1$($f(x,y)$具有一阶连续偏导数)，过第 II 象限内的点 M 和第 IV 象限内的点 N，T 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧，则下列小于零的是

(A) $\int_T f(x,y)dx$.　　(B) $\int_T f(x,y)dy$.

(C) $\int_T f(x,y)ds$.　　(D) $\int_T f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$.　　[**B**]

【分析】 直接计算出四个积分的值，从而可确定正确选项。

【详解】 设 M 、N 点的坐标分别为$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2),x_1<x_2,y_1>y_2$. 先将曲线方程代入积分表达式，再计算有：

$\int_T f(x,y)dx=\int_T dx=x_2-x_1>0$；$\int_T f(x,y)dy=\int_T dy=y_2-y_1<0$；

$\int_T f(x,y)ds=\int_T ds=s>0$；$\int_T f_x'(x,y)dx+f_y'(x,y)dy=\int_T df(x,y)=0$.

故正确选项为(B).

(7) 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$. (B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$.

(C) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$. (D) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$. [**A**]

【详解】用定义进行判定:令

$$x_1(\alpha_1-\alpha_2)+x_2(\alpha_2-\alpha_3)+x_3(\alpha_3-\alpha_1)=0,$$

得 $$(x_1-x_3)\alpha_1+(-x_1+x_2)\alpha_2+(-x_2+x_3)\alpha_3=0.$$

因$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以 $\begin{cases} x_1 \quad\quad -x_3=0, \\ -x_1+x_2 \quad\quad =0, \\ \quad\quad -x_2+x_3=0. \end{cases}$

又 $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

故上述齐次线性方程组有非零解, 即 $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$线性相关. 类似可得(B), (C), (D)中的向量组都是线性无关的.

(8) 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B

(A) 合同, 且相似. (B) 合同, 但不相似 .

(C) 不合同, 但相似. (D) 既不合同, 又不相似. [**B**]

【详解】 由$|\lambda E-A|=0$ 得 A 的特征值为 0, 3, 3, 而 B 的特征值为 0, 1, 1,从而 A 与 B 不相似.

又 $r(A)=r(B)=2$, 且 A、B 有相同的正惯性指数, 因此 A 与 B 合同. 故选(B) .

(9) 某人向同一目标独立重复射击,每次射击命中目标的概率为 $p(0<p<1)$, 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为

(A) $3p(1-p)^2$. (B) $6p(1-p)^2$.

(C) $3p^2(1-p)^2$.　　　　(D) $6p^2(1-p)^2$.　　　　[**C**]

【详解】 "第 4 次射击恰好第 2 次命中"表示 4 次射击中第 4 次命中目标，前 3 次射击中有 1 次命中目标，由独立重复性知所求概率为：$C_3^1 p^2(1-p)^2$. 故选(C).

(10) 设随机变量(X, Y)服从二维正态分布，且X与Y不相关，$f_X(x)f_Y(y)$分别表示X，Y的概率密度，则在$Y=y$的条件下，X的条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$为

(A) $f_X(x)$.　(B) $f_Y(y)$.　(C) $f_X(x)f_Y(y)$.　(D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$.　　[**A**]

【详解】 因(X, Y)服从二维正态分布，且X与Y不相关，故X与Y相互独立，于是$f_{X|Y}(x|y)=f_X(x)$. 因此选(A).

二、**填空题**：(11－16 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上)

(11) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}$.

【分析】 先作变量代换，再分部积分。

【详解】 $\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx \overset{\frac{1}{x}=t}{=} \int_1^{\frac{1}{2}} t^3e^t(-\frac{1}{t^2})dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 te^t dt$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^1 tde^t = te^t\Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 e^t dt = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}.$$

(12) 设$f(u,v)$为二元可微函数，$z=f(x^y,y^x)$，则$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'\cdot yx^{y-1}+f_2'\cdot y^x\ln y$.

【详解】 利用复合函数求偏导公式，有$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'\cdot yx^{y-1}+f_2'\cdot y^x\ln y$.

(13) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}-2e^{2x}$. 其中$C_1,C_2$为任意常数.

【详解】 特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+3=0$，解得$\lambda_1=1,\lambda_2=3$. 可见对应齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=0$ 的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$.

