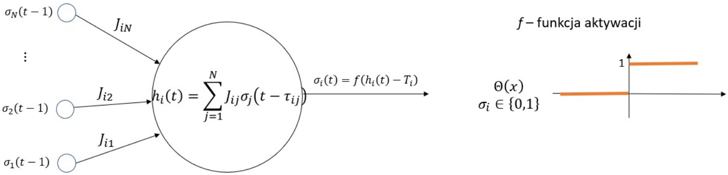
Sieci neuronowe z szumem: przybliżenie pola średniego

Sieci neuronowe: wykład 05

R.A. Kosiński, T. Gradowski, A. Krawiecki

Politechnika Warszawska
Wydział Fizyki

Uwzględnienie wpływu szumu synaptycznego na dynamikę neuronu



Rysunek: Neuron formalny, zaznaczono opóźnienia potencjałów synaptycznych

Bardziej realistyczny model neuronu polega na

- Uwzględnieniu opóźnień potencjałów czynnościowych τ_{ij}: są to wielkości przypadkowe, związane z różnymi długościami aksonów i różnymi prędkościami propagacji potencjałów czynnościowych wzdłuż synaps,
- Uwzględnieniu przypadkowego charakteru uwalniania neurotransmiterów w połączeniach synaptycznych: w najprostszym przypadku można przyjąć, że po dotarciu potencjału czynnościowego neurotransmiter jest uwalniany i potencjał dociera do następnego neuronu z prawdopodobieństwem p.

Przyjmijmy $\forall i \; \sigma_i \in \{0,1\}, \; T_i = 0$.

$$\begin{aligned} h_i(t) &= \sum_j v_{ij}(t) \\ v_{ij}(t) &= \begin{cases} J_{ij}\sigma_j(t-\tau_{ij}) & \text{z prawdopodobieństwem} \quad p \\ 0 & \text{z prawdopodobieństwem} \quad 1-p \end{cases}, \\ \Rightarrow P(v_{ij}) &= p\delta\left(v_{ij} - J_{ij}\sigma_j(t-\tau_{ij})\right) + (1-p)\delta(v_{ij}). \end{aligned}$$

Z centralnego twierdzenia granicznego Lapunowa wynika, że pole lokalne h_i, jako suma zmiennych losowych o rozkładach dwupunktowych (istnieje wartość oczekiwana i wariancja), jest zmienną losową o rozkładzie normalnym

$$P(h_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B^2}} \exp\left[-\frac{(h_i - \bar{h}_i)^2}{2B^2}\right],$$

$$\bar{h}_i = E\left(h_i\right) = \sum_j E(v_{ij}) = \sum_j \int dv_{ij} P(v_{ij}) v_{ij} = p \sum_j J_{ij}\sigma_j(t-\tau_{ij}),$$

$$B^2 = E\left[\left(h_i - \bar{h}_i\right)^2\right] = p(1-p)\sum_j J_{ij}^2 \sigma_j(t-\tau_{ij}),$$

(wyprowadzenie pomijamy).

Szum synaptyczny, reprezentowany przez τ_{ij}, p, powoduje, że stan neuronu w chwili t jest zmienną przypadkową o rozkładzie

$$\begin{aligned} P(\sigma_i(t)=+1) &= P(h_i(t)>0) = \int_0^\infty P(h_i)dh_i = \frac{1}{2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{\bar{h}_i}{\sqrt{2}B}\right)\right], \\ P(\sigma_i(t)=0) &= 1-P(\sigma_i(t)=+1) = \frac{1}{2}\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{\bar{h}_i}{\sqrt{2}B}\right)\right]. \end{aligned}$$

Funkcja aktywacji

$$\mathcal{S}\left(\frac{\bar{h}_i}{\sqrt{2}B}\right) = \mathrm{erf}\left(\frac{\bar{h}_i}{\sqrt{2}B}\right); \quad \beta \equiv \frac{1}{\sqrt{2}B} \Rightarrow \mathcal{S}\left(\beta\bar{h}_i\right) = \mathrm{erf}\left(\beta\bar{h}_i\right).$$

