บทที่ 1

ระบบสมการเชิงเส้น

(Linear Equations System)

ในบทนี้จะศึกษาถึงวิธีการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์มาช่วยในการแก้ปัญหา

ถ้า a, b และ c เป็นค่าคงตัว สมการ

$$ax + by = c \qquad \text{---------} \qquad (1.1)$$

เป็นเส้นตรงในระนาบ xy สมการ (1.1) นี้ เรียกว่า **สมการเชิงเส้น** (linear equation) **ที่มี 2 ตัวแปร**

ในทำนองเดียวกันสมการที่เขียนอยู่ในรูป

$$ax + by + cz = d \qquad \text{---------} \qquad (1.2)$$

เป็น**สมการเชิงเส้นที่มี 3 ตัวแปร** คือ x, y และ z ซึ่งเป็นระนาบ

นอกจากนี้จะเห็นว่าระบบสมการเชิงเส้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ เช่น ระบบสมการเชิงเส้น 2 สมการ 2 ตัวแปร

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ 4x + 5y &= 2 \end{aligned}$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ก่อนอื่นจะขอกล่าวถึงเมทริกซ์และการดำเนินการบนเมทริกซ์ก่อน เพื่อนำไปใช้ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นต่อไป

♦ เมทริกซ์และการดำเนินการบนเมทริกซ์ (Matrices and Matrix Operations)

บทนิยาม 1.1 ให้ $\mathbb{R}$ เป็นเซตของจำนวนจริง ถ้านำสมาชิกของ $\mathbb{R}$ มาเขียนเรียงให้อยู่ในรูปของแถว (row) และแนวตั้ง (column) เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ภายในเครื่องหมาย [ ] หรือ ( ) เรียก A ว่าเป็น **เมทริกซ์ใน $\mathbb{R}$** เขียนแทน A ด้วย $[a_{ij}]$ หรือ $[a_{ij}]_{m \times n}$ และจะกล่าวว่า **A มีขนาด $m \times n$** หรือ **A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์** หรือ **A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$**
สำหรับ a_{ij} คือ สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์ A
เมื่อ $i = 1,2,\ldots,m$ และ $j = 1,2,\ldots,n$

นั่นคือ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

แถวที่ i ของเมทริกซ์ A ประกอบด้วย $[\ a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in}\ ]$

หลักที่ j ของเมทริกซ์ A ประกอบด้วย $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$

แถวของเมทริกซ์ จะเรียกว่า **เวกเตอร์แถว** (row vector)

หลักของเมทริกซ์ จะเรียกว่า **เวกเตอร์หลัก** (column vector)

หมายเหตุ

1. เมทริกซ์ขนาด $1 \times n$ คือเมทริกซ์ที่มี 1 แถว และ n หลัก จะเรียกว่า **เมทริกซ์แถว** (row matrix)

2. เมทริกซ์ขนาด $m \times 1$ คือเมทริกซ์ที่มี m แถว และ 1 หลัก จะเรียกว่า **เมทริกซ์แนวตั้ง** (column matrix)

บทนิยาม 1.2 เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ จะเรียกว่า **เมทริกซ์ศูนย์** (zero matrix) แทนด้วย O

บทนิยาม 1.3 ให้ $[a_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$

ถ้า $m = n$ แล้วจะกล่าวว่า $[a_{ij}]$ เป็น **เมทริกซ์จัตุรัส (square matrix)** ขนาด n

ตัวอย่าง 1.1 ให้ $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, และ $C = [3]$

จะได้ว่า A เป็นเมทริกซ์ศูนย์ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด 3 และ C เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด 1 □

การเท่ากันของเมทริกซ์

บทนิยาม 1.4 จะกล่าวว่าเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ **เท่ากับ** เมทริกซ์ $B = [b_{ij}]_{p\times q}$ เขียนแทนด้วย $A = B$ ก็ต่อเมื่อ

(1) ขนาดของ A เท่ากับขนาดของ B นั่นคือ $m = p$ และ $n = q$

และ (2) สมาชิกในแถวที่ i หลักที่ j ของ A เท่ากับสมาชิกในแถวที่ i หลักที่ j ของ B ทุกค่า i และ j นั่นคือ $a_{ij} = b_{ij}$ ทุก $1 \le i \le m$ และ $1 \le j \le n$

ตัวอย่าง 1.2 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 8 & 2 & 3 \end{bmatrix}$,

และ $D = \begin{bmatrix} x & -1 & y \\ 8 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $A \neq B$ เพราะ $a_{22} \neq b_{22}$

$A \neq C$ เพราะ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2 แต่ C เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×3

$C = D$ ก็ต่อเมื่อ $x = 4$ และ $y = 0$ □

การบวกของเมทริกซ์

บทนิยาม 1.5 ให้ $A = [\, a_{ij} \,]_{m \times n}$ และ $B = [\, b_{ij} \,]_{m \times n}$ **ผลบวกของ A และ B** เขียนแทนด้วย A+B คือ $[\, a_{ij} + b_{ij} \,]_{m \times n}$

การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง

บทนิยาม 1.6 ถ้า $A = [\, a_{ij} \,]_{m \times n}$ และ c เป็นค่าคงตัว แล้ว $cA = [\, ca_{ij} \,]_{m \times n}$ และจะเขียน $-A$ แทน $(-1)A$ และ $A - B$ แทน $A+(-B)$

ตัวอย่าง 1.3 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -7 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ และ

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

1. หา A - 2B 2. หา A + C

วิธีทำ

การคูณเมทริกซ์

บทนิยาม 1.7 ถ้าให้ $A = [\ a_{ij}\ ]_{m \times p}$ และ $B = [\ b_{ij}\ ]_{p \times n}$ แล้วผลคูณของ A และ B เขียนแทนด้วย AB คือ เมทริกซ์ $C = [\ c_{ij}\ ]$ ซึ่งมีขนาด m x n โดยที่