设非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的特解为 $y^*=ke^{2x}$，代入非齐次方程可得 k= −2. 故通解为$y=C_1e^x+C_2e^{3x}-2e^{2x}$.

(14) 设曲面$\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$，则$\oiint_\Sigma (x+|y|)dS = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.

【详解】 由于曲面Σ关于平面 x=0 对称，因此$\oiint\limits_{\Sigma} xdS$ =0. 又曲面$\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$具有轮换对称性，于是

$$\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)dS=\oiint\limits_{\Sigma}|y|dS=\oiint\limits_{\Sigma}|x|dS=\oiint\limits_{\Sigma}|z|dS=\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}(|x|+|y|+|z|)dS$$

$$=\frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}dS=\frac{1}{3}\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

(15) 设矩阵$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 A^3 的秩为 1.

【详解】 依矩阵乘法直接计算得 $A^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，故 $r(A^3)$=1.

(16) 在区间(0, 1)中随机地取两个数，则两数之差的绝对值小于$\frac{1}{2}$的概率为$\frac{3}{4}$.

【详解】 这是一个几何概型，设 x, y 为所取的两个数，则样本空间

$\Omega=\{(x,y)\,|\,0<x,y<1\}$， 记$A=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in\Omega,|x-y|<\frac{1}{2}\}$.

故 $P(A)=\dfrac{S_A}{S_\Omega}=\dfrac{\frac{3}{4}}{1}=\dfrac{3}{4}$，其中$S_A,S_\Omega$分别表示 A 与Ω 的面积.

三、解答题：(17－24 小题，共 86 分.)

(17) (本题满分 11 分)

求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$在区域$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 4,y\ge 0\}$上的最大值和最小值。

【分析】 由于 D 为闭区域，在开区域内按无条件极值分析，而在边界上按条件极值讨论即可。

【详解】 因为 $f'_x(x,y)=2x-2xy^2$， $f'_y(x,y)=4y-2x^2y$，解方程：

$\begin{cases}f'_x=2x-2xy^2=0,\\f'_y=4y-2x^2y=0\end{cases}$ 得开区域内的可能极值点为$(\pm\sqrt{2},1)$.

其对应函数值为 $f(\pm\sqrt{2},1)=2.$

又当 y=0 时， $f(x,y)=x^2$在$-2\le x\le 2$上的最大值为 4，最小值为 0.

当 $x^2+y^2=4, y>0, -2<x<2$，构造拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=x^2+2y^2-x^2y^2+\lambda(x^2+y^2-4)$$

解方程组 $\begin{cases} F_x'=2x-2xy^2+2\lambda x=0, \\ F_y'=4y-2x^2y+2\lambda y=0, \\ F_\lambda'=x^2+y^2-4=0, \end{cases}$ 得可能极值点：$(0,2),(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}})$，其对应函数值为 $f(0,2)=8, f(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}})=\frac{7}{4}.$

比较函数值 $2,0,4,8,\frac{7}{4}$，知 $f(x, y)$ 在区域 D 上的最大值为 8，最小值为 0.

(18) (本题满分 10 分)

计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} xzdydz+2zydzdx+3xydxdy,$$

其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-\frac{y^2}{4}(0\le z\le 1)$ 的上侧。

【分析】 本题曲面 Σ 不封闭，可考虑先添加一平面域使其封闭，在封闭曲面所围成的区域内用高斯公式，而在添加的平面域上直接投影即可。

【详解】 补充曲面：$\Sigma_1: x^2+\frac{y^2}{4}=1, z=0$，取下侧. 则

$$I=\iint_{\Sigma+\Sigma_1} xzdydz+2zydzdx+3xydxdy-\iint_{\Sigma_1} xzdydz+2zydzdx+3xydxdy$$
$$=\iiint_{\Omega}(z+2z)dxdydz+\iint_{D}3xydxdy$$

其中 Ω 为 Σ 与 Σ_1 所围成的空间区域，D 为平面区域 $x^2+\frac{y^2}{4}\le 1$.

由于区域 D 关于 x 轴对称，因此 $\iint_{D}3xydxdy=0$. 又

$$\iiint_{\Omega}(z+2z)dxdydz=3\iiint_{\Omega}zdxdy=3\int_0^1 zdz\iint_{D_z}dxdy=3\int_0^1 z\cdot 2\pi(1-z)dz=\pi.$$

其中 $D_z: x^2+\frac{y^2}{4}\le 1-z$.

