西安电子科技大学

硕士学位论文

组合投资模型及其算法研究

姓名：阿春香

申请学位级别：硕士

专业：应用数学

指导教师：刘三阳

20050101

摘 要

投资组合优化理论是现代金融投资理论的重要组成部分，它运用凸分析、随机分析、非光滑优化、（非）线性规划等数学工具，并与现代投资组合理论的基本方法—均值方差方法相结合，通过建立数学模型讨论金融市场投资规律并为个人或机构投资者提供理论指导。本文主要开展了如下几方面的研究：

◆ 概述了几类基本的组合投资优化模型；

◆ 考虑到证券市场的实际条件，对存在交易费及不允许卖空的金融市场，分别建立了选择最优投资组合的相关机会模型和目标规划模型，并针对各个资产交易时交易费的变化情况，从理论上研究了最优投资组合的动态变化规律；

◆ 讨论了模糊环境下具有可信性分布的投资组合问题。引用具有可信性分布的模糊变量，它更好地反映带有人的主观性的收益率，并用集模糊模拟、神经网络和遗传算法于一体的混合智能算法进行求解；

◆ 另外，采用模糊决策变量，突破传统的精确决策变量，并用一定的解模糊方法，模糊规划问题可以退化为简单的线性规划问题，不仅给出问题的最优解，而且提供了最优解周围一定满意程度的潜在解范围，这给实际决策者提供了更大的选择范围。

关键词：投资组合优化　概率准则　M-V 模型　交易费　遗传算法

Abstract

Theory of portfolio optimization is an important part of the modern finance investment theories. Which uses mathematical facilities such as convex analysis, random analysis, nonsmooth analysis, nonlinear programming etc, combined with the mean-variance method—the basic method of modern portfolio theory. By setting up mathematical models, discussed the investment rules of finance market and offers theoretic guide for investors. The main results of the thesis can be summarized as follows:

- Several basic portfolio models have been summarized firstly;
- Considering the real market conditions, Chance-dependence model and Goal-programming model with transaction costs as well as no short sales is developed for optimal portfolio selection and the dynamic rules with transaction costs rate changing is analyzed;
- Secondly the problem of portfolios in uncertainty environment is investigated .The mathematical model for the portfolio selection is established by credibility distribution rather than possibility or probability distribution. We present a hybrid intelligent algorithm for finding an approximate optimal solution which to satisfy investor's aspiration (in the sense of utility scores) to the n-asset portfolio selection problem under credibility distribution. We give an example to show the efficiency of our method.
- The question of portfolio selecting is investigated in the fuzzy environment. In our model, the fuzzy variable is introduced. We give not only the crisp optimal solution but also some regions of potential satisfactory solution around the optimal solution

Key words: Portfolio optimization　Probability Criteria　M-V model　Transactions cost　Genetic Algorithm

创新性声明

本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果；也不包含为获得西安电子科技大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中做了明确的说明并表示了谢意。

申请学位论文与资料若有不实之处，本人承担一切相关责任。

本人签名：阿春香　　　　日期 2005.1.17

关于论文使用授权的说明

本人完全了解西安电子科技大学有关保留和使用学位论文的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属西安电子科技大学。本人保证毕业离校后，发表论文或使用论文工作成果时署名单位仍然为西安电子科技大学。学校有权保留送交论文的复印件，允许查阅和借阅论文；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以允许采用影印、缩印或其它复制手段保存论文。

本人签名：阿春香　　　　日期 2005.1.17

导师签名：刘三阳　　　　日期 2005.1.17

第一章　绪论

金融数学是一门新兴边缘学科，在国际金融界和应用数学界受到高度重视。金融数学是运用概率论、统计学、随机分析及最优化理论等数学工具，通过建立数学模型讨论金融市场规律的一门数学与金融学的交叉学科，它的核心问题是如何在不确定环境下对有效资源进行分配和利用。而证券投资组合优化理论是现代金融投资理论的重要内容，它主要研究股票、债券等（无）风险资产投资分配和风险定价以及对金融市场变化影响的理论。