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$$

เมื่อ $i = 1,2,\ldots,m$ และ $j = 1,2,\ldots,n$

นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{ip}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 1.4 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา AB

วิธีทำ เนื่องจาก A เป็นเมทริกซ์ขนาด 4×3 และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×2
ดังนั้นได้จำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B
ทำให้สามารถหา AB ได้และเป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด 4×2 ดังนี้

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ ตัวอย่าง 1.4 นี้เราไม่สามารถหา BA เพราะว่าจำนวนหลักของ B ไม่เท่ากับจำนวนแถวของ A

ตัวอย่าง 1.5 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

จงหา AB และ BA

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.6 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา AB และ BA

วิธีทำ เนื่องจากเมทริกซ์ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีขนาด 2×2
ดังนั้นสามารถหา AB และ BA ได้ ดังนี้

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$ □

ข้อสังเกต 1. จากตัวอย่าง 1.5 และ 1.6 จะเห็นได้ว่า $AB \neq BA$

2. ถ้าเมทริกซ์ A มีขนาด $m \times n$ และเมทริกซ์ B มีขนาด $r \times s$
แล้ว AB จะหาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ $n = r$
และ BA จะหาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ $s = m$

♦ สมบัติทางพีชคณิตของการดำเนินการของเมทริกซ์ (Algebraic Properties of Matrix Operations)

สมบัติของเมทริกซ์สำหรับการบวก

ทฤษฎีบท 1.1 ให้ A, B และ C เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ จะได้ว่า

1. การสลับที่สำหรับการบวก :
   $A + B = B + A$
2. การเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการบวก :
   $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. การมีเอกลักษณ์สำหรับการบวก :
   $A + O = A = O + A$ เมื่อ O เป็นเมทริกซ์ศูนย์ ขนาด $m \times n$

ทฤษฎีบท 1.2 ให้ O เป็นเมทริกซ์ศูนย์ ขนาด $m \times n$ สำหรับเมทริกซ์ A ขนาด $m \times n$ ใดๆ จะมีเมทริกซ์ B ซึ่ง

$$A + B = O = B + A$$

เรียกเมทริกซ์ B นี้ว่าเป็น **เมทริกซ์ผกผัน (inverse) ของ A** สำหรับการบวก และเขียนแทนด้วย - A นั่นคือ

การมีผกผันสำหรับการบวก :

$$A + (-A) = O = (-A) + A$$

ตัวอย่าง 1.7 ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 8 & -15 & -7 \end{bmatrix}$ จะได้ $-A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -8 & 15 & 7 \end{bmatrix}$

ซึ่งทำให้ $A + (-A) = O$ □

ทฤษฎีบท 1.3 ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาดเดียวกันถ้า α และ β เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้วจะได้ว่า

1. การกระจายสำหรับเมทริกซ์ :
   $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
2. การกระจายสำหรับสเกลาร์
   $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
3. การเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการคูณด้วยสเกลาร์ :
   $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A)$

สมบัติของเมทริกซ์สำหรับการคูณ

ทฤษฎีบท 1.4 ถ้า A, B และ C เป็นเมทริกซ์ ซึ่งสามารถหา AB และ BC ได้ แล้วจะได้ว่า การเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการคูณ :

$$(AB)C = A(BC)$$

ตัวอย่าง 1.8 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

จงหา (AB)C และ A(BC)

วิธีทำ เนื่องจาก $AB = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ และ $BC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

จะได้ $(AB)C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ และ $A(BC) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ □

ทฤษฎีบท 1.5

1. ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ และ C เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times p$ แล้ว
   $$(A + B)C = AC + BC$$
2. ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times p$ และ C เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ แล้ว
   $$C(A + B) = CA + CB$$

ทฤษฎีบท 1.6 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ใด ๆ และ O เป็นเมทริกซ์ศูนย์ซึ่งสามารถหาผลบวกและผลคูณได้ แล้ว

$$A\,O = O \quad \text{และ} \quad O\,A = O$$

ทฤษฎีบท 1.7 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$, B เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times p$ และ α เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วจะได้ว่า

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (Transpose of a Matrix)

บทนิยาม 1.8 ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ เมทริกซ์ที่ได้จาก A โดยการเปลี่ยนแถวเป็นหลักและเปลี่ยนหลักเป็นแถว จะเรียกว่า **เมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A** เขียนแทนด้วย A^t ซึ่ง A^t เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times m$

นั่นคือ ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ เมื่อ $i = 1,2,\ldots,m$ และ $j = 1,2,\ldots,n$ แล้ว

$$A^t = [b_{ij}]_{n \times m} \text{ เมื่อ } i = 1,2,\ldots,n \text{ และ } j = 1,2,\ldots,m \text{ โดยที่ } b_{ij} = a_{ji}$$

ตัวอย่าง 1.9 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา A^t

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 1.8 ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาดเดียวกัน และ α เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$
3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

ทฤษฎีบท 1.9 ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ ซึ่งสามารถหา AB ได้ แล้วจะได้ว่า

$$(AB)^t = B^t A^t$$

ตัวอย่าง 1.10 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

จงหา AB, $(AB)^t$, A^t, B^t, B^tA^t และ A^tB^t

วิธีทำ

♦ เมทริกซ์ชนิดพิเศษ (Special Types of Matrices)

บทนิยาม 1.9 ให้ $[a_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n **แนวเส้นทแยงมุมหลัก** (main diagonal) **ของ A** คือ สมาชิก $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$

บทนิยาม 1.10 ถ้า $A = [a_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n ซึ่ง $a_{ij} = 0$ สำหรับทุก $i \neq j$ แล้วจะเรียกเมทริกซ์ A ว่าเป็น **เมทริกซ์ทแยงมุม (Diagonal Matrix)**