Średnia wartość neuronu (=średnia aktywność neuronu)

$$\left.\begin{array}{r} P(\sigma_i(t)=+1) = \frac{1}{2}\left[1+\mathcal{S}\left(\beta\bar{h}_i\right)\right] \\ P(\sigma_i(t)=0) = \frac{1}{2}\left[1-\mathcal{S}\left(\beta\bar{h}_i\right)\right] \end{array}\right| \Rightarrow \quad \bar{\sigma}_i = \sum\nolimits_{\sigma_i=0,1} P(\sigma_i(t))\sigma_i = \frac{1}{2}\left[1+\mathcal{S}\left(\beta\bar{h}_i\right)\right]$$

Dla $\sigma_i \in \{-1, 1\}$

Średnia wartość neuronu (=średnia aktywność neuronu)

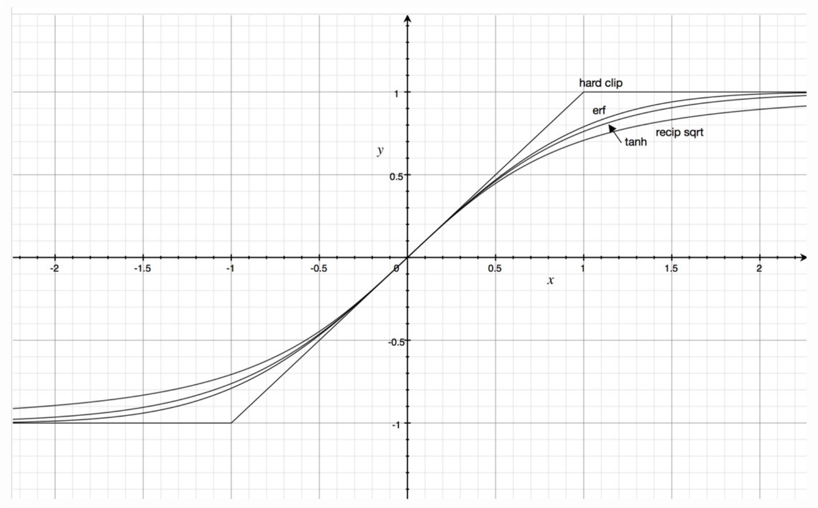
$$\left.\begin{array}{rcl} P(\sigma_i(t) = +1) & = & \frac{1}{2}\left[1 + \mathcal{S}\left(\beta \bar{h}_i\right)\right] \\ P(\sigma_i(t) = -1) & = & \frac{1}{2}\left[1 - \mathcal{S}\left(\beta \bar{h}_i\right)\right] \end{array}\right| \Rightarrow P(\sigma_i(t)) = \frac{1}{2}\left[1 + \sigma_i(t)\mathcal{S}\left(\beta \bar{h}_i\right)\right]$$

$$\bar{\sigma}_i = \sum_{\sigma_i = \pm 1} P(\sigma_i(t))\sigma_i = \mathcal{S}\left(\beta \bar{h}_i\right)$$

Można wprowadzić inne funkcje aktywacji, nieparzyste, spełniajace warunek $\lim_{x \to \pm\infty} = \pm 1$,

- $\mathcal{S}(x) = \mathrm{tgh}(x)$ (dla **szumu termicznego**)
- $\mathcal{S}(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,
- $\mathcal{S}(x) = -1$ dla $x < -1$, $\mathcal{S}(x) = x$ dla $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $\mathcal{S}(x) = 1$ dla $x > 1$, ...

Neuron formalny z szumem synaptycznym (5)



Rysunek: Porównanie różnych rodzajów funkcji sigmoidalnych $\mathcal{S}(x)$. Funkcja $\text{tgh}(x)$ przybliża funkcję $\text{erf}(x)$ z dokładnością do 1%. Własności sieci neuronowych nie powinny być zależne od drobnych zmian funkcji aktywacji. Wykorzystanie przybliżenia funkcji aktywacji $\mathcal{S}(x) = \text{tgh}(x)$ pozwala natomiast na użycie całego aparatu fizyki statystycznej.