证券市场是一个高风险的市场。受宏观经济状况、国家政策、企业微观运行情况、甚至投资者心理等各种因素的影响，证券价格经常出现大幅波动。为了预测证券价格的变化，基本分析和技术分析被引入证券分析中。基本分析注重对证券价值的评价和预测，认为市场价格应该是证券价值的反映。技术分析通过证券价格的历史走势来预测其未来的变动方向。其中著名的有艾略特“波浪理论”、“K线分析”、各种技术指标等。

这些理论和方法在实际证券交易中得到了广泛的应用。但是它们的应用对使用者的经验依赖很大。而且，证券市场的波动影响因素众多，预测准确的难度极大。所以，如何在市场难以预测的情况下，规避风险，获得稳定的收益，就成为现代证券投资理论首要关心的问题。

§1.1　金融数学的历史回顾

金融数学的研究对象是金融市场上风险资产的投资和交易，其目的是利用有效的数学工具揭示金融学的本质特征，从而达到对具有潜在风险的各种未定权益的合理定价和选择规避风险的最优策略。现代金融数学被认为是两次“华尔街革命”的产物.第一次“华尔街革命”是指 1952 年马科维茨（Markowtz, H. M.）的证券组合选择理论的问世。第二次“华尔街革命”是指 1973 年布莱克-肖尔斯（Black-Scholes）期权定价公式的问世。两次“革命”的特点之一都是避开了一般经济均衡的理论框架，但他们确实是以华尔街为代表的金融市场引起了“革命”，其直接产物就是一门新兴的交叉学科---金融数学的诞生。

金融数学的历史最早可以追溯到 1900 年法国数学家巴歇里埃（Bachelier L.）的博士论文——“投机的理论”（The Theory of Speculation）[1]。其中首次用 Brown 运动来描述股票价格的变化，这一理论为后来金融学的发展，特别是现代期权定价理论的建立奠定了基础。1944 年 Von Neumann 和 Morgen Stern[2]提出了至少仍

被广泛使用的效用理论，开始了对投资者风险态度的描述。

1952年马科维茨（Markowtz, H. M.）（1990年经济学诺贝尔获得者之一）的博士论文"投资组合的选择（portfolio selection）"是金融学也是金融数学的第一个突破[3]。他考虑这样的问题：如果一名投资者为减少风险而同时对多种股票进行投资，那么怎样的投资组合最好？为解决这一问题，他提出了均值-方差最优投资组合模型.他认为，投资者的目标应该是收益的期望效用最大化，而不仅仅是期望收益最大化。他用收益率的方差来衡量风险，将各证券收益率之间的比例作为变量，从各证券收益率的统计特性出发，先用二次规划确定可供投资者选择的有效投资组合边界，然后根据投资者的效用函数（对收益和风险的权衡）确定最优投资组合。这是一个单阶段的投资组合问题，后来众多学者用动态规划的方法将这一理论推广到多阶段的投资组合问题。

六十年代中期，在马科维茨的均值-方差投资组合理论的基础上，夏普（Sharpe, W. F.）[4]、林特纳（Lintner, J.）[5]和毛新（Mossin, J.）[6]研究了在竞争均衡市场中，金融资产的价格形成，提出了著名的资本资产定价理论（Capital Asset Pricing Model, CAPM）。他们用投资组合（或更一般的资本资产）的价格变化与"市场投资组合"（即按每种证券的市值与市场中证券总市值之比确定权重）的价格变化之间的回归系数来衡量证券交易的风险。他们认为"市场投资组合"是刻画证券市场总体变化的量，理论上可由马科维茨的分析得到，实际计算时可由证券指数得到.他们证明了在均衡市场中，市场投资组合是有效投资组合，每种组合资产的预期收益率和它们与市场投资组合的协方差之间有线性关系，这就是资本资产定价模型.CAPM在证券估价、投资组合的绩效的测定、资本预算和投资风险分析中得到广泛应用。马科维茨，夏普，米勒三人因其在金融学中的巨大贡献（投资组合理论、CAPM 、M-M定理）而获1990年经济学诺贝尔奖。