ตัวอย่าง 1.11 ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

A เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมขนาด 3 และแนวเส้นทแยงมุมหลักของ A คือ 0, -2, 3 □

บทนิยาม 1.11 เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix) คือ เมทริกซ์ทแยงมุมที่สมาชิกบนแนวเส้นทแยงมุมหลักทุกตัวมีค่าเท่ากับ 1

ดังนั้น ถ้า $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ แล้ว $a_{ii} = 1$ และ $a_{ij} = 0$ ที่ $i \neq j$ เมทริกซ์ เอกลักษณ์ขนาด n เขียนแทนด้วย I_n และ บางทีเขียนแทนสั้น ๆ ด้วย I

นั่นคือ $I_n = [a_{ij}]_{n \times n}$ โดยที่

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \quad i = j \\ 0 & ; \quad i \neq j \end{cases}$$

ตัวอย่าง 1.12 $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

และ

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$ □

ทฤษฎีบท 1.10 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ แล้วจะได้ว่า

$$AI_n = A \text{ และ } I_mA = A$$

เมทริกซ์สามเหลี่ยม (Triangular Matrix)

เมทริกซ์สามเหลี่ยมแบ่งเป็น 2 ชนิด คือ เมทริกซ์สามเหลี่ยมบนและเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.12 เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (upper triangular matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสซึ่งสมาชิกทุกตัวที่อยู่ใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์

เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (lower triangular matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสซึ่งสมาชิกทุกตัวที่อยู่เหนือเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์

ตัวอย่าง 1.13 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า A เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน และ B เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง □

เมทริกซ์ไม่เอกฐาน (Invertible Matrix หรือ Non-singular Matrix)

บทนิยาม 1.13 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n จะกล่าวว่า A **หาตัวผกผันได้** (invertible) หรือ **เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน** (non-singular) ถ้าสามารถหาเมทริกซ์จัตุรัส B ซึ่งทำให้

$$AB = I_n = BA$$

เรียก B ว่าเป็น**เมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณของ A** เขียนแทนด้วย A^{-1} นั่นคือ $B = A^{-1}$

ตัวอย่าง กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น A และ B เป็นเมทริกซ์ผกผันซึ่งกันและกัน □

บทนิยาม 1.14 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด n จะกล่าวว่า A เป็น**เมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix)** ถ้าไม่มีเมทริกซ์ผกผันสำหรับการคูณของ A

ทฤษฎีบท 1.10 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน แล้วเมทริกซ์ผกผันของ A จะมีเพียงเมทริกซ์เดียวเท่านั้น

ตัวอย่าง 1.14 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

วิธีทำ

ข้อสังเกต 1. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน แล้ว $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

2. ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน แล้ว

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 1.11 ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน แล้วจะได้ว่า

1. AB เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน และ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
2. A^{-1} เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน และ $(A^{-1})^{-1} = A$
3. ถ้า a เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า aA เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน และ

$$(aA)^{-1} = a^{-1}A^{-1}$$

บทแทรก 1.12 ถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน แล้วจะได้ว่า

1. $A_1A_2\ldots A_n$ จะเป็นเมทริกซ์ ไม่เอกฐาน
2. $(A_1A_2\ldots A_n)^{-1} = A^{-1}_n A^{-1}_{n-1}\ldots A^{-1}_1$

เมทริกซ์สมมาตรและเมทริกซ์เสมือนสมมาตร

(Symmetric Matrix and Skew Symmetric Matrix)

บทนิยาม 1.15 เมทริกซ์จัตุรัส A จะเรียกว่าเป็น **เมทริกซ์สมมาตร (symmetric matrix)** ถ้า $A^t = A$ นั่นคือ

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = a_{ji}$ สำหรับทุกค่า i และ j

ตัวอย่าง 1.15 เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร □

บทนิยาม 1.16 เมทริกซ์จัตุรัส A จะเรียกว่าเป็น **เมทริกซ์เสมือนสมมาตร** (skew symmetric matrix) ถ้า $A^t = -A$ นั่นคือ
ถ้า $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ และ A เป็นเมทริกซ์เสมือนสมมาตร แล้ว $a_{ij} = -a_{ji}$ สำหรับทุกค่า i และ j

ข้อสังเกต เนื่องจาก $a_{ii} = -a_{ii}$ จึงทำให้ $a_{ii} = 0$ สำหรับทุกค่า i ดังนั้นสมาชิกทุกตัวในแนวเส้นทแยงมุมหลักของ A จึงต้องมีค่าเป็นศูนย์

ตัวอย่าง 1.16 เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & -4 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เสมือนสมมาตร □

ทฤษฎีบท 1.13 ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์สมมาตรขนาด n แล้ว

1. A^2 เป็นเมทริกซ์สมมาตร
2. $A + B$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร

ทฤษฎีบท 1.14 ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใดๆ แล้ว A สามารถเขียนได้ในรูปของผลบวกของเมทริกซ์สมมาตรและเสมือนสมมาตรได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น

ตัวอย่าง 1.16 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 0 & 1 \\ -5 & 9 & -1 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 0 & 1 \\ -5 & 9 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & -4 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \qquad \square$$

เมทริกซ์ย่อยและเมทริกซ์แบ่งกั้น (Submatrices and Partitioned matrix)

บทนิยาม 1.17 ให้ A เป็นเมทริกซ์ใด ๆ **เมทริกซ์ย่อยของ A (submatrix)** คือ เมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวบางแถวหรือหลักบางหลักของเมทริกซ์ A ทิ้งไป