Metoda Monte Carlo symulacji asynchronicznej dynamiki sieci neuronowej z szumem

Pełny krok symulacji Monte Carlo (MCSS)

(1) Wybierz przypadkowo neuron i (bez powtórzeń),

(2) Oblicz pole lokalne $h_i(t-1) = \sum_j J_{ij}\sigma_j(t-1)$,

(3) Zaktualizuj stan neuronu i: $\sigma_i(t) = \sigma \in \{-1, +1\}$ z prawdopodobieństwem $P(\sigma) = \frac{1}{2}\left[1 + \sigma\mathcal{S}\left(\beta h_i(t-1)\right)\right]$,

(4) Iteruj od (1) do chwili zaktualizowania stanów wszystkich neuronów.

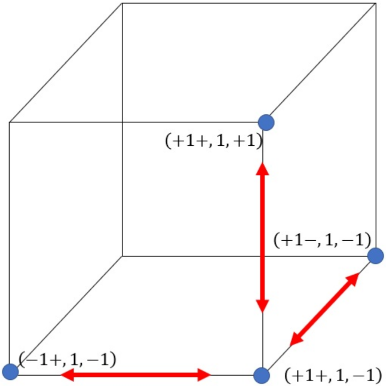
Uwaga: Pełny krok symulacji MC stanowi sekwencję N "małych" kroków; w każdym "małym" kroku używamy aktualnych stanów neuronów, w szczególności stanów neuronów zaktualizowanych w poprzednich "małych" krokach danego pełnego kroku.

Uwaga: punkt (3) można w sposób równoważny zapisać

(3) Odwróć stan neuronu i z prawdopodobieństwem $w_i = \frac{1}{2}\left[1 - \sigma_i(t-1)\mathcal{S}\left(\beta h_i(t-1)\right)\right]$.

$$\begin{aligned}
P(\sigma_i(t) = +1) &= P(\sigma_i(t-1) = -1)\frac{1}{2}\left[1 + \mathcal{S}\left(\beta h_i(t-1)\right)\right] \\
&+ P(\sigma_i(t-1) = +1)\left\{1 - \frac{1}{2}\left[1 - \mathcal{S}\left(\beta h_i(t-1)\right)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left[1 + \mathcal{S}\left(\beta h_i(t-1)\right)\right], \ \text{itd.}
\end{aligned}$$

Dynamika asynchroniczna Glaubera (2)



Rysunek: Możliwe przejścia do (ze) stanu $J = (+1, +1, -1)$ zaznaczono strzałkami

Przykład: N=3 neurony

- Możliwe 2^N stanów sieci mozna przedstawić jako wierzchołki (hiper)sześcianu w przestrzeni N-wymiarowej,
- Trajektoria fazowa $I(t) = \{\sigma_i(t)\}$ przebiega wierzchołki (hiper)sześcianu,
- Pojedynczy ("mały") krok czasowy symulacji polega na zmianie stanu co najwyżej jednego neuronu, np. mozliwe jest przejście ze stanu $J = (+1, +1, -1)$ do stanu $I = (+1, -1, -1)$ z prawdopodobieństwem $w(I|J)$,
- Na (hiper)sześcianie oznacza to przejście do (z) jednego ze stanów (I) sąsiadujacych ze stanem J,
- Dla każdego stanu istnieje tylko jeden stan sąsiedni, różniący się stanem jednego (i tylko tego) wybranego neuronu.