1965年，法国数学家Fama[7]等提出了有效市场理论。该理论认为在一个正常发挥功能的资本市场，资本价格的运动可以用次鞅过程来描述，它给出了资产价格运动的动力学理论框架和金融市场如何根据外界信息来进行调整的机理，开拓了如何利用统计学方法实证检验信息是如何被反映在债券价格中的新途径。

1969年，Merton开始研究连续情形下的投资消费问题[8-11]。Merton假设投资者效用函数为双曲绝对风险规避函数（HARA），对常系数模型得到了最优投资消费策略显式解。在同样的模型假设下，Karatzas,etal[12]推广了Merton的结果，对投资者的一般性效用函数得到闭式解。随后，Cox and Huang[13,14]，Karatzas,etal[15-17]等利用鞅技术导出了求解投资消费问题的新方法，从而开拓了利用随机最优控制理论和鞅理论等方法来研究连续时间最优投资消费问题的新途径。

1973年布莱克（Fisher Black(1938-1995)）和索尔斯（Myron S. Scholes(1941-)[18]

在“期权定价与公司负债”一文中提出著名的 Black-Scholes 公式.几乎与此同时，默顿（Merton, R.(1944-)）在“合理的期权定价理论”一文中对 B-S 模型和定价公式作了多方面系统的推广。三人在期权定价理论的开创性工作被誉为华尔街的“第二次革命”，默顿和索尔斯因此获得了 1997 年的诺贝尔经济学奖（Black 于 1995 年英年早逝为能分享此项殊荣）。他们的理论和 Markowitz-Sharpe 理论一起，构成了蓬勃发展的新学科—金融数学的主要内容，同时也是研究新型衍生证券设计的新学科—金融工程的理论基础。

1997 年哈里森（Harrison, J. M.）和克瑞普斯（Kreps, S. R.）提出期权定价的鞅方法，他们用鞅论中的鞅测度概念来刻画无套利市场和不完全市场，并用等价鞅测度对期权进行定价和套期保值或对冲.他们证明了市场无套利的充要条件是等价鞅侧度存在，市场完备的充要条件是等价鞅侧度存在且唯一，当市场是完备市场时任意未定权益都是可达到的并且可由市场上的基础证券无套利复制，此时任意未定权益都有唯一的无套利定价，并且未定权益的定价为未定权益期末收益的折现值在等价鞅侧度下的数学期望。这一结果使随机分析中的鞅侧度的概念与金融市场的无套利概念联系起来，从而使随机分析中的半鞅的随机积分理论在金融衍生证券定价理论中有了用武之地，这对以后的金融数学的发展产生了极其深远的影响。

80 年代末，随着金融市场的进一步完善和发展，人们发现前面研究的所有金融模型都假定投资者可得到市场的完全信息，而实际上投资者只可观测到刻画系统状态的价格过程本身，而布朗运动及动态方程的漂移系数是不可观测到的，即投资者只可得到市场的部分信息。于是，基于不完全信息的投资消费问题的研究[44~45,50]成为当今研究的一个热点。

在随后的十几年里，金融学的研究更是受到学术界、国际政界前所未有的重视：1996 年由一批著名的金融学家发起成立的“Bachelier 金融学会”，通过国际交流，推动随机过程，统计学及其他数学理论在金融学科中的运用；另外，一些新的数理金融学杂志（如"Mathematical Finance","Finance and stochastics"等）于 90 年代相继创刊，讨论金融学、经济学、数学等领域内关于金融理论中的数学问题的最新研究成果。人们越来越深刻地认识到：数学已成为金融学研究中随处可见的关键技术，一大批从事数学、理论物理研究的有识之士转向金融学的研究，并很快取得了卓越的成绩。事实上，自 1969 年设立诺贝尔经济学奖以来到 1981 年颁发的 13 个诺贝尔经济学奖中，有 7 个获奖工作是相当数学化的，如 Klein(1980)“设计预测经济变动的计算机模式”，Tobin(1981)“投资决策的数学模型”等等。

