Road To The 3rd Building Review

可以考虑对序列中的每个数分别计算对期望的贡献。

首先计算第 i 个数在多少个长度为 j 的子段中出现。这样的子段可能的最左端为 $i-j+1$，可能的最右端为 $i+j-1$。需分情况讨论：

- 当 $j \le i \le n-j+1$ 时，出现次数为 j，这种情况是所有长度为 j 的子段均存在，根据 $j \le i$ 还可知 $n+1-i \le n+1-j$，因此 $j \le i \le n-j+1 \le n+1-i$；
- 当 $i < j$ 且 $i \le n-j+1$ 时，出现次数为 i，这种情况是所有长度为 j 的子段可能的最左端超出原序列，但可能的最右端不会超出，根据 $i < j$ 可知 $n+1-j < n+1-i$，因此 $i < j, i \le n+1-j < n+1-i$；
- 当 $i \ge j$ 且 $i > n-j+1$ 时，出现次数为 $n-i+1$，这种情况是所有长度为 j 的子段可能的最左端不会超出原序列，但可能的最右端超出了原序列，根据 $j \le i$ 还可知 $n+1-i \le n+1-j$，并且根据 $i > n-j+1$ 可知 $j > n-i+1$；
- 当 $i < j$ 且 $i > n-j+1$ 时，出现次数为 $n-j+1$，这种情况是所有长度为 j 的子段可能的最左端和最右端都会超出原序列的情况，根据 $i < j$ 可知 $n+1-i > n+1-j$。

综上，可知第 i 个数在长度为 j 的出现次数为 $\min\{i, j, n+1-i, n+1-j\}$，因此期望式为

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\min\{i,j,n+1-i,n+1-j\}}{j}}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

后按行分段考虑 $\min\{i, j, n+1-i, n+1-j\}$ 的取值即可，线性预处理逆元后计算过程为线性复杂度。

时间复杂度：$\mathcal{O}(n)$，空间复杂度：$\mathcal{O}(n)$。

（没啥意义的 bonus：第三组样例是 osu! 的一些谱面编号 :)

Little rabbit's equation

简单模拟。

注意 `0 + 0 = 0` 下不能输出 `1`；

注意 爆 `int`

注意 答案要比数字的每一位大。

Borrow

设钱较少的两人差钱最多的人分别x，y单位的钱，设$dp[x][y]$为达到平均状态的期望次数，$dp[0][0]=0$。暂且设$x>y$, 那么转移分以下三种情况: 如果$y>1$，那么 $dp[x][y]=1+\frac{1}{2}(dp[x-2][y-1]+dp[x-1][y-2])$。 如果$y=1$，那么 $dp[x][1]=1+\frac{1}{2}(dp[x-2][0]+dp[x][1])$ 即$dp[x][1]=2+dp[x-2][0]$。 如果$y=0$，那么 $dp[x][0]=1+\frac{1}{2}(dp[x-1][1]+dp[x+1][2])$。又有$dp[x+1][2]=1+\frac{1}{2}(dp[x-1][1]+dp[x][0])$, 那么$dp[x][0]=\frac{3}{2}+\frac{3}{4}dp[x-1][1]+\frac{1}{4}dp[x][0]$即$dp[x][0]=2+dp[x-1][1]$。

由第二种和第三种情况的转移公式，我们可以求出所有$dp[x][0],dp[x][1],dp[0][y],dp[1][y]$的值。想要由起始状态达到最终状态，必须先出现第二种和第三种中的某一种情况，在那之前一定是第一种情况。而第一种情况中，每次$x+y$的变化量都是-3，我们借由组合数可以算出起始状态经过固定次数到达第二种或者第三种状态的概率，答案就是这些概率 乘以 期望值与固定次数的和 的和。

Asteroid in Love

考虑枚举其中两种颜色的点，当确定以这两点形成三色三角形时，另一点的选择就是距离这两个点形成直线的最远点。这个最远点一定在凸包上，若不在凸包上可考虑调整至凸包上一点，到直线的距离将会增大。

观察凸包上的点到直线的距离是一个单峰函数，因此可以三分。或在凸包上二分也可解决这一问题。

时间复杂度：$\mathcal{O}(n^2\log n)$，空间复杂度：$\mathcal{O}(n)$。

Fragrant Numbers

首先长度有一个明显的上界，即n，因为每个位置数字都大于等于1，没有0的存在。

可以进行一个简单的dp, bool $dp[L][R][val]$ 表示 $[L,R]$ 区间内是否能构造出val.

题目中括号、加号、乘号的添加，允许了$dp[L][mid][val1]$ $dp[mid+1][R][val2]$ 向 $dp[L][R][val1+val2]$ 以及 $dp[L][R][val1*val2]$ 转移

由于长度上界为 n ，我们需要枚举 $1\sim n$ 的所有 L , R ,再加上两个值的枚举，复杂度 $O(n^4)$

简单验证小情况，发现，在n较小的情况下，仅3和7无法构造出来。对于其他情况，答案都小于13

可以猜测长度的上界不大，我们不再将 L 和R 枚举到 n ,打表验证发现，如果假定长度上界为13，$n\le 5000$ 范围内的所有n，仅 3 和 7 无法出解，而这两个数的确是无法被构造出来的。我们可以确信，对于其他能在这个范围内出解的数，输出出来的解一定是长度最短的答案。

在我们缩小了 L 和 R 的范围后，复杂度缩小至$O(13^2n^2)$，由于 n 较小，可以选择打表或者直接提交这个 $O(13^2n^2)$ 的程序。(后者可能需要一定的常数优化)