Dynamika asynchroniczna Glaubera (3)

- Niech $\rho(I,t)$ oznacza prawdopodobieństwo, że w chwili t sieć jest w stanie I,
- Niech $w(I|J)$ oznacza prawdopodobieństwo warunkowe, że w chwili t sieć jest w stanie I, jeśli w chwili $t-1$ była w stanie J,
- Ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe otrzymujemy **równanie Master**

$$\rho(I,t) = \sum_J w(I|J)\rho(J,t-1).$$

Dla dynamiki Glaubera sieć w stanie J w jednym "małym" kroku czasowym może

- Przejść do stanu I różniącego się od stanu J orientacją jednego neuronu, np. $\sigma_i(I) = -\sigma_i(J)$ wskutek
  - Wybrania neuronu i spośród N neuronów, z prawdopodobieństwem $1/N$,
  - Zaktualizowania stanu neuronu $\sigma_i(J)$ do $\sigma_i(I)$, z prawdopodobieństwem $P(\sigma_i(I)) = \frac{1}{2}\left[1+\sigma_i(I)\mathcal{S}\left(\beta h_i(J)\right)\right]$
- Pozostać w stanie J.

$$\begin{aligned} W(I|J) &= \frac{1}{N}P\left(\sigma_i(I)\right) = \frac{1}{2N}\left[1+\sigma_i(I)\mathcal{S}\left(\beta h_i(J)\right)\right], \\ W(J|J) &= 1-\sum_{I\neq J} W(I|J) \end{aligned}$$

W powyższych wzorach I oznacza jeden z N stanów sieci, różniacych się od I stanem tylko jednego neuronu.

Równanie na srednią aktywność neuronu

Uśredniony po zespole stan (aktywność) neuronu i w chwili t wynosi

$$\langle \sigma_i(t) \rangle = \sum_I \sigma_i(I)\rho(I,t),$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \langle \sigma_i(t+1) \rangle &= \sum_I \sigma_i(I)\rho(I,t+1) = \sum_I \sigma_i(I) \left(\sum_J w(I|J)\rho(J,t) \right) \\ &= \sum_J \left(\sum_I w(I|J)\sigma_i(I) \right) \rho(J,t) = \left\langle \sum_I w(I|J)\sigma_i(I) \right\rangle.\end{aligned}$$

Niech

$$F_i(J) \equiv \sum_I w(I|J)\sigma_i(I) \Rightarrow \langle \sigma_i(t+1) \rangle - \langle \sigma_i(t) \rangle = -\left(\langle \sigma_i(t) \rangle - \langle F_i(t) \rangle \right)$$

Zapis w formie równania różniczkowego daje (τ jest stałą proporcjonalności)

$$\frac{d\langle \sigma_i \rangle}{dt} = -\frac{1}{\tau} \left(\langle \sigma_i(t) \rangle - \langle F_i(t) \rangle \right). \tag{1}$$

$$F_i(J) = \sum_I w(I|J)\sigma_i(I) = w(J|J)\sigma_i(J) + \sum_{I \neq J} w(I|J)\sigma_i(I) =$$

$$\sigma_i(J) - \sum_{I \neq J} \frac{1}{2N} \left[1 + \sigma_i(I)\mathcal{S}(\beta h_i(J))\right] \sigma_i(J) + \sum_{I \neq J} \frac{1}{2N} \left[1 + \sigma_i(I)\mathcal{S}(\beta h_i(J))\right] \sigma_i(I).$$

- W ostatniej linijce suma przebiega po stanach I, różniących się od stanu $J = (\sigma_1(J), \ldots \sigma_i(J), \ldots \sigma_N(J))$ orientacją tylko jednego neuronu,
- Wśród ww. stanów jest tylko jeden $I = J^{i,R} = (\sigma_1(J), \ldots, -\sigma_i(J), \ldots \sigma_N(J))$, różniący się od J orientacją neuronu i,
- $I = J^{i,R} \Rightarrow \sigma_i(I) = -\sigma_i(J) \Rightarrow \sigma_i(I)\sigma_i(J) = -1$; $I \neq J^{i,R} \Rightarrow \sigma_i(I)\sigma_i(J) = 1$; $\sigma_i(I)\sigma_i(I) = 1$, więc znoszą się wszystkie wyrazy w obu sumach poza jednym, dla $I = J^{i,R}$.

$$F_i(J) = \sigma_i(J) - \frac{1}{N}\left[\sigma_i(J) - \mathcal{S}(\beta h_i(J))\right]$$

Ścisłe równanie dla średniej wartości (aktywności) neuronu

$$\frac{d\langle\sigma_i\rangle}{dt} = -\frac{1}{\tau_r}\left[\langle\sigma_i(t)\rangle - \langle\mathcal{S}(\beta h_i)\rangle\right], \quad \tau_r = N\tau \tag{2}$$

Interludium: dlaczego dynamika Glaubera, $\mathcal{S}(x) = \mathrm{tgh}(x)$ i szum termiczny?