可见数学给金融学的研究带来了巨大的活力，数学语言和工具对于进一步发展金融理论是十分有效和必需的，而金融学的发展为数学知识和技巧的运用提供了重要的平台。现在已有越来越多的数学学者加入到金融学的研究行列，并且已

做出了突出的成绩。另一方面，我们对数学的作用做出乐观估计的同时，必须清醒地意识到数学所处的地位，企图把所有金融问题都纳入数学的范畴的想法是不现实的。数学理论和方法对金融学的支持，一定要通过金融学自身的基本理论和基本方法起作用的。数学家和金融学家的通力合作是发展金融学的必由之路。

§1.2 组合投资问题的基本模型

为了更好地分散风险并取得适当的投资收益，投资者往往采用组合投资的方式，即把一笔资金同时投资于若干种不同的证券而不是集中投资于某种证券，这就需要利用恰当的数学模型进行决策分析。本节将扼要介绍几种最基本的也是目前较流行的投资组合选择模型。

1.2.1 Markowitz 组合投资模型

(1) 均值-方差[19-21]模型

它是用均值（即数学期望）来表示收益的好坏，用方差来度量风险的大小。设证券市场上有 n 种证券，记 R_j 为证券 j 的收益率，x_j 为证券 j 上的投资量，u_j 为证券 j 上的投资资金上限，M_0 为投资者的初始财富，记收益的风险函数为 $\sigma(x)$，则 $\sigma(x)=\sqrt{E[\sum_{j=1}^{n}R_jx_j-E(\sum_{j=1}^{n}R_jx_j)]^2}$，故方差风险测度下的投资组合模型(简记为 M-V 模型)为

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_ix_j \\
&s.t.\ \sum_{j=1}^{n}R_jx_j \ge \rho M_0 \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n}x_j = M_0 \\
&\qquad 0 \le x_j \le u_j \quad j=1,2,\cdots,n
\end{aligned}
$$

(2) 均值-绝对离差模型

为解决大规模投资组合最优化问题， Konno 和 Yamazaki[22]，Y. Simaan[23]引

入l_1风险函数，将风险测度定义为：$w(x)=E\left|\sum_{i=1}^{n}R_ix_i-E(\sum_{i=1}^{n}R_ix_i)\right|$，建立了组合投资决策的均值-绝对离差模型（简记为 MAD）：

$$\min\ w(x)=\left|\sum_{i=1}^{n}R_ix_i-E(\sum_{i=1}^{n}R_ix_i)\right|$$

$$\begin{aligned} s.t.\ &\sum_{j=1}^{n}R_jx_j\ge\rho M_0\\ &\sum_{j=1}^{n}x_j=M_0\\ &0\le x_j\le u_j\quad j=1,2,\cdots,n\end{aligned}$$

(3) 最大最小化平均绝对离差模型

在 Yang.M.R [24]提出的最大最小化投资组合选择的线性规划模型的基础上，Cai. X.Q, Teo. K.L 和 Yang. X.Q[25]提出了l_∞风险函数，将风险测度定义为$L(x)=\max\limits_{1\le i\le n}E(|R_i-ER_i|)x_i=\max\limits_{1\le i\le n}q_ix_i$，则在该风险测度下，证券组合投资的最大最小化平均绝对离差模型(简记为 MMAD)为

$$\begin{aligned}\min\ &\left(\max_{1\le j\le n}q_jx_j,\ -\sum_{j=1}^{n}ER_jx_j\right)\\ s.t.\ &\sum_{j=1}^{n}x_j=w_0\\ &x_j\ge0,\ j=1,2,\cdots,n\end{aligned}$$

(4) 均值-半方差模型[26]