ตัวอย่าง 1.17 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

1. ถ้าตัดแถวที่ 1 และหลักที่ 2 ทิ้งไป จะได้เมทริกซ์ย่อย

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. แถวแต่ละแถวหรือหลักแต่ละหลักของเมทริกซ์ A ก็จะเป็นเมทริกซ์ย่อย เช่น

$$C_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ และ } R_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \square$$

หมายเหตุ เมทริกซ์ A ใดๆ เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ย่อยต่าง ๆ ประกอบกันได้และจะเรียกเมทริกซ์ A นี้ว่า **เมทริกซ์แบ่งกั้น (partitioned matrix)**

เมทริกซ์เชิงตั้งฉาก (Orthogonal Matrix)

ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ จะกล่าวว่า A **เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก** ก็ต่อเมื่อ $A^t = A^{-1}$

ตัวอย่างเช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ จะได้ $A^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = A^{-1}$

ดังนั้น A เป็นเมทริกเชิงตั้งฉาก

จากบทนิยามข้างต้นจะได้ความสัมพันธ์ของแต่ละแถว หรือแต่ละหลักของ A ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.15 ให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ $n \times n$ สิ่งต่อไปนี้สมมูลกัน

1. A เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก
2. เวกเตอร์แถวของ A จะตั้งฉากซึ่งกันและกัน นั่นคือ ถ้า $\vec{u}_i$ และ $\vec{u}_j$ เป็นเวกเตอร์แถวของ A จะได้ $\vec{u}_i \bullet \vec{u}_j = 0$ ทุก $i \neq j$
3. เวกเตอร์หลักของ A จะตั้งฉากซึ่งกันและกัน นั่นคือ ถ้า $\vec{v}_i$ และ $\vec{v}_j$ เป็นเวกเตอร์หลักของ A จะได้ $\vec{v}_i \bullet \vec{v}_j = 0$

แบบฝึกหัด 1.1

1. กำหนดให้ $\begin{bmatrix} a+b & 2c+d \\ a-b & c-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ a, b, c และ d

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ และ c = -2 , d = 4

   จงหา cA + dB

3. จงหา AB และ BA ถ้าสามารถหาได้ เมื่อกำหนด

   $A = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

4. จงหาเมทริกซ์ A ถ้ากำหนดให้ 2A – 3B + 2C = 0 เมื่อ

   $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

คำตอบแบบฝึกหัด 1.1

1. a = 2 , b = 1 , c = 3 , d = -1

2. $\begin{bmatrix} -26 & 20 \\ 12 & -6 \\ 22 & 18 \end{bmatrix}$

3. AB ไม่สามารถหาได้ และ $BA = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ -22 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 13/2 & -5 \\ 0 & 27/2 \end{bmatrix}$

♦ การดำเนินการตามแถว (Elementary row operation)

บทนิยาม 1.18 การดำเนินการตามแถว คือ การดำเนินการอย่างใดอย่างหนึ่ง ต่อไปนี้

1. สลับที่ระหว่างแถวที่ i กับแถวที่ j เมื่อ $i \neq j$ เขียนแทนด้วย $R_i \leftrightarrow R_j$
2. คูณแถวที่ i ด้วยจำนวนจริง $c \neq 0$ เขียนแทนด้วย $R_i \to cR_i$ หรือ cR_i
3. แทนที่แถวที่ j ด้วยผลบวกของแถวที่ j กับ c เท่าของแถวที่ i โดยที่ $c \neq 0$

เขียนแทนด้วย $R_j \to R_j + cR_i$ หรือ $R_j + cR_i$

บทนิยาม 1.19 ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่ได้จาก A โดยการดำเนินการตามแถวกับ A ต่อเนื่องกันไปเป็นจำนวนครั้งจำกัด จะกล่าวว่า **B สมมูลตามแถว (row equivalent) กับ A** เขียนแทนด้วย $A \overset{\text{row}}{\sim} B$ หรือ $A \sim B$

ตัวอย่าง 1.18 ให้เมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & 8 \\ -2 & -4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

1. $A \overset{R_1 \leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A \overset{3R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 15 & 21 & 24 \\ -2 & -4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

3. $A \overset{R_3+2R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & -10 & 7 & 14 \end{bmatrix}$ □

เมทริกซ์ขั้นบันได (Row echelon matrix)

บทนิยาม 1.20 เมทริกซ์ขั้นบันไดหรือเมทริกซ์ลดรูปตามแถว หมายถึง เมทริกซ์ที่มีสมบัติต่อไปนี้

1. ในแต่ละแถวสมาชิกตัวแรกที่ไม่เป็นศูนย์ต้องเป็นหนึ่ง เรียกว่า **สมาชิกนำ** หรือ **สมาชิกโดดเด่น**
2. จำนวนศูนย์ที่มาก่อนสมาชิกนำในแต่ละแถวจะต้องน้อยกว่าจำนวนศูนย์ที่มาก่อนสมาชิกนำในแถวถัด ๆ ลงไป
3. แถวที่เป็นศูนย์ทั้งหมด (ถ้ามี) จะอยู่ตอนล่างของเมทริกซ์

ตัวอย่าง 1.19 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่าเมทริกซ์ B, D และ E เป็นเมทริกซ์ขั้นบันได □

หมายเหตุ หนังสือบางเล่มให้นิยามเมทริกซ์ขั้นบันไดในข้อ 1 ต่างออกไป กล่าวคือสมาชิกนำไม่จำเป็นต้องเป็น 1

ตัวอย่าง 1.20 จงทำการดำเนินการตามแถวบนเมทริกซ์ A จนได้เมทริกซ์ขั้นบันได เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 4 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 4 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 1.20 จะได้ว่า ถ้าเราดำเนินการตามแถวต่อก็จะได้เมทริกซ์ขั้นบันไดอีกแบบหนึ่งดังนี้