Przykład: dynamika Glaubera dla sieci Hopfielda z szumem termicznym
Niech stany sieci I, J różnią się stanem neuronu i, tj. $\sigma_i(I) = -\sigma_i(J)$.

$$\left.\begin{array}{r} H(I) = -\sum_{\langle ij\rangle} J_{ij}\sigma_i(I)\sigma_j(J) \\ H(J) = -\sum_{\langle ij\rangle} J_{ij}\sigma_i(J)\sigma_j(J) \end{array}\right| \Rightarrow H(J) - H(I) = 2\sigma_i(I)\sum_j J_{ij}\sigma_j(J) = 2\sigma_i(I)h_i(J).$$

$$W(I|J) = \frac{1}{2N}\left[1 + \sigma_i(I)\,\mathrm{tgh}\left(\beta h_i(J)\right)\right] = \frac{1}{2N}\left[1 + \mathrm{tgh}\left(\beta\sigma_i(I)h_i(J)\right)\right],$$

$$\frac{1}{2}(1 + \mathrm{tgh}\,x) = \frac{e^x}{2\cosh x} \Rightarrow W(I|J) = \frac{\exp\left\{\frac{\beta}{2}\left[H(J) - H(I)\right]\right\}}{2N\cosh\left\{\frac{\beta}{2}\left[H(J) - H(I)\right]\right\}}$$

$$\Rightarrow \frac{W(I|J)}{W(J|I)} = \frac{\exp\left\{\frac{\beta}{2}\left[H(J) - H(I)\right]\right\}}{\exp\left\{\frac{\beta}{2}\left[H(I) - H(J)\right]\right\}} = \frac{\exp\left[-\beta H(I)\right]}{\exp\left[-\beta H(J)\right]}$$

$$W(I|J)\exp\left[-\beta H(J)\right] = W(J|I)\exp\left[-\beta H(I)\right]$$

Dynamika Glaubera z szumem termicznym spełnia postulat równowagi szczegółowej

Wniosek: $\rho(I) = \frac{1}{Z}\exp\left[-\beta H(I)\right]$ – **rozkład Boltzmanna**.

Przybliżenie pola średniego (1)

- **Przybliżenie pola średniego** oznacza założenie, że korelacje pomiędzy zmiennymi zależnymi od stanu układu można zaniedbać. Dla rozkładu prawdopodobieństwa stanów sieci $I = \{\sigma_i\}$ oznacza to

$$\rho(I) = \prod_i \rho_i(\sigma_i), \quad \sum_{\sigma_i=\pm 1} \rho_i(\sigma_i) = 1,$$

  gdzie $\rho_i(\sigma_i)$ jest rozkładem prawdopodobieństwa, że neuron i jest w stanie σ_i.
- Wartość oczekiwana dwóch wielkości $O_i(I)$, $O_j(I)$, zależnych tylko od stanów neuronów i, j, jest wówczas iloczynem wartości oczekiwanych,

$$\langle O_i O_j \rangle = \sum_I \rho(I) O_i(\sigma_i) O_j(\sigma_j) =$$

$$\left[\sum_{\sigma_i=\pm 1} \rho_i(\sigma_i) O_i(\sigma_i)\right] \left[\sum_{\sigma_j=\pm 1} \rho_j(\sigma_j) O_j(\sigma_j)\right] \prod_{k\neq i,j} \left[\sum_{\sigma_k=\pm 1} \rho_k(\sigma_k)\right] = \langle O_i \rangle \langle O_j \rangle.$$

W przybliżeniu pola średniego $\langle h_i^2 \rangle = \langle h_i \rangle \langle h_i \rangle = \langle h_i \rangle^2$, więc