如果以低于平均收益的半方差为风险测度，则可建立相应的均值-半方差模型(简记为 E-S 模型)，其模型的数学表达式为:

$$\begin{aligned}\min\ &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_iw_jCov_h^+(R_i,R_j)\\ s.t.\ &\sum_{j=1}^{n}R_jw_j\ge R_0\\ &\sum_{j=1}^{n}w_j=1\end{aligned}$$

(5) 均值-方差-偏度模型

投资者除了希望投资组合具有最大的期望收益，最小的方差外，如果还希望具有最大的偏度 $E[\sum_{i=1}^{n}x_iR_i-E(\sum_{i=1}^{n}x_iR_i)]^3$，则可建立相应的均值-方差-偏度模型

$$
\begin{aligned}
\min\ & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}w_iw_j \\
s.t.\ & E[\sum_{i=1}^{n}x_iR_i-E(\sum_{i=1}^{n}x_iR_i)]^3\geq\gamma \\
& \sum_{j=1}^{n}R_jw_j\geq R_0 \\
& \sum_{j=1}^{n}x_j=1
\end{aligned}
$$

其中 γ 为事先给定的偏度水平。

1.2.2 安全-首要模型

安全-首要模型有三种形式：

(1) Roy-形式

他要求投资组合 P 的收益 $\tilde{r}_p$ 低于给定生存水平 R 的概率达到最小，其数学表达式

$$\min\ P(\tilde{r}_p\leq R)$$

(2) Kataka-形式

投资组合 P 的收益 $\tilde{r}_p$ 低于给定生存水平 R 的概率不超过指定的小概率 α 时，要求它的生存水平达到最大，其数学表达式

$$
\begin{aligned}
& \max\ R \\
& s.t.\ P(\tilde{r}_p\leq R)\leq\alpha
\end{aligned}
$$

(3) Telser’s-形式

投资组合 P 的收益 $\tilde{r}_p$ 低于给定生存水平 R 的概率不超过指定的小概率 α 时，要

求投资组合的期望收益达到最大，其数学表达式

$$\max\ E\tilde{r}_p$$
$$s.t.\ P(\tilde{r}_p \le R) \le \alpha$$

1.2.3 风险价值模型

随着信息技术的迅猛发展和各国创新自由化的浪潮，金融证券市场的波动进一步加剧，市场风险日益凸现，如何有效的预测和控制市场风险成为金融证券机构、投资者和有关监管层所面临的问题。在这种情况下，一种用途广泛，可直接用于测定银行、信托、证券机构和证券投资组合总体风险技术——VaR 方法应运而生。

VaR 指的是在一定的置信度内，由于市场波动而导致整个资产组合在未来某个时期内可能出现的最大价值损失。简言之，是用来测量给定投资工具或组合在未来资产价格波动下可能或潜在的损失。在数学上，它表示为投资工具或组合的损益分布的α分位数，其数学表达式为

$$\Pr(\Delta P_{\Delta t} \le -\mathrm{VaR})=\alpha$$

其中，$\Delta P_{\Delta t}$表示组合 P 在Δt持有期内在置信度$(1-\alpha)$下的市场价值变化，此等式说明了损失值等于或大于 VaR 的概率为α。

VaR 方法能简单清晰地表示市场风险的大小，又有严谨系统的概率统计理论做依托，得到了国际金融界的广泛支持和认可。

§1.3 本文的主要工作和内容安排

投资组合优化理论在国外已经发展了半个多世纪，而在我国是伴随着证券市场的发展而发展起来的，不过才十几年的时间。随着中国加入世贸组织以及全球经济一体化的潮流，我们必须加快在金融与投资领域的研究步伐，进一步加强资本市场的发展与完善，为投资者个人或机构提供理论指导和技术支持。为此本文围绕投资组合优化理论，运用凸分析、最优化理论等数学工具，开展了如下几方面的研究：

