Kernel Method. 核方法 (七)

非线性带来高维转换 (从模型角度)
对偶表示带来内积 (从优化角度).

PLA (Perceptron Learning Algorithm) → 多层感知机 (神经网络)

→ 深度学习

Cover Theorem：高维比低维更易线性可分.

通常说的核函数是正定核函数.

$\forall x, z \in \mathcal{X}$, $K(x,z) = \langle \phi(x) \cdot \phi(z) \rangle$ 内积

$K: \mathcal{X} \cdot \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ ⇒ 核函数

正定核：$K: \mathcal{X} \cdot \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$
$\forall x, z \in \mathcal{X}$，有 $K(x,z)$
如果 $\exists$：$\phi: \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$，$\phi \in \mathcal{H}$
s.t. $K(x,z) = \langle \phi(x), \phi(z) \rangle$，则 $K(x,z)$ 为正定核函数

正定核：$K: \mathcal{X} \cdot \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$，$\forall x, z \in \mathcal{X}$，有 $K(x,z)$
如果 $K(x,z)$ 满足如下性质：
① 对称性 ② 正定性
那么称 $K(x,z)$ 为正定核函数.
① 对称性 $\Leftrightarrow K(x,z) = K(z,x)$

要证：$K(x,z) = \langle \phi(x), \phi(z) \rangle \Leftrightarrow$ Gram matrix 半正定

Hibert Space：

完备的，可能是无限维的，被赋予内积的线性空间。
向量空间

对极限是封闭的

$\{K_n\}$ $\lim\limits_{n \to \infty} K_n = K \in \mathcal{H}$

对称性
正定性
线性

$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$
$\langle f, f \rangle \geq 0$
$\langle r_1 f_1 + r_2 f_2, g \rangle = r_1 \langle f_1, g \rangle + r_2 \langle f_2, g \rangle$

必要性：

$K(x,z) \Rightarrow \langle \phi(x), \phi(z) \rangle \Rightarrow$ Gram matrix 半正定.

对称：$K(x,z) = \langle \phi(x), \phi(z) \rangle = \langle \phi(z), \phi(x) \rangle = K(z,x)$

正定：$\begin{pmatrix} K(x_1,x_1) & \cdots & K(x_1,x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_N,x_1) & \cdots & K(x_N,x_N) \end{pmatrix}$

证：$\forall \alpha \in \mathbb{R}^N$，$\alpha^T K \alpha \geq 0$

$\alpha^T K \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_N) \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$