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 16/13 & 4/13 & 1/13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 16/13 & 4/13 & 1/13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C$$

ดังนั้นจะได้ $A \sim C$ เพราะฉะนั้น C ก็เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดของ A เช่นเดียวกัน

ทฤษฎีบท 1.15 สำหรับเมทริกซ์ A ใด ๆ เมื่อดำเนินการตามแถวจนได้เมทริกซ์ขั้นบันไดแล้ว**จำนวนแถว**ที่สมาชิกไม่เป็นศูนย์ทั้งแถว จะมีจำนวนเท่ากันเสมอ และเรียกจำนวนดังกล่าวว่า **ค่าลำดับชั้น** (rank) ของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย rank A
ถ้า A เป็นเมทริกซ์ศูนย์แล้วจะให้ rank $A = 0$

ตัวอย่าง 1.21 จากตัวอย่าง 1.20 เนื่องจาก

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 4 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 16/13 & 4/13 & 1/13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

และ B เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดของ A ดังนั้นได้ rank $A = 3$ □

ข้อสังเกต

1. ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขั้นบันได แล้วการหา rank A ก็นับจำนวนแถวที่ไม่เป็นศูนย์ทั้งแถวของ A ได้เลย
2. แต่ถ้า A ไม่เป็นเมทริกซ์ขั้นบันได เราต้องหาเมทริกซ์ B ที่เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดของ A และนับจำนวนแถวที่ไม่เป็นศูนย์ทั้งแถวของ B แทน

บทนิยาม 1.16 จะเรียกเมทริกซ์ E ว่า **เมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปหรือเมทริกซ์ลดรูปเป็นขั้นตามแถว (Reduced row echelon matrix)** ถ้า

1. E เป็นเมทริกซ์ขั้นบันได
2. สมาชิกในหลักเดียวกับสมาชิกนำต้องเป็นศูนย์ทุกตัว ยกเว้นสมาชิกนำ

ตัวอย่าง 1.22 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า A และ D เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูป ส่วน B เป็นเมทริกซ์ขั้นบันได □

ตัวอย่าง 1.23 จงทำการดำเนินการตามแถวบน A จนได้เมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูป เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 20 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{bmatrix}$$

และหา rank A

วิธีทำ

ทฤษฎีบท 1.16 ทุกเมทริกซ์จะสมมูลตามแถวกับเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปเพียงเมทริกซ์เดียวเท่านั้น

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงพิจารณาว่าเมทริกซ์ใดต่อไปนี้เมทริกซ์ใดเป็นเมทริกซ์ขั้นบันได

1.1 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 1.2 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ 1.3 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.4 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 1.5 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 1.6 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. จงดำเนินการตามแถวบนเมทริกซ์ต่อไปนี้ เพื่อเปลี่ยนให้เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูป

2.1 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 2.2 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

2.3 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ 2.4 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & -6 & 5 \end{bmatrix}$

2.5 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ 2.6 $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

2.7 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & -6 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 2.8 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

3. จงหาค่าลำดับชั้นของเมทริกซ์ต่อไปนี้

3.1 $\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 3.2 $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1/4 \\ 2 & 1/2 \end{bmatrix}$

3.3 $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -11 & -6 & -6 & 7 \end{bmatrix}$ 3.4 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

3.5 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ -4 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & -5 & 0 \\ 7 & -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ 3.6 $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

คำตอบแบบฝึกหัด 1.2

1. (1.4) , (1.5)

2.1 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2.2 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.5 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 2.7 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

3.1 2 3.3 2 3.5 3

♦ ระบบสมการเชิงเส้น (Linear Equation System)

บทนิยาม 1.17 สมการเชิงเส้น (Linear Equation) คือ สมการที่อยู่ในรูป

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \quad \dots \quad + a_nx_n = b$$

โดยที่ a_i, b เป็นจำนวนจริง และ x_i เป็นตัวแปรหรือตัวไม่รู้ค่า เรียก a_i ว่า **สัมประสิทธิ์** ของ x_i ทุกค่า $i = 1, 2, \dots, n$ และเรียก b ว่า **ค่าคงตัวของสมการ**

ตัวอย่าง 1.24 สมการต่อไปนี้เป็นสมการเชิงเส้น

1. $x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \quad = \quad 7$
2. $2x - y + 4z \quad = \quad 0$
3. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = -1$

สมการต่อไปนี้ไม่เป็นสมการเชิงเส้น

1. $x + 3y^2 \quad = \quad 7$ เพราะมีพจน์ y^2
2. $y - \sin x \quad = \quad 0$ เพราะมีพจน์ $\sin x$
3. $3x + 2y - z + xz \quad = \quad 4$ เพราะมีพจน์ xz
4. $\sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 \quad = \quad -5$ เพราะมีพจน์ $\sqrt{x_1}$ □

ระบบสมการเชิงเส้น m สมการ n ตัวแปร

ระบบสมการเชิงเส้น m สมการ n ตัวแปร คือ ระบบสมการที่อยู่ในรูป

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \quad \text{------ (1.3)}$$

โดยที่ a_{ij} เป็นจำนวนจริง x_i เป็นตัวแปร และ b_i เป็นจำนวนจริงทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, m$ และ $j = 1, 2, \ldots, n$

สามารถเขียนระบบสมการ (1.3) ให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

หรือ $AX = B$ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

และให้เมทริกซ์ $[A:B]$ แทนเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}$

เรียก A ว่า **เมทริกซ์สัมประสิทธิ์** เรียก X ว่า **เมทริกซ์ตัวแปร**
เรียก B ว่า **เมทริกซ์ของค่าคงตัว**และเรียก $[A:B]$ ว่า **เมทริกซ์ที่แต่งเติมแล้ว**

