对每条约束添加拉格朗日乘子

$\alpha_i \geq 0$.

$$L(w,b,\alpha)=\frac{1}{2}\|w\|^2+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(1-y_i(w^T x_i+b))$$

$\alpha=(\alpha_1;\alpha_2;\cdots;\alpha_m)$

对 w 和 b 求偏导为零

$$\begin{cases} dw = w-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i x_i = w-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i x_i = 0 \\ db = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i = 0 \end{cases}$$

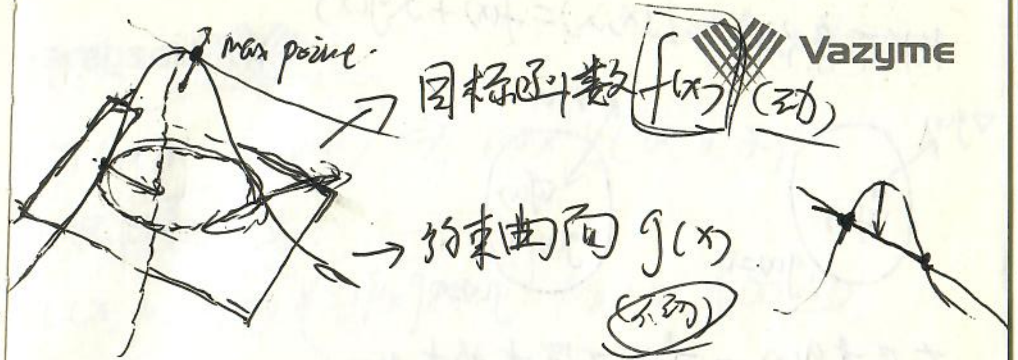
代入 $L(w,b,\alpha)$ 中： （极值点最大）

$$\begin{cases} \max\limits_{\alpha} \sum_{i=1}^{m}\alpha_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\alpha_j y_i y_j x_i^T x_j \\ \text{s.t.} \sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_i \geq 0 \\ y_i f(x_i)-1 = y_i(w^T x_i+b)-1 \geq 0 \\ \alpha_i(y_i f(x_i)-1)=0 \quad (\alpha_i=0 \text{ 或 } y_i f(x_i)-1=0) \end{cases}$$

解出 α 后，求出 w 与 b 即可得到模型.

$$f(x)=w^T x+b = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i x_i^T x + b$$



对于约束曲面上的任意点 x，该点的梯度 $\nabla g(x)$ 正交于约束曲面

对于最优点 x^*，目标函数在该点的梯度 $\nabla f(x^*)$ 正交于约束曲面.

因此在最优点 $\nabla g(x)$，$\nabla f(x^*)$ 的方向必相同或相反，即存在 $\nabla f(x^*)+\lambda\nabla g(x^*)=0$

λ 为拉格朗日乘子：于是定义拉格朗日函数

$L(x,\lambda)=f(x)+\lambda g(x)$

其导数为 0 时的点（等高线），为极值点