A very easy graph problem

题目要求所有白点和黑点最短路的值。 每条边的权值是2^i，我们可以发现对于第i条边，$2^1+2^2+...+2^{i-1}<2^i$，所以如果两个点能通过前$i-1$条边到达，那肯定比通过第i条更优，所以我们从1到n按顺序建最小生成树。

对于白点和黑点的最短路，我们枚举每条边会被多少种白点和黑点通过，统计两侧的黑白点个数，计算贡献即可。

A very easy math problem

$\sum_{a_1=1}^n\sum_{a_2=1}^n\cdots\sum_{a_x=1}^n\left(\prod_{j=1}^x a_j^k\right)f(\gcd(a_1,a_2,\ldots,a_x))\cdot\gcd(a_1,a_2,\ldots,a_x)$

令 $S(n)=\sum_{a_1=1}^n\sum_{a_2=1}^n\cdots\sum_{a_x=1}^n\left(\prod_{j=1}^x a_j^k\right)=(\sum_{i=1}^n i^k)^x$

$\sum_{d=1}^n f(d)\sum_{p=1}^{\frac{n}{d}}\mu(p)p^{kx}S(\frac{n}{pd})$

$\sum_{T=1}^n S(\frac{n}{T})\sum_{p|T}\mu(p)p^{kx}f(\frac{T}{p})(\frac{T}{p})^{kx}$

$\sum_{T=1}^{n} S(\frac{n}{T}) \sum_{p|T} \mu(p) f(\frac{T}{p}) T^{kx}$

Smooth numbers

其中$f(x) = |\mu(x)|$可以写成$\mu(x)^2$, 而且本题没有卡时间，可以 $nlogn$ 对卷积和 i^k 的前缀和进行预处理，$\sqrt{n}$ 的时间回答每次询问，总时间复杂度 $O(nlogn + T\sqrt{n})$

由容斥原理得答案为

$$n + \sum_{m_i > k} \mu(i) \lfloor n/i \rfloor$$

其中m_i为i的最小质因子，μ为默比乌斯函数。

进行整除分块并利用min25筛的中间结果即可。

注：min25在筛μ的时候比较特殊，第二步可以写成和第一步差不多的形式，即不递归，使用两个`for`从$\sqrt{n}$算到k

暴力计算$S(n, j)$在$k \leq 100$的时候比较慢。但因为$k \leq 100$时答案不超过3×10^6，可以暴力。

Divisibility

原命题等价于：对于任意的 b 进制正整数 $y = \overline{c_1 c_2 \cdots c_n}$，如果 $c_1 + c_2 + \cdots + c_n \equiv 0 \pmod x$，那么 $y \equiv 0 \pmod x$，否则 $y \not\equiv 0 \pmod x$。

上述命题成立当且仅当 $b \equiv 1 \pmod x$。

证明：

- 当 $b \equiv 1 \pmod x$ 时，有 $y \equiv c_1 b^{n-1} + c_2 b^{n-2} + \cdots + c_n b^0 \equiv c_1 + c_2 + \cdots + c_n \pmod x$，于是上述命题成立。
- 当 $b \not\equiv 1 \pmod x$ 时，假设上述命题成立，有：
  - 若 $x \leq b$，令 $y = 1 \cdot b^1 + (x-1) b^0$，则应有 $y \equiv b + x - 1 \equiv 0 \pmod x$，即 $b \equiv 1 \pmod x$，但此时 $b \not\equiv 1 \pmod x$，出现矛盾，于是上述命题不成立。
  - 若 $x > b$，令 $y = x = \overline{c_1 c_2 \cdots c_n}$，显然 $c_1 + c_2 + \cdots + c_n \not\equiv 0 \pmod x$，于是 $y \not\equiv 0 \pmod x$，但 $y \equiv 0 \pmod x$，出现矛盾，于是上述命题不成立。

综上，上述命题成立当且仅当 $b \equiv 1 \pmod x$。

Expectation

题目是求随机选出一个生成树的权值期望，突破点在于生成树的权值定义，是树上所有边权按位与之后的结果。期望最基础的性质就是期望的和等于和的期望，即$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$。知道这个性质那么有一个很正常的想法就是拆位，因为每一位在按位与的过程中都是相互独立的。

现在我们直接枚举二进制的每一位i，对于这一位，如果$w_{u,v}$的第i位不为0，那么我们就直接在u, v直接连一条边。那么对于这张新图，每有一个生成树，那么都会对答案贡献$\frac{2^i}{sum}$，sum是指原图中生成树的个数。用无向图的矩阵树定理就能求出生成树的个数，这道题的整体复杂度是$O(Tn^3 \log w)$。

Kirakira

不存在三点共线时使用极角排序维护两侧点不出现的概率并对每条有向线段单独计算贡献即可。

考虑存在n点共线时该直线上的有向线段的贡献：

设直线左侧一个点都不出现的概率为q_L，右侧一个点都不出现的概率为q_R，直线上的点的坐标为c_i，$\times$为叉乘，则贡献为：

$$(q_R(1-q_L)-q_L(1-q_R))\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{r=l+1}^{n}(p_l\prod_{i=1}^{l-1}(1-p_i)c_l\times p_r\prod_{i=r+1}^{n}(1-p_i)c_r)$$

由叉乘的双线性性可以用类似前缀和的东西将该步的复杂度降为线性。总复杂度$O(n^2\log n)$。

注意到没有点出现的概率是0或1可以降低代码量。