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{S}(h_i) \rangle &= \Big\langle \mathcal{S}\left[\langle h_i \rangle + (h_i - \langle h_i \rangle) \right] \Big\rangle \\
&= \mathcal{S}(\langle h_i \rangle) + \underbrace{\langle h_i - \langle h_i \rangle \rangle}_{=\langle h_i \rangle - \langle h_i \rangle = 0} \mathcal{S}'(\langle h_i \rangle) + \frac{1}{2} \underbrace{\langle (h_i - \langle h_i \rangle)^2 \rangle}_{=\langle h_i^2 \rangle - 2\langle h_i \rangle \langle h_i \rangle + \langle h_i \rangle^2 = 0} \mathcal{S}''(\langle h_i \rangle) + \ldots \\
&= \mathcal{S}(\langle h_i \rangle)
\end{aligned}$$

Równanie dla wartosci średniej neuronu w przybliżeniu pola średniego

$$\frac{d\langle \sigma_i \rangle}{dt} = -\frac{1}{\tau_r} \left[\langle \sigma_i(t) \rangle - \mathcal{S}(\langle h_i \rangle) \right], \tag{3}$$

Interludium: przybliżenie pola średniego dla modelu Isinga, $\mathcal{S}(x) = \text{tgh}\, x$

Przykład: przejście ferromagnetyczne

$$H = -\sum_{\langle ij \rangle} J_{ij}\sigma_i\sigma_j; \quad J_{ij} = \frac{J}{N}, \; J = \text{const} > 0,$$

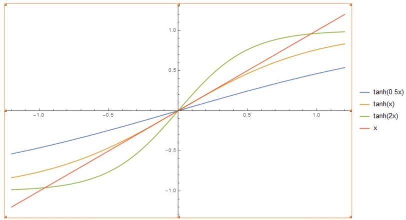
$$h_i = \frac{J}{N}\sum_{j\neq i}\sigma_j.$$

Magnetyzacja $M = \langle \sigma_j \rangle$, wszystkie spiny równoważne $\Rightarrow$ z równ. (3)

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{1}{\tau_r}\left[M - \text{tgh}(\beta JM)\right],$$

Punkty stałe spełniają warunek $\frac{dM}{dt} = 0$ i odpowiadają fazom

- paramagnetycznej, $M = 0$,
- ferromagnetycznej, $|M| > 0$, wyznaczane z równania $M = \text{tgh}(\beta JM)$, istnieją dla $\beta_c > J^{-1}$.



W okolicy $\beta = \beta_c = 1/J$ zachodzi $M \approx 0$ i można rozwinąć $\text{tgh}(x) \approx x - \frac{1}{3}x^3$,
$M \approx \beta JM[1 - \frac{1}{3}(\beta JM)^2] \Rightarrow$
$M = 0$ lub $M = \beta^{-1}\sqrt{3\left[1 - (\beta J)^{-1}\right]}$.
Dwa symetryczne rozwiązania niezerowe iztnieją dla $\beta > \beta_c = J^{-1}$.

Dla sieci Hopfielda

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{P} \xi_i^\mu \xi_j^\mu \Rightarrow \langle h_i \rangle = \sum_{j=0}^{N} J_{ij} \langle \sigma_j \rangle = \sum_{\mu=1}^{P} \xi_i^\mu \frac{1}{N} \left[\sum_{j=1}^{N} \xi_j^\mu \langle \sigma_j \rangle \right].$$

Średnie przekrycie ze wzorcem ξ^μ

$$M^\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \xi_i^\mu \langle \sigma_i \rangle \Rightarrow \langle h_i \rangle = \sum_{\mu=1}^{P} \xi_i^\mu M^\mu.$$

Równanie dla średniej wartości (aktywności) neuronu w przybliżeniu pola średniego

$$\frac{d\langle \sigma_i \rangle}{dt} = -\frac{1}{\tau_r} \left[\langle \sigma_i(t) \rangle - \mathcal{S} \left(\sum_{\mu=1}^{P} \xi_i^\mu M^\mu \right) \right],$$