第一章概述了金融数学的发展历史，总结了投资组合选择的基本类型，说明了动态投资组合优化的研究意义。

第二章引用亏损概率作为风险测度建立组合投资问题的相关机会模型，并推导出其等价形式及 Kuhn-Tucker 条件。重点引入典型交易成本函数，分析了组合投

资问题的相关机会模型及其遗传算法。

已有的模型通常只考虑所投资产的收益及其风险建立模型，这与实际投资过程的操作不符合。实际投资过程中不可避免有收入税、公司分红等因素，这些因素对实际投资收益和风险都会产生影响。第三章引入典型性交易成本函数形式建立了该问题的目标规划模型，并对模型进行分析。

第四章首先讨论了模糊环境下具有可信性分布的投资组合问题，并用集模糊模拟、神经网络和遗传算法于一体的混合智能算法进行求解。由于在实际组合投资的选择过程中，投资者并不一定要求必须得到精确的最优组合，更多情况下投资者期望达到一定满意程度的组合，而混合智能算法恰能很好地满足这一要求，因此在实际应用中具有一定的优越性。另外，采用模糊决策变量，突破传统的精确决策变量，并用一定的解模糊方法，模糊规划问题可以退化为简单的线性规划问题，不仅给出问题的最优解，而且提供了最优解周围一定满意程度的潜在解范围，这给实际决策者提供了更大的选择范围。

第二章 组合投资问题的相关机会模型

1952 年，Markowitz 的“ 组合投资模型—M-V 模型”的建立为人们进行组合投资理论研究和实际应用奠定了基础。国内外学者对组合投资问题已有很多研究，对 M-V 模型做了许多改进，建模及其求解过程中均假设投资者是理性的，即投资者具有“收益宁多勿少”和“风险宁少勿多”或回避风险的特征。但现实生活中，投资者并非完全按照理性原则进行决策，有时为达到一定的目标而采取带有较大风险的行为。一般讲，投资者的预期收益越大，他所应承担的风险也就越大。不同投资者或同一投资者在不同的市场条件下，对获利性的要求都有所不同。但无论其预期收益为何，投资者会希望找到一种投资组合，使其实际收益高于预期收益的可能性达到最大。基于此，文献[26][29]提出了在概率准则下的最优投资组合模型，其中没有明显地讨论关于投资风险的问题，隐含地以收益的协方差刻画投资风险。而实际投资过程中，投资风险也是衡量组合优良的重要标准之一，但以协方差作为风险测度存在许多缺陷[2]。而且投资行为的实际操作过程中，必然会产生交易成本，因此交易成本也是不可忽略的因素。

本章的基本思想是引用亏损概率作为风险测度建立组合投资问题的相关机会模型，并推导出其等价形式及其 Kuhn-Tucker 条件。引入典型交易成本函数，研究了问题的模型、等价形式及其 Kuhn-Tucker 条件，并用遗传算法解决该非鲁棒性模型。

§2.1 无交易成本的情况下问题的相关机会模型

2.1.1 模型建立

设有 n 种资产可供选择,其收益率为随机向量 $r=(r_1,r_2,\dots,r_n)^T$，r_i 表示第 i 种资产的收益率，假设 r 服从正态分布，即 $r\sim N(\mu,Q)$，其中 $\mu=(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n)$ 为收益率 r 的均值向量，$Er_i=\mu_i(i=1,2,\dots,n)$，正定对称阵 Q 为随机向量 r 的协方差矩阵。设各种资产的投资比例为 $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T$，$x_i\ge 0,i=1,2,\dots,n$；$\sum_{i=1}^{n}x_i=1$，那么不考虑交易成本时资产组合的实际收益为 $y=x^Tr$，易知 $y\sim N(\mu^Tx,x^TQx)$。