(19) (本题满分 11 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$, 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

【分析】 需要证明的结论与导数有关，自然联想到用微分中值定理。事实上，若令 $F(x)=f(x)-g(x)$，则问题转化为证明 $F''(\xi)=0$，只需对 $F'(x)$ 用罗尔定理，关键是找到 $F'(x)$ 的端点函数值相等的区间(特别是两个一阶导数同时为零的点)，而利用 $F(a)=F(b)=0$，若能再找一点 $c\in(a,b)$，使得 $F(c)=0$，则在区间 $[a,c],[c,b]$ 上两次利用罗尔定理有一阶导函数相等的两点，再对 $F'(x)$ 用罗尔定理即可。

【证明】 构造辅助函数 $F(x)=f(x)-g(x)$，由题设有 $F(a)=F(b)=0$. 又 $f(x)$, $g(x)$在(a, b)内具有相等的最大值，不妨设存在 $x_1\le x_2$，$x_1,x_2\in(a,b)$ 使得

$$f(x_1)=M=\max_{[a,b]} f(x), g(x_2)=M=\max_{[a,b]} g(x),$$

若 $x_1=x_2$，令 $c=x_1$，则 $F(c)=0.$

若 $x_1<x_2$，因 $F(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\ge 0, F(x_2)=f(x_2)-g(x_2)\le 0$，从而存在 $c\in[x_1,x_2]\subset(a,b)$，使 $F(c)=0.$

在区间 $[a,c],[c,b]$ 上分别利用罗尔定理知，存在 $\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$，使得

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0.$$

再对 $F'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔定理，知存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，有

$$F''(\xi)=0, \quad 即 \quad f''(\xi)=g''(\xi)$$

(20) (本题满分 10 分)

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛，其和函数 $y(x)$满足

$$y''-2xy'-4y=0, y(0)=0, y'(0)=1.$$

(I) 证明：$a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n, n=1,2,\cdots;$

(II) 求 $y(x)$的表达式.

【分析】 先将和函数求一阶、二阶导，再代入微分方程，引出系数之间的递推关系。

【详解】 (I)记 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，则 $y'=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}, y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$, 代入微分方程 $y''-2xy'-4y=0,$ 有

(II) 由初始条件 $y(0)=0, y'(0)=1$ 知， $a_0=0, a_1=1$. 于是根据递推关系式 $a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n$，有 $a_{2n}=0, a_{2n+1}=\frac{1}{n!}$. 故

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x^2)^n=xe^{x^2}.$$

(21) (本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &=0, \\ x_1+2x_2+ax_3 &=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3 &=0 \end{cases} \qquad ①$$

与方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1 \qquad ②$$

有公共解，求 a 的值及所有公共解.

【分析】 两个方程有公共解就是①与②联立起来的非齐次线性方程组有解.

【详解】 将①与②联立得非齐次线性方程组:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &=0, \\ x_1+2x_2+ax_3 &=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3 &=0, \\ x_1+2x_2+x_3 &=a-1. \end{cases} \qquad ③$$

若此非齐次线性方程组有解, 则①与②有公共解, 且③的解即为所求全部公共解. 对③的增广矩阵 $\overline{A}$ 作初等行变换得:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix}.$$

于是 1° 当 a=1 时，有 $r(A)=r(\overline{A})$=2<3，方程组③有解，即①与②有公共解，其全部公共

解即为③的通解，此时

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

此时方程组③为齐次线性方程组，其基础解系为: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

所以①与②的全部公共解为 $k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数.

2° 当 a =2 时，有 $r(A)=r(\overline{A})$=3，方程组③有唯一解，此时

$$\overline{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$，故方程组③的解为: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，即①与②有唯一公共解：为 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(22) (本题满分 11 分)

设 3 阶对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=-2$, $\alpha_1=(1,-1,1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量,记 $B=A^5-4A^3+E$ 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量，并求 B 的全部特征值与特征向量.

(II) 求矩阵 B.

【分析】 根据特征值的性质可立即得 B 的特征值, 然后由 B 也是对称矩阵可求出其另外两个线性无关的特征向量.