Równanie dla średnich przekryć w przybliżeniu pola średniego

$$\frac{dM^\mu}{dt} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \xi_i^\mu \frac{d\langle \sigma_i \rangle}{dt} = -\frac{1}{\tau_r} \left[M^\mu - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \xi_i^\mu \mathcal{S} \left(\beta \sum_{\mu'=1}^{P} \xi_i^{\mu'} M^{\mu'} \right) \right]. \qquad (4)$$

- Równ. (4) posiada m. in. rozwiązania $\tilde{M} = (0, \ldots, 0, M^\nu(t), 0, \ldots, 0)$, odpowiadające przekryciu z zapamiętanym wzorcem ξ^ν.Powinny to być najbardziej stabilne rozwiązania.
- Przyjmując warunek początkowy $M^\nu(0) \neq 0$, $M^\mu(0) = 0$, $\mu \neq \nu$, możemy ograniczyć się do badania tylko takich rozwiązań,

$$\frac{dM^\nu}{dt} = -\frac{1}{\tau_r}\left[M^\nu - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \xi_i^\nu \mathcal{S}\left(\beta \xi_i^\nu M^\nu\right)\right]. \tag{5}$$

- **Punkty stałe** równ. (5) są to rozwiązania niezależne od czasu, spełniające warunek $\frac{dM^\nu}{dt} = 0$, czyli

$$M^\nu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \xi_i^\nu \mathcal{S}\left(\beta \xi_i^\nu M^\nu\right). \tag{6}$$

- Ponieważ $\mathcal{S}(0) = 0$, równ. (6) posiada rozwiązanie $M^\nu = 0$. Odpowiada ono brakowi przekrycia z zapamiętanym wzorcem, czyli utracie pamięci przez sieć przy dużym szumie $\beta \ll 1$ (stanowi paramagnetycznemu).
- Przy niskim szumie $\beta \gg 1$ istnieją rozwiązania niezerowe, $|M^\nu| > 0$, odpowiadające rozpoznaniu zapamiętanego wzorca (stanowi ferromagnetycznemu).

Rozważmy sieć Hopfielda z szumem termicznym, $\mathcal{S}(x) = \text{tgh}(x)$.

Przy dużych szumach (wysokich temperaturach, $\beta \ll 1$) powinno zachodzić $M^\nu \approx 0$ i w równ. (6) można wykorzystać przybliżenie $\mathcal{S}(x) = \text{tgh}(x) \approx x - \frac{1}{3}x^3$,

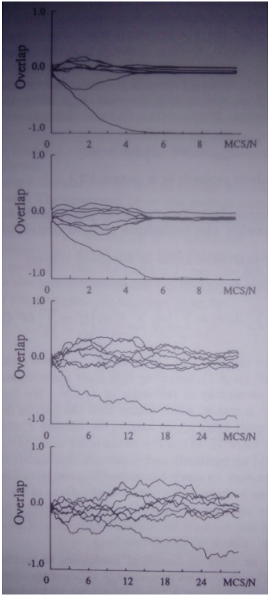
$$M^\nu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \xi_i^\nu \left(\beta\xi_i^\nu M^\nu - \frac{1}{3}\left(\beta\xi_i^\nu M^\nu\right)^3\right) = M^\nu \beta \left(1 - \frac{1}{3}(\beta M^\mu)^2\right). \tag{7}$$

Równ. (7) ma rozwiązania

$$\begin{aligned} M^\nu &= 0 \\ M^\nu &= \pm\sqrt{\frac{3(\beta-1)}{\beta^3}} \end{aligned} \tag{8}$$

- Rozwiązanie (8) odpowiada stanowi ferromagnetycznemu i rozpoznaniu wzorca,
- Rozwiązanie ferromagnetyczne istnieje dla temperatur niższych od **temperatury krytycznej** $\beta > \beta_c = 1$ $(\beta^{-1} < \beta_c^{-1} = 1)$,
- Uwaga: dla $\mathcal{S}(x) = \text{erf}(x)$ analogiczne przybliżenia dają $\beta_c = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$.

