

小学数学：分苹果

Friday, July 17, 2020 5:57 PM

18个苹果，分成5堆，每堆数目均不同，问：数目最多的一堆有多少个苹果？

方法一：逐个增加法

∴ 5堆数目不同，且至少有1个苹果

∴ 5堆苹果从少到多排列的话，最少的一堆至少有1个苹果，次少的至少有2个苹果，依次类推。这样可以知道5堆苹果从少到多分别至少有1, 2, 3, 4, 5个苹果。

我们用(1, 2, 3, 4, 5)来表示，全部已经有

$$1+2+3+4+5=15\text{个苹果}$$

完成了分配。这样还剩下 $18-15=3$ 个苹果未分配。

下面考虑如何将这3个苹果在(1, 2, 3, 4, 5)的基础上进行分配。我们可以逐个地把3个苹果加入分配的方法最终实现全部18个苹果的分配，而且每次增加苹果使得5堆苹果的数目是递增的。

在 $(1, 2, 3, 4, 5)$ 的基础上加上一个苹果而且保证分配满足要求的唯一可能是把这一个苹果加入最后一堆，这样我们得到 $(1, 2, 3, 4, 6)$ 。

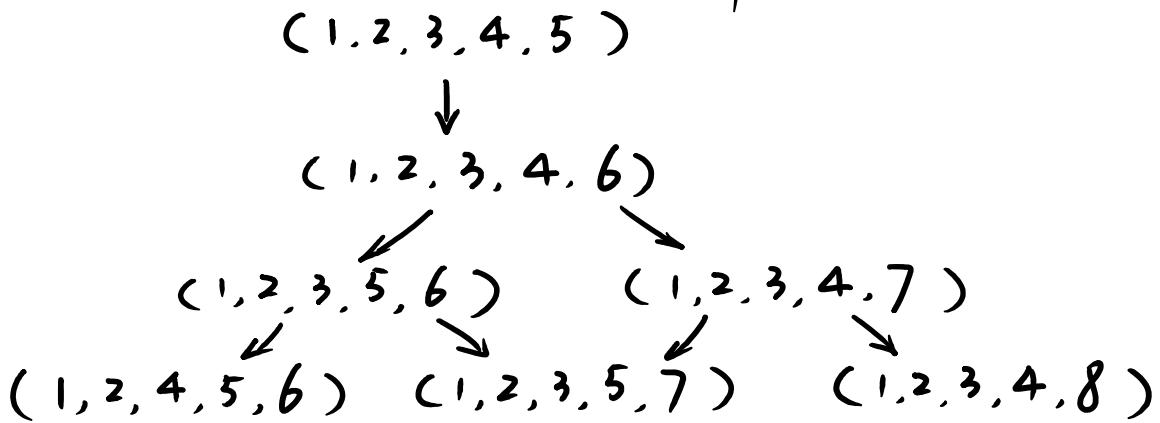
$(1, 2, 3, 4, 6)$ 上继续增加一个苹果，可以加到 4 上或者 6 上。分别得到 $(1, 2, 3, 5, 6)$ 和 $(1, 2, 3, 4, 7)$ 。

$(1, 2, 3, 5, 6)$ 上继续增加一个苹果，可以得到 $(1, 2, 4, 5, 6)$ 和 $(1, 2, 3, 5, 7)$ 。

$(1, 2, 3, 4, 7)$ 上继续增加一个苹果，可以得到 $(1, 2, 3, 5, 7)$ 和 $(1, 2, 3, 4, 8)$ 。

至此，我们找到 4 种分配方式，其中 2 种是相同的。

我们可以用下面的图来记录上述解题过程：



这种从 $(1, 2, 3, 4, 5)$ 开始逐个增加的方法是不是找出了所有可能的分配方式呢？这个有待证明。我们从满足分配 18 个苹果要求的任意一种分配逐个减去来看是否可以最终变

成 $(1, 2, 3, 4, 5)$.