通常在 n 种资产中分配资金时，使资产组合在风险最小的情况下实现实际收益（期望收益或期望收益与交易成本之差）最大。

风险可以有多种描述形式，Markowitz 的均值-方差模型[3]中采用资产组合收益的方差来测量风险。方差测度存在的缺陷是：1）方差描述的风险既包括损失的不确定性，也包括收益的不确定性，但投资者对期望收益和对期望损失的风险感受实际上是不对称的[26]；2）它可能给投资者带来误导的信息。Brockette 和 Kahane[28] 指出，即使在对称分布的情况下，使用方差作为风险测度也会导致高额收益组合（对应于较大方差）被舍弃，从而在收益最大化的目标上产生了悖论；3）Ruefli[30] 证明，使用方差作为风险测度会导致统计上的识辨困难，从而使得风险收益中隐含的因果关系变得难以估计，或者产生虚假的结果，这是因为取自正态分布中的样本的前两阶矩必须是独立的。

为克服方差测度的缺陷，可以引入亏损概率来描述风险，α 表示投资者的收益阈限（即最保守的收益），则投资者的风险就可用亏损概率 $\Pr(y \le \alpha)$ 来表示，即投资组合的实际收益低于最保守收益的概率值，使其尽可能地小。

假设投资者的预期收益率为 R，目标函数 $\Pr(y \ge R)$ 就表示资产的实际收益率不低于预期收益率水平的概率值。在一个不允许卖空的市场中，采用亏损概率的风险测量形式，不考虑交易成本时投资组合的相关机会模型为：

$$\begin{aligned}
&\max_x \Pr(y \ge R) \\
&\min_x \Pr(y \le \alpha) \qquad (2.1.1) \\
&s.t \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
&\qquad x_i \ge 0, i = 1,2,\dots,n
\end{aligned}$$

令 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\{\frac{t^2}{2}\} dt$ 表示正态分布 $N(0,1)$ 的概率分布函数，$U = \frac{y - \mu^T x}{(x^T Q x)^{1/2}}$，由于 $y = x^T r \sim N(\mu^T x, x^T Q x)$，易知 $U \sim N(0,1)$，因此目标函数

$$\Pr(y \ge R) = \Pr\left(\frac{y - \mu^T x}{(x^T Q x)^{1/2}} \ge \frac{R - \mu^T x}{(x^T Q x)^{1/2}} \right)$$

$$= \Pr\left(U \geq \frac{R - \mu^T x}{(x^T Qx)^{1/2}} \right)$$

$$= \Phi\left(\frac{\mu^T x - R}{(x^T Qx)^{1/2}} \right)$$

同理，

$$\Pr(y \leq \alpha) = \Pr\left(\frac{y - \mu^T x}{(x^T Qx)^{1/2}} \leq \frac{\alpha - \mu^T x}{(x^T Qx)^{1/2}} \right)$$

$$= \Pr\left(U \leq \frac{\alpha - \mu^T x}{(x^T Qx)^{1/2}} \right)$$

$$= \Phi\left(\frac{\alpha - \mu^T x}{(x^T Qx)^{1/2}} \right)$$

由于 $\Phi(x)$ 为单调增函数，所以

$$\max_x \Pr(y \geq R) \Leftrightarrow \min_x \frac{R - \mu^T x}{(x^T Qx)^{1/2}}$$

$$\min_x \Pr(y \leq \alpha) \Leftrightarrow \min_x \frac{\alpha - \mu^T x}{(x^T Qx)^{1/2}}$$

这样模型（2.1.1）等价于以下模型：

$$\min_x f_1(x) = \frac{R - \mu^T x}{(x^T Qx)^{1/2}} \tag{2.1.2}$$

$$\min_x f_2(x) = \frac{\alpha - \mu^T x}{(x^T Qx)^{1/2}}$$

$$s.t \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n$$

加权法求解该两目标规划，设投资者的风险承受水平为 $\beta(0 < \beta < 1)$ ，即 β 越大投资者越厌恶风险，反之，β 越小投资者更愿意承受较大的风险而取得较大