ตัวอย่าง 1.25 ให้

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 7 \end{aligned}$$

ระบบสมการเชิงเส้น 3 สมการ 3 ตัวแปร ข้างบนสมมูลกับสมการเมทริกซ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

และ

$$[A:B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & \vdots\ 1 \\ -1 & 1 & 4 & \vdots -2 \\ 2 & 3 & 0 & \vdots\ 7 \end{bmatrix}$$

□

ผลเฉลย (Solution) ของระบบสมการ (1.3) คือค่าของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ที่เป็นจำนวนจริงทั้งหมดที่สอดคล้องกับระบบสมการ (1.3)

ต่อไปต้องการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น (1.3) โดยใช้เมทริกซ์ด้วยวิธีการดำเนินการตามแถว

การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้การดำเนินการตามแถว

การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นจะง่ายขึ้น ถ้าเราเขียนระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์ และใช้ทฤษฎีของเมทริกซ์ ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.17 ให้ $AX = B$ และ $CX = D$ เป็นระบบสมการเชิงเส้น 2 ระบบ ซึ่งมี m สมการ n ตัวแปร ถ้า $[A:B] \sim [C:D]$ แล้วผลเฉลยของระบบสมการทั้งสองจะมีผลเฉลยชุดเดียวกัน

ตัวอย่าง 1.26 จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

วิธีทำ

$$\begin{array}{rcll} x + y + 2z &=& 9 & ---- \quad (1) \\ 2x + 4y - 3z &=& 1 & ---- \quad (2) \\ 3x + 6y - 5z &=& 0 & ---- \quad (3) \end{array}$$

$$[A:B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 9 \\ 2 & 4 & -3 & \vdots & 1 \\ 3 & 6 & -5 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

(2) - $2 \times (1)$

(3) - $3 \times (1)$ จะได้

$$\begin{array}{rcll} x + y + 2z &=& 9 & ---- \quad (1') \\ 2y - 7z &=& -17 & ---- \quad (2') \\ 3y - 11z &=& -27 & ---- \quad (3') \end{array}$$

$$\underset{R_3+3R_1}{\overset{R_2-2R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 9 \\ 0 & 2 & -7 & \vdots & -17 \\ 0 & 3 & -11 & \vdots & -27 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{2} \times (2')$ จะได้

$$\begin{array}{rcll} x + y + 2z &=& 9 & ---- \quad (1'') \\ y - \frac{7}{2}z &=& \frac{-17}{2} & ---- \quad (2'') \\ 3y - 11z &=& -27 & ---- \quad (3'') \end{array}$$

$$\overset{\frac{1}{2}R_2}{\sim}\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$$

$(3'')$ - $3\times$ $(2'')$ จะได้

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 9 & ---- \quad (1''') \\ y-\frac{7}{2}z &= \frac{-17}{2} & ---- \quad (2''') \\ \frac{-1}{2}z &= \frac{-3}{2} & ---- \quad (3''') \end{aligned}$$

$$\overset{R_3-3R_2}{\sim}\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \end{array}\right]$$

$-2\times$ $(3''')$ จะได้

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 9 & ---- \quad (1''''') \\ y-\frac{7}{2}z &= \frac{-17}{2} & ---- \quad (2''''') \\ z &= 3 & ---- \quad (3''''') \end{aligned}$$

$$\overset{-2R_3}{\sim}\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

จะได้ $z = 3$ เมื่อแทนค่ากลับขึ้นไปจะได้ $y = 2$ และ $x = 1$ จากทฤษฎีบท 1.17 ทำให้ได้ว่าเป็นผลเฉลยของระบบสมการที่กำหนดด้วย ซึ่งเรียกวิธีนี้ว่า **วิธีกำจัดแบบเกาส์** (Gaussian Eliminations) ถ้าเราหยุดการดำเนินการตามแถวที่เมทริกซ์ขั้นบันได และถ้าเราดำเนินการตามแถวต่อจากข้างบนอีกดังนี้

$(1''''')$- $(2''''')$ จะได้

$$\begin{aligned} x+11z &= \frac{35}{2} & ---- \quad (1'''') \\ y-\frac{7}{2}z &= \frac{-17}{2} & ---- \quad (2'''') \\ z &= 3 & ---- \quad (3'''') \end{aligned}$$

$$\overset{R_1 - R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \vdots & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \vdots & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

$(1'''')$- $\frac{11}{2}\times$ $(3'''')$

$(2'''')+$ $\frac{7}{2}\times$ $(3'''')$ จะได้

$$\begin{aligned} x \quad\quad &= 1 \\ y \quad &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\underset{R_2 + \frac{7}{2}R_3}{\overset{R_1 - \frac{11}{2}R_3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นผลเฉลยของระบบสมการที่กำหนดคือ $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

เรียกวิธีนี้ว่า **วิธีการกำจัดแบบเกาส์ – ชอร์ดอง** ถ้าหยุดการดำเนินการตามแถวที่เมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูป และในตัวอย่างนี้ rank A = 3 = rank [A : B] □

ตัวอย่าง 1.27 กำหนดให้

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4w &= 5 \\ x + 3y + 5z + 7w &= 11 \\ x \quad\quad - z - 2w &= -6 \end{aligned}$$

จงหาผลเฉลยของระบบสมการ (ถ้ามี) โดยใช้วิธีกำจัดแบบเกาส์

วิธีทำ เริ่มจากเมทริกซ์ที่แต่งเติมแล้ว ดังนี้

$$[A : B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \vdots & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \vdots & 11 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & \vdots & -6 \end{bmatrix}$$

ผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นจะเป็นไปได้ 3 กรณี คือ

- มีผลเฉลยเดียว
- มีผลเฉลยอนันต์ผลเฉลย
- ไม่มีผลเฉลย

ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.18 สำหรับระบบสมการเชิงเส้น m สมการ n ตัวแปรที่เขียนในรูปเมทริกซ์ได้เป็น $AX = B$ มีผลเฉลย ก็ต่อเมื่อ $\text{rank } A = \text{rank } [A : B] = r$
ถ้า $r = n$ แล้วระบบสมการมีผลเฉลยเดียว
ถ้า $r < n$ แล้วระบบสมการจะมีผลเฉลยอนันต์ผลเฉลย และผลเฉลยนั้นขึ้นกับตัวแปร $n - r$ ตัวแปร

ตัวอย่าง 1.28 จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$
\begin{aligned}
x + y + 2z - 5w &= 3 \\
2x + 5y - z - 9w &= -3 \\
2x + y - z + 3w &= -11 \\
x - 3y + 2z + 7w &= -5
\end{aligned}
$$

โดยใช้การดำเนินการตามแถว

วิธีทำ

การบ้านทบทวน

1. จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + 2w &= 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6w &= 5 \\ 3x + 4y - 5z + 2w &= 4 \end{aligned}$$

2. ให้

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \\ x + ay + 3z &= 2 \end{aligned}$$

จงหาค่า a พร้อมทั้งให้เหตุผลที่ทำให้ระบบสมการนี้

2.1 ไม่มีผลเฉลย 2.2 มีผลเฉลยอนันต์ผลเฉลย 2.3 มีผลเฉลยเดียว

3. จงหาเงื่อนไขสำหรับ a, b และ c ที่ทำให้ระบบสมการข้างล่างนี้มีผลเฉลย

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= a \\ 2x + 6y - 11z &= b \\ x - 2y + 7z &= c \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงเขียนเมทริกซ์แต่งเติม เมื่อกำหนดระบบสมการต่อไปนี้

1.1
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 \qquad &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

1.2
$$\begin{aligned} x_1 \qquad + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

1.3
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1 \\ 2x_2 - x_3 + x_5 &= 2 \\ 2x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

2. จงเขียนระบบสมการเชิงเส้นที่สมนัยกับเมทริกซ์แต่งเติมต่อไปนี้

2.1 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & : & 2 \\ 2 & 1 & 1 & : & 3 \\ 0 & -1 & 2 & : & 4 \end{bmatrix}$ 2.2 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & : & 0 \\ 0 & 1 & : & 0 \\ 1 & -1 & : & 1 \end{bmatrix}$

2.3 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & : & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & : & 1 \end{bmatrix}$ 2.4 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & : & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & 4 \end{bmatrix}$

3. จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

3.1
$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 4 \\ x + 3y - z &= -3 \\ 3x + 4y - z &= 7 \end{aligned}$$

3.2
$$\begin{aligned} 2x + 2y - z &= 9 \\ 2y - z &= 7 \\ x \qquad + z &= 4 \end{aligned}$$

3.3
$$\begin{aligned} -x \qquad + z &= 2 \\ 4x - 3y + 2z &= 16 \\ 3x - 14y + 2z &= -1 \end{aligned}$$

3.4
$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= -1 \\ x + 3y + z &= 4 \\ x + 3y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

3.5 $$\begin{aligned} 3w + x + 7y + 9z &= 4 \\ w + x + 4y + 4z &= 7 \\ -w \qquad - 2y - 3z &= 0 \\ -2w - x - 4y - 6z &= 6 \end{aligned}$$

3.6 $$\begin{aligned} 3x + 2y - 2z &= -3 \\ 2x + 3y - 3z &= -7 \\ -2x + 4y + 2z &= -2 \\ 5x - 2y + 4z &= 15 \end{aligned}$$

4. จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= b_1 \\ x - y + z &= b_2 \\ x + y \qquad &= b_3 \end{aligned}$$ เมื่อ

4.1 $b_1 = -1$, $b_2 = 3$, $b_3 = 3$ 4.2 $b_1 = 5$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$

4.3 $b_1 = -1$, $b_2 = -1$, $b_3 = 3$ 4.4 $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = 3$, $b_3 = \frac{1}{7}$

5. จงหาค่าระดับชั้นและผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

5.1 $$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 3x + 2y - z &= 1 \\ x + y + 2z &= 4 \end{aligned}$$

5.2 $$\begin{aligned} 2x + 2y - z &= 9 \\ 2y - z &= 7 \\ x \qquad + z &= 4 \end{aligned}$$

5.3 $$\begin{aligned} 2x + 3y &= 3 \\ x - 2y &= 5 \\ 3x + 2y &= 7 \end{aligned}$$

5.4 $$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= -1 \\ x + 3y + z &= 4 \\ x + 3y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

5.5 $$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 2 \\ 3x - 2y - z &= 5 \\ 2x - 5y + 3z &= -4 \\ x + 4y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

5.6 $$\begin{aligned} x_3 - x_4 - x_5 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 &= 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 6x_5 &= 4 \end{aligned}$$

6. จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= b_1 \\ x - y + z &= b_2 \\ x + y \qquad &= b_3 \end{aligned}$$

เมื่อ ก. $b_1 = -1$, $b_2 = 3$, $b_3 = 3$ ข. $b_1 = 5$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$

ค. $b_1 = -1$, $b_2 = -1$, $b_3 = 3$ ง. $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = 3$, $b_3 = \frac{1}{7}$

7. จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$\begin{aligned} 3w + x + 7y + 9z &= 4 \\ w + x + 4y + 4z &= 7 \\ -w \qquad - 2y - 3z &= 0 \\ -2w - x - 4y - 6z &= 6 \end{aligned}$$

8. จงหาค่าคงตัว k ที่เป็นไปได้ที่ทำให้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 2x - 2y &= k \end{aligned}$$