假定 (a, b, c, d, e) 为任意一种把苹果分成数目递增的 5 堆的方案，其中苹果总数至少为 15 个。

如果 $a+b+c+d+e > 15$ ，那么我们必须找到一堆，且是以左边数的第一个这样的一堆，其数目比对应的是 $(1, 2, 3, 4, 5)$ 中给出的相应数字大，即如果是 a ，则 $a > 1$ ；如果是 b ，则 $b > 2$ ，依此类推。因为如果我们找不到这样一堆，必然有：

(a, b, c, d, e) 已经就是 $(1, 2, 3, 4, 5)$ 。一旦找到这样一堆，我们就可以从中取走一个苹果，取后仍然满足这 5 堆苹果的数目还是递增的。如果继续不断地这样去取，最终必然发现 5 堆苹果分别是 $(1, 2, 3, 4, 5)$ 的情况。据此，我们只知道从分配 18 个苹果的任意分配方式开始，逐个减少，一定可以变成 $(1, 2, 3, 4, 5)$ 的情况。那么我们把逐个减少的过程反过来就知道对任意的一种满足要求的 18 个苹果的分配 (a, b, c, d, e) 都可以由 $(1, 2, 3, 4, 5)$ 开始通过逐个增加苹果实现。证毕。

\therefore 18 个苹果分成数目递增的 5 堆，分别有 3 种分配方式。数目最多的一堆可能有 6 个、7 个或者 8 个苹

4.