Dla $\beta > 1$ rozwiązania ferromagnetyczne (8) są **stabilnymi** atraktorami punktowymi, tj. mają niezerowe obszary przyciągania.



Rysunek: Wpływ szumu na rozpoznawanie wzorca w sieci Hopfielda z $N = 400$ neuronami. Zapamiętano 8 nieskorelowanych wzorców, na rysunku przedstawiono przekrycie obserwowanego stanu sieci $I(t)$ z każdym ze wzorców. Dynamika Glaubera z szumem termodynamicznym. Temperatury (od góry) $\beta^{-1} = 0, 0.50, 0.80, 0.95$. Widać zmniejszenie szybkości rozpoznania wzorca (critical slowing down) i wartości przekrycia ze wzrostem temperatury (dla sieci z szumem termicznym $\beta_c^{-1} = 1.0$).

- Dla $\beta < 1$ układ równań (4) ma również inne punkty stałe, w ogólności odpowiadające **stanom pasożytniczym**, tj. kombinacjom liniowym zapamiętanych wzorców,
- Na przykład można łatwo wykazać, że istnieją punkty stałe w postaci symetrycznych kombinacji q wzorców zapamiętanych ($q \leqslant P$),

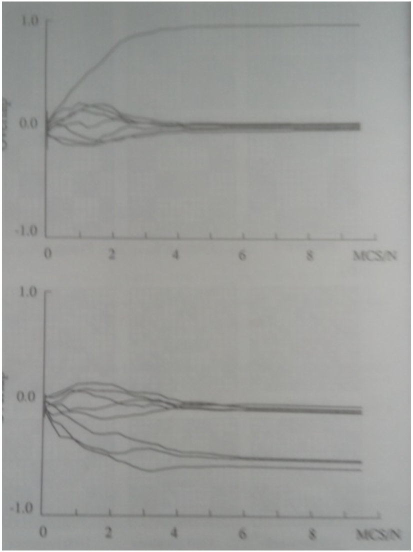
$$M^\mu = \frac{M}{\sqrt{q}}, \ \mu = 1, 2, \dots q; \quad M^\mu = 0, \ \mu = q+1, q+2, \dots P.$$

  Takie punkty stałe mają węższy zakres stabilności niż stany ferromagnetyczne, np.
    - stany z q parzystymi są niestabilne,
    - stany z $q = 3$ są stabilne dla $\beta^{-1} < 0.461$ (najbardziej stabilne stany pasożytnicze),
    - stany z $q = 5$ są stabilne dla $\beta^{-1} < 0.385, \dots$
- Istnieją również punkty stałe w postaci niesymetrycznych kombinacji zapamiętanych wzorców, o różnym zakresie stabilności.

Badanie stabilności punktów stałych układu równań (4) odbywa się standardowymi metodami, znanymi np. z wykładu Dynamika układów nieliniowych, ale jest dość czasochłonne ze względu na konieczność uśredniania po wszystkich neuronach w sieci i po różnych realizacjach zapamiętanych wzorców; szczegóły mozna znaleźć w pracy D. J. Amit, H. Gutfreund, H. Sompolinsky, *Phys. Rev. A* **32**, 1007 (1985).

Stany pasożytnicze

W niskich temperaturach (przy małym szumie) sieć może osiąść w stanie pasożytniczym.



Rysunek: Rozpoznawanie wzorca w sieci Hopfielda z $N = 100$ neuronami. Zapamiętano 8 nieskorelowanych wzorców, na rysunku przedstawiono przekrycie obserwowanego stanu sieci $I(t)$ z każdym ze wzorców. Dynamika Glaubera bez szumu, $\beta^{-1} = 0$. W zależności od stanu początkowego $I(0)$ sieć prawidłowo rozpoznaje jeden z zapamiętanych wzorców (góra) lub ewoluuje w stronę stanu pasożytniczego, będącego mieszaniną 3 zapamiętanych wzorców. Kombinacje liniowe 3 zapamiętanych wzorców są najbardziej stabilnymi stanami pasożytniczymi.