ก. ไม่มีผลเฉลย

ข. มีผลเฉลยเพียงชุดเดียว

ค. มีผลเฉลยอนันต์ชุด

9. จงหาเงื่อนไขของ b_1 , b_2 , b_3 และ b_4 ที่ทำให้ระบบสมการต่อไปนี้มีผลเฉลย

9.1
$$\begin{aligned} x - 2y + 5z &= b_1 \\ 4x - 5y + 8z &= b_2 \\ -3x + 3y - 3z &= b_3 \end{aligned}$$

9.2
$$\begin{aligned} 2x + 3y - z + w &= b_1 \\ x + 5y + z - 2w &= b_2 \\ -x + 2y + 2z - 3w &= b_3 \\ 3x + y - 3z + 4w &= b_4 \end{aligned}$$

10. จงหาค่า a พร้อมทั้งให้เหตุผลที่ทำให้ระบบสมการต่อไปนี้

ก. ไม่มีผลเฉลย

ข. มีผลเฉลยอนันต์ชุด

ค. มีผลเฉลยเพียงชุดเดียว

10.1
$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \\ x + ay + 3z &= 2 \end{aligned}$$

10.2
$$\begin{aligned} x + 2y \qquad - 3z &= 4 \\ 3x - y \qquad + 5z &= 2 \\ 4x + y + \left(a^2 - 14\right)z &= a + 2 \end{aligned}$$

คำตอบแบบฝึกหัด 1.3

1\. 1.1 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & 4 & 3 & \vdots & -1 \\ 3 & -1 & -1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$ 1.3 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$

2\. 2.1 $\begin{aligned} x \quad\quad - z &= 2 \\ 2x + y + z &= 3 \\ -y + 2z &= 4 \end{aligned}$ 2.3 $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$

3\. 3.1 $x = 6$, $y = -2$, $z = 3$

3.2 $x = 1$, $y = 5$, $z = 3$

3.3 $x = 61/23$, $y = 20/23$, $z = 107/23$

3.4 $x = -7$, $y = 4$, $z = -1$

3.5 $x = -6$, $y = 10$, $z = -7$, $w = 1$

3.6 $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$

4\. 4.1 $x = 13/3$, $y = -4/3$, $z = -8/3$

4.2 $x = -5/3$, $y = 5/3$, $z = 10/3$

4.3 $x = 3$, $y = 0$, $z = -4$

5.1 ลำดับชั้น 3 $x = 3$, $y = -3$, $z = 2$ 5.2 ลำดับชั้น 3 $x = 3$, $y = -1$

5.3 ลำดับชั้น 3 $x = 2$, $y = 1$, $z = -1$

6\. ก. $x = \frac{13}{3}, y = -\frac{4}{3}, z = -\frac{8}{3}$ ข. $x = -\frac{5}{3}, y = \frac{5}{3}, z = \frac{10}{3}$

ค. $x = 3, y = 0, z = -4$ ง. $x = \frac{41}{42}, y = -\frac{5}{6}, z = \frac{25}{21}$

7\. $w = 1, x = -6, y = 10, z = -7$

8\. ก. $k \neq 6$ ข. ไม่มี ค. $k = 6$

9.1 ก. $b_1 = b_2 + b_3$

10.1 ก. $a = -4$ ข. $a \neq \pm 4$ ค. $a = 4$

♦ ระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ (Homogeneous equation system)

ระบบสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ m สมการ n ตัวแปร คือระบบสมการเชิงเส้นที่อยู่ในรูป $AX = 0$ หรือ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_m x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

จะพบว่า rank $A =$ rank $[A : B]$ เสมอ เพราะ $B = 0$ ดังนั้นระบบสมการนี้มีผลเฉลยแน่นอนอย่างน้อย 1 ผลเฉลยคือ $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ เรียกผลเฉลยชุดนี้ว่า **ผลเฉลยที่สำคัญน้อย** (trivial solution)

สรุป สมการเอกพันธุ์ $AX = 0$ ที่มี m สมการ n ตัวแปร จะได้ว่า

1. ถ้า rank $A = n$ แล้วระบบสมการนี้มีผลเฉลยเดียวคือ $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$
2. ถ้า rank $A < n$ แล้วระบบสมการนี้มีผลเฉลยอนันต์ผลเฉลย

ตัวอย่าง 1.29 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเอกพันธุ์

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ 2x + 5y + 2z &= 0 \\ 3x - y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

วิธีทำ

ตัวอย่าง 1.30 จงหาผลเฉลยของระบบสมการที่กำหนดให้โดยใช้เมทริกซ์ และวิธีการกำจัดแบบเกาส์ – ชอร์ดอง

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ x + 3y + 2z &= 0 \\ 3x + 8y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

วิธีทำ

แบบฝึกหัด 1.4

จงตรวจสอบว่าระบบสมการเอกพันธุ์ ต่อไปนี้มีผลเฉลยที่ไม่เป็นศูนย์ทั้งหมดหรือไม่ พร้อมทั้งแสดงผลเฉลย

1. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 \qquad &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 0 \\ 2x - 3y + z &= 0 \\ 3x - 2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 2x + 2y + 4z &= 0 \\ w \qquad - y - 3z &= 0 \\ 2w + 3x + y + z &= 0 \\ -2w + x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} v + 3w - 2x &= 0 \\ 2u + v - 4w + 3x &= 0 \\ 2u + 3v + 2w - x &= 0 \\ -4u - 3v + 5w - 4x &= 0 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \qquad &= 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

คำตอบแบบฝึกหัด 1.4

1. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$
2. $x = 0, y = 0, z = 0$
3. $w = t$, $x = t$, $y = t$, $t = 0$
4. $x = \frac{7}{2}t - \frac{5}{2}s$, $y = 2t - 3s$, $y = s$, $w = t$
5. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$