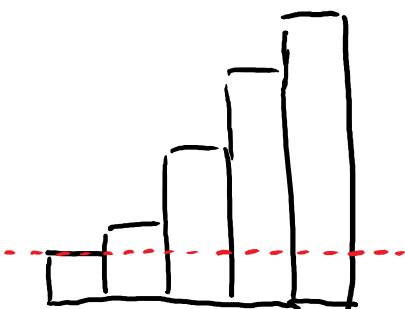
方法二

Friday, July 17, 2020 9:53 PM

方法二：逐步缩减法

此方法是基于如下的观察：

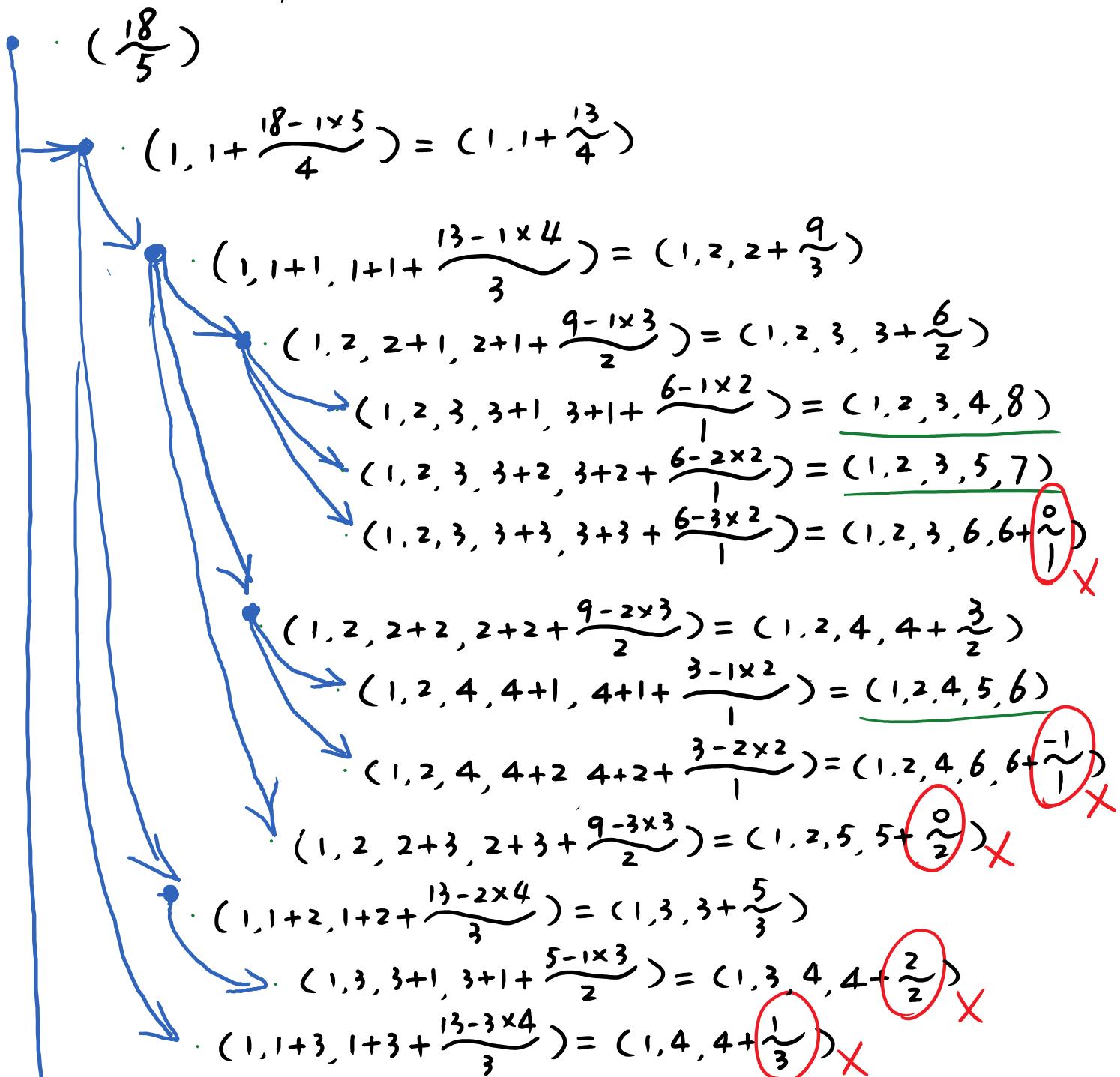
满足要求的分配中，5堆苹果从少到多可以用下图表示：

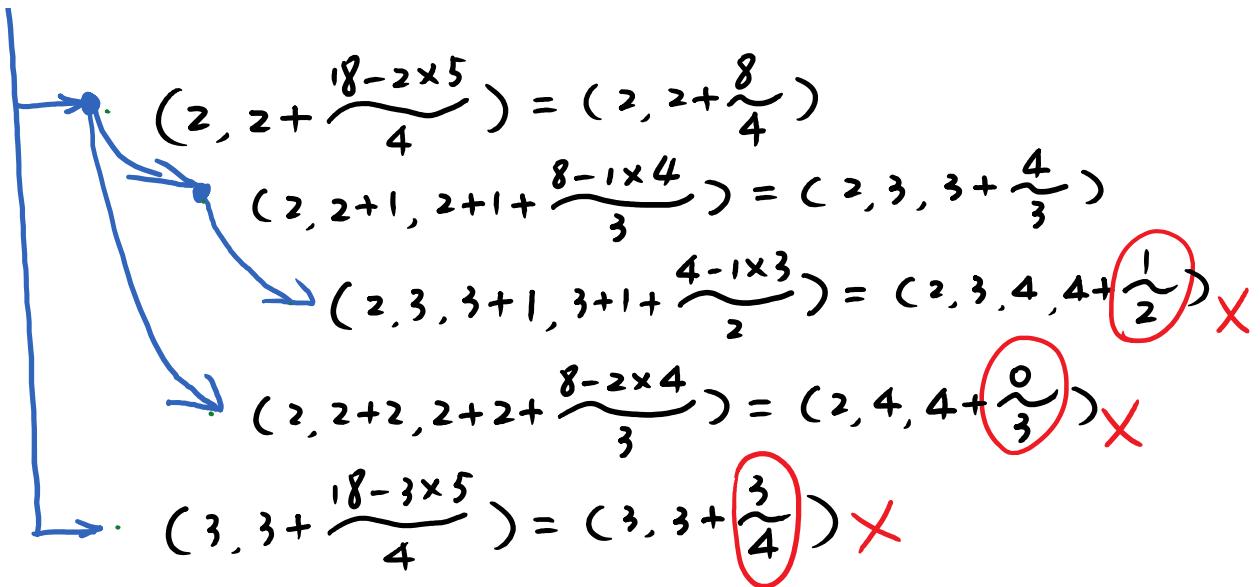


如果从每堆中取与最后一堆数目相等的苹果，相当于如图中用红线切掉5堆公共的高度，剩下4堆苹果，且这4堆仍然是数目递增的。这样我们通过切，可以地将18个苹果分成5堆的问题变成较少数目的苹果分成4堆的问题。依次类推，堆数可以继续减少，直到1堆。

