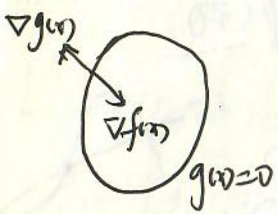
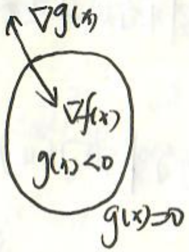
KKT条件 $L(x,\lambda)=f(x)+\lambda g(x)$

Vazyme





在等式 $g(x)=0$ 或在不等式约束 $g(x)\le 0$ 下最小化目标函数 $f(x)$.

$g(x)<0$：

$g(x)<0$ 时，对 $f(x)$ 求极值相当于闭区间求极值，最值点即为极值点，令 $\lambda=0$，直接对 f 求梯度即可得到极值.

$g(x)=0$：

极值点在边界取得，f 的梯度与 g 的梯度相反，从而存在常数 $\lambda>0$，使得 $\nabla f(x^*)+\lambda\nabla g(x^*)=0$

$$\begin{cases} g(x)\le 0 \\ \lambda\ge 0 \\ \lambda g(x)=0 \end{cases}$$

KKT条件是目标函数在约束条件下取得极值的充要条件。目标函数在约束条件下取得极值时对应的 x，λ 必须满足KKT条件。

Vazyme

对偶问题：

① $\min \frac{1}{2}\|w\|^2 \Rightarrow \max L(\nu,b,\alpha)$

对偶问题推导：

$L(x,\mu)=f(x)+\sum_k \mu_k g_k(x) \quad \mu_k\ge 0,\ g_k(x)\le 0.$

$\mu_k\ge 0,\ g_k(x)\le 0 \Rightarrow \mu_k g_k(x)\le 0$

$\max_\mu L(x,\mu)=f(x)$ ①

$\min_x f(x)=\min_x \max_\mu L(x,\mu)$ ②

$\max_\mu \min_x L(x,\mu)=\max_\mu[\min_x f(x)+\min_x \mu g(x)]$

$=\max_\mu \min_x f(x)+\max_\mu \min_x \mu g(x)$

$$\min_x \mu g(x)=\begin{cases} 0, & \mu=0 \text{ or } g(x)=0 \\ -\infty, & \mu>0 \text{ and } g(x)<0 \end{cases}$$

∵ 对 $\min \mu g(x)$ 取 max 时最大只能取0，此时 $\mu=0$ 或 $g(x)=0$ ③

∴ $\max_\mu \min_x \mu g(x)=0 \Rightarrow \mu=0$ or $g(x)=0$

∴ $\max_\mu \min_x L(x,\mu)=\min_x f(x)+0=\min_x f(x)$

称 $\max\min L(x,\mu)$ 为 $\min\max L(x,\mu)$ 的对偶问题，在最优 x^* 处 $\mu=0$ 或者 $=\min_x \max_\mu L(x,\mu)$