【详解】 (I) 由 $A\alpha_1=\alpha_1$ 得 $A^2\alpha_1=A\alpha_1=\alpha_1$,

进一步 $A^3\alpha_1=\alpha_1$, $A^5\alpha_1=\alpha_1$,

故
$$\begin{aligned} B\alpha_1 &= (A^5-4A^3+E)\alpha_1 \\ &= A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+\alpha_1 \\ &= \alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1 \end{aligned}$$

$$=-2\alpha_1,$$

从而α_1是矩阵B的属于特征值−2 的特征向量.

因$B=A^5-4A^3+E$，及A的 3 个特征值$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，得

B 的 3 个特征值为$\mu_1=-2,\mu_2=1,\mu_3=1$.

设α_2,α_3为 B 的属于$\mu_2=\mu_3=1$的两个线性无关的特征向量，又

A为对称矩阵，得 B 也是对称矩阵，因此α_1与α_2,α_3正交，即

$$\alpha_1^T\alpha_2=0, \qquad \alpha_1^T\alpha_3=0$$

所以α_2,α_3可取为下列齐次线性方程组两个线性无关的解：

$$(1,-1,1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,$$

其基础解系为: $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ ，故可取$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

即 B 的全部特征值的特征向量为: $k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，其中$k_1\neq 0$,是不为零的任意常数，$k_2,k_3$是不同时为零的任意常数.

(II) 令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}BP=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$,

得
$$B=P\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

(23) (本题满分 11 分)

设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(I) 求$P\{X>2Y\}$；

(II) 求$Z=X+Y$的概率密度$f_Z(z)$.

【详解】 (I) $P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dy\int_{2y}^1(2-x-y)dx=\frac{7}{24}$.

(II) 先求Z的分布函数:

$$F_Z(z)=P(X+Y\le Z)=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)dxdy$$

当$Z<0$时，$F_Z(z)=0$；

当$0\le z<1$时，$F_Z(z)=\iint\limits_{D_1}f(x,y)dxdy=\int_0^z dy\int_0^{z-y}(2-x-y)dx$

$$=z^2-\frac{1}{3}z^3;$$

当$1\le z<2$时，$F_Z(z)=1-\iint\limits_{D_2}f(x,y)dxdy=1-\int_{z-1}^1 dy\int_{z-y}^1(2-x-y)dx$

$$=1-\frac{1}{3}(2-z)^3;$$

当$z\ge 2$时，$F_Z(z)=1$.

故$Z=X+Y$的概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}2z-z^2, & 0<z<1,\\ (2-z)^2, & 1\le z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(24) (数 1, 3)(本题满分 11 分)

设总体X的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta,\\ \dfrac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\le x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中参数θ ($0<\theta<1$)未知，$X_1,X_2\cdots X_n$是来自总体X的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值

(I) 求参数θ的矩估计量$\hat{\theta}$；

(II) 判断$4\overline{X}^2$是否为θ^2的无偏估计量,并说明理由.

【详解】 (I) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,\theta)dx=\int_0^{\theta}\frac{x}{2\theta}dx+\int_{\theta}^{1}\frac{x}{2(1-\theta)}dx$

$$=\frac{\theta}{4}+\frac{1}{4}(1+\theta)=\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}.$$

令 $\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}=\overline{X}$，其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，

解方程得θ的矩估计量为: $\hat{\theta}=2\overline{X}-\frac{1}{2}$.

(II) $E(4\overline{X}^2)=4E(\overline{X}^2)=4[D(\overline{X})+E^2(\overline{X})]=4[\frac{D(X)}{n}+E^2(X)]$,

而$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,\theta)dx=\int_0^{\theta}\frac{x^2}{2\theta}dx+\int_{\theta}^{1}\frac{x^2}{2(1-\theta)}dx$

$$=\frac{\theta^2}{3}+\frac{1}{6}\theta+\frac{1}{6}.$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{\theta^2}{3}+\frac{1}{6}\theta+\frac{1}{6}-(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4})^2$$

$$=\frac{1}{12}\theta^2-\frac{1}{12}\theta+\frac{5}{48},$$

故$E(4\overline{X}^2)=4[\frac{D(X)}{n}+E^2(X)]=\frac{3n+1}{3n}\theta^2+\frac{3n-1}{n}\theta+\frac{3n+5}{12n}\neq\theta^2$,

所以$4\overline{X}^2$不是θ^2的无偏估计量.