如果我们要用 $\frac{18}{5}$ 来表示18个苹果要分成5堆，我们可以用 $(1, 1 + \frac{13}{4})$ 来表示当5堆中数目最少的一堆有1个苹果时，

5堆都拿走1个苹果，剩下的4堆总共还有13个苹果需要分配。一旦分配完可以把拿走的1个苹果加回到这4堆的最后一个。应用这种表达方法，我们可以把逐步缩减的过程表达如下：





上图把从 $\frac{18}{5}$ 开始缩减的各种情况一一列举，形成树形结构，并在出现不可能满足的分配问题时结束当前分支。

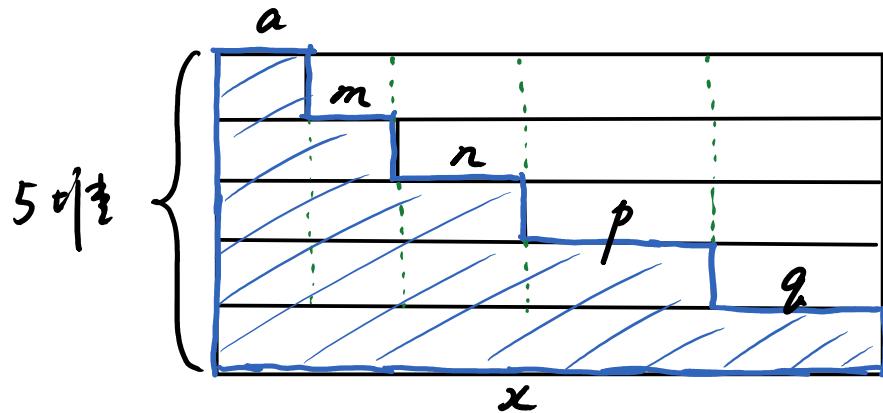
例如： $(3, 3 + \frac{3}{4})$ 表示假设每组只有 3 个苹果时，剩下的 4 个苹果分别拿掉 3 个苹果之后需要把 3 个苹果分成数目递增的 4 组。此为不可能情况。所有出现的不可能情况均用红线圈出。比 3 中的 2. 可能情况更极端的情况均无需继续考虑。

如图所示，找到的满足要求的分配共有 3 种，均用绿线标记，与方法一结果一致。

方法三

Friday, July 17, 2020 9:58 PM

方法三：不等式法



根据要求，5堆苹果可以放到多（依次排列）如上图
阴影部分所示。其中：

a: 第1堆（最少一堆）苹果数目；

m: 第2堆比第1堆多的苹果数目；

n: ... 3 ... 2 ... - ... - ... ;

p: ... 4 ... 3 ... - ... - ... ;

q: ... 5 ... 4 ... - ... - ... ;

x: 第5堆（最多堆）苹果数目。

这样问题就是找出 x 的可能的取值。

根据已知条件，我们知道：

$$\begin{cases} a, m, n, p, q \geq 1 \\ x = a + m + n + p + q \end{cases}$$

阴影部分面积即为革军总数， $18 \downarrow$ 。
 \therefore 阴影部分面积可以表示为：

$$18 = 5a + 4m + 3n + 2p + 1 \cdot q$$

$$\geq 5a + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1$$

$$= 5a + 10$$

$$\therefore a \leq \frac{8}{5}$$

$$\therefore \text{已知 } a \geq 1$$

$\therefore a = 1$ ，即第1堆革军有且仅有1个革军。

(3) 27.

$$\begin{aligned} 18 &= 4a + 3m + 2n + 1 \cdot p + x \\ &\geq 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + x \\ &= 10 + x \\ \therefore x &\leq 8 \end{aligned}$$

(3) 28

$$\begin{aligned} 18 &= 5a + 4m + 3n + 2p + 1 \cdot q \\ &= 5 \cdot 1 + 4m + 3n + 2p + 1 \cdot q \\ &\geq 5 + 4m + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ &= 4m + 11 \\ \therefore m &\leq \frac{7}{4} \\ \therefore \text{已知 } m &\geq 1 \end{aligned}$$

$(a+m)$

$\therefore m=1$, 即第2堆苹果必然有 \downarrow 2个苹果。

(2) 证

$$\begin{aligned}\therefore 18 &= 5a + 4m + 3n + 2p + 1 \cdot q \\ &= 5 + 4 + 3n + 2p + 1 \cdot q \\ &\geq 9 + 3n + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1\end{aligned}$$

$$= 3n + 12$$

$$\therefore n \leq \frac{6}{3} = 2$$

$$\therefore \text{已知 } n \geq 1$$

$\therefore n$ 可能为1或2, 即第3堆苹果可能有3或4个。

根据(1)式, 矩形面积可表示为:

$$\begin{aligned}5x &= 18 + 1 \cdot m + 2n + 3p + 4q \\ &\geq 18 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \\ &= 28\end{aligned}$$

$$\text{即 } x \geq \frac{28}{5}$$

$\therefore x$ 为整数

$$\therefore x \geq 6$$

$$\therefore 6 \leq x \leq 8$$

下面根据 n 和 x 的取值不(3) 分情况分析:

① $n=1, x=6$

分配方式为 $(1, 2, 3, ?, 6)$, 可知其中

? = 18 - (1+2+3+6) = 6. 不滿足遞增條件.

② $n=2, x=6$

分配方式為 $(1, 2, 4, ?, 6)$ 可知 $? = 5$.

找到滿足要求分配: $(1, 2, 4, 5, 6)$.

③ $n=1, x=7$

$$(1, 2, 3, ?, 7) \Rightarrow ? = 5$$

找到滿足要求分配: $(1, 2, 3, 5, 7)$.

④ $n=2, x=7$

$$(1, 2, 4, ?, 7) \Rightarrow ? = 4, 不滿足遞增條件.$$

⑤ $n=1, x=8$

$$(1, 2, 3, ?, 8) \Rightarrow ? = 4$$

找到滿足要求分配: $(1, 2, 3, 4, 8)$.

⑥ $n=2, x=8$

$$(1, 2, 4, ?, 8) \Rightarrow ? = 3, 不滿足遞增條件.$$

∴ 上述31步所有6種情況找出3種分配, 與前述方法結果相同.

方法四

Saturday, July 18, 2020 2:04 AM

方法四：整体增加法

本方法为对方法一的改进。与方法一中的分析相同，有 15 个苹果可确认分配已为 $(1, 2, 3, 4, 5)$ 。还有 3 个苹果待分配。但不同于方法一中的逐个增加法，我们考虑如何把 3 个苹果全部加入分配方案。

$\because (1, 2, 3, 4, 5)$ 中每一堆比前一堆只多 1 个苹果。

\therefore 为保证 5 堆苹果仍递增性，如果要给其中一堆增加若干苹果，必须要给其右的各堆增加至少相同数目的苹果。

\therefore 如果用 $[?, ?, ?, ?, ?, ?]$ 的形式来表示地总共 3 个苹果分配增加到已知的 5 堆 $(1, 2, 3, 4, 5)$ 上，则 $[?, ?, ?, ?, ?, ?]$ 中的数字必须是单调非递减的。

\therefore 只有 3 个苹果可分。

$\therefore [?, ?, ?, ?, ?, ?]$ 必须是 $[0, 0, ?, ?, ?, ?]$ ，即 3 个苹果只能是加到后面 3 堆的全部或部分堆上。

下面分 3 种情况分析：

① 只加到最后一堆上，即 $[0, 0, 0, 0, 3]$ ，可知
 $(1, 2, 3, 4, 5) + [0, 0, 0, 0, 3] = \underline{(1, 2, 3, 4, 8)}$

② 加到最后两堆上。只能是 $[0, 0, 0, 1, 2]$ ，可知
 $(1, 2, 3, 4, 5) + [0, 0, 0, 1, 2] = \underline{(1, 2, 3, 5, 7)}$

③ 加到最后三堆上。只能是 $[0, 0, 1, 1, 1]$ ，可知
 $(1, 2, 3, 4, 5) + [0, 0, 1, 1, 1] = \underline{(1, 2, 4, 5, 6)}$

\therefore 用此方法得到与前述方法相同的結果。
与方法一比較，分析效率更高，不再進行證明。