的收益。(2.1.2)可转化为如下形式的单目标问题：

$$\min_x \ (1-\beta)\frac{R-\mu^T x}{(x^T Qx)^{1/2}}+\beta\frac{\alpha-\mu^T x}{(x^T Qx)^{1/2}} \tag{2.1.3}$$

$$s.t \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \ge 0, i=1,2,\dots,n$$

2.1.2 最优解满足的条件

令 $F=(1,1,\dots,1)^T \in R^n$，$\eta=(RF-\mu)\in R^n$，$\varpi=(\alpha F-\mu)\in R^n$，则模型(2.1.2)变为如下形式：

$$\min_x f(x)=\min_x (1-\beta)\frac{\eta^T x}{(x^T Qx)^{1/2}}+\beta\frac{\varpi^T x}{(x^T Qx)^{1/2}} \tag{2.1.4}$$

$$s.t \ \ h(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i - 1 = 0$$

$$g_i(x)=x_i \ge 0, (i=1,2,\dots,n)$$

因为 $\nabla h(x)=F, \nabla g_i(x)$ 均为单位向量，并且 $g_i(x)=x_i\ge 0, (i=1,2,\dots,n)$ 不全起作用的约束，所以起作用的约束的梯度是线性无关的。本模型的最优解满足 Kuhn-Tucker 条件，即存在 γ 和 $\Lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)^T$，使得模型的最优解 x^* 满足下列条件

$$\begin{cases}\nabla f(x^*)-\gamma\nabla h(x^*)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\nabla g_i(x^*)=0\\ \lambda_k g_k(x^*)=0, (k=1,2,\dots,n)\\ \lambda_k \ge 0, (k=1,2,\dots,n)\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\nabla f(x^*)-\gamma F-\Lambda=0\\ \lambda_k x^*=0,(k=1,2,\dots,n)\\ \lambda_k\ge 0,(k=1,2,\dots,n)\end{cases}$$

为了能用上述 Kuhn-Tucker 条件求解最优解，下面说明在一定条件下，目标函数是伪凸的。

定义 2.1.1 定义在凸集$X\subset R^n$上的实值函数f，如果对任意$x^1\in X,x^2\in X$和权$q\in[0,1]$，$f(qx^1+(1-q)x^2)\le\max\{f(x^1),f(x^2)\}$，则$f$成为拟凸的[11]。

定义 2.1.2 定义在开凸集$X\subset R^n$可微的实值函数f，如果对任意两点$x^1\in X,x^2\in X$，有性质 $(x^1-x^2)^T\nabla f(x^2)\ge 0\Rightarrow f(x^1)\ge f(x^2)$，则$f$称为伪凸的[11]。

定理 2.1.1 设X是R^n中的凸集，h_1和h_2是X上的实值函数，又设$\Phi(x)=\dfrac{h_1(x)}{h_2(x)}$，如果$h_1$是非正且线性的；$h_2$是非零且凸的，则$\Phi$在$X$上是拟凸的。另外若$X$是开的，又$h_1$和$h_2$在$X$上是可微的，则$\Phi$也是伪凸的[27]。

又因为当$R\le\max\mu_i$时，总能找到x满足$\eta^T x\le 0$，所以此时模型为：

$$\min_x f(x)=\min_x(1-\beta)\frac{\eta^T x}{(x^TQx)^{1/2}}+\beta\frac{\varpi^T x}{(x^TQx)^{1/2}} \quad (2.1.5)$$

$$s.t\quad \sum_{i=1}^n x_i=1$$

$$\eta^T x\le 0$$

$$x_i\ge 0,i=1,2,\dots,n$$

而且模型(2.1.5)可行集非空。

设$h_1=\eta^T x,h_2=(x^TQx)^{1/2}$，则$h_1\le 0$且为线性的；$h_2\ne 0$且凸，所以目标函数$f_1(x)$满足定理 1 的条件，因此$f_1(x)$是伪凸。同理，$f_2(x)$也是伪凸的，从而$f(x)$是伪凸的。又[35]中的定理 6.7，模型(2.1.5)的局部最优解即为全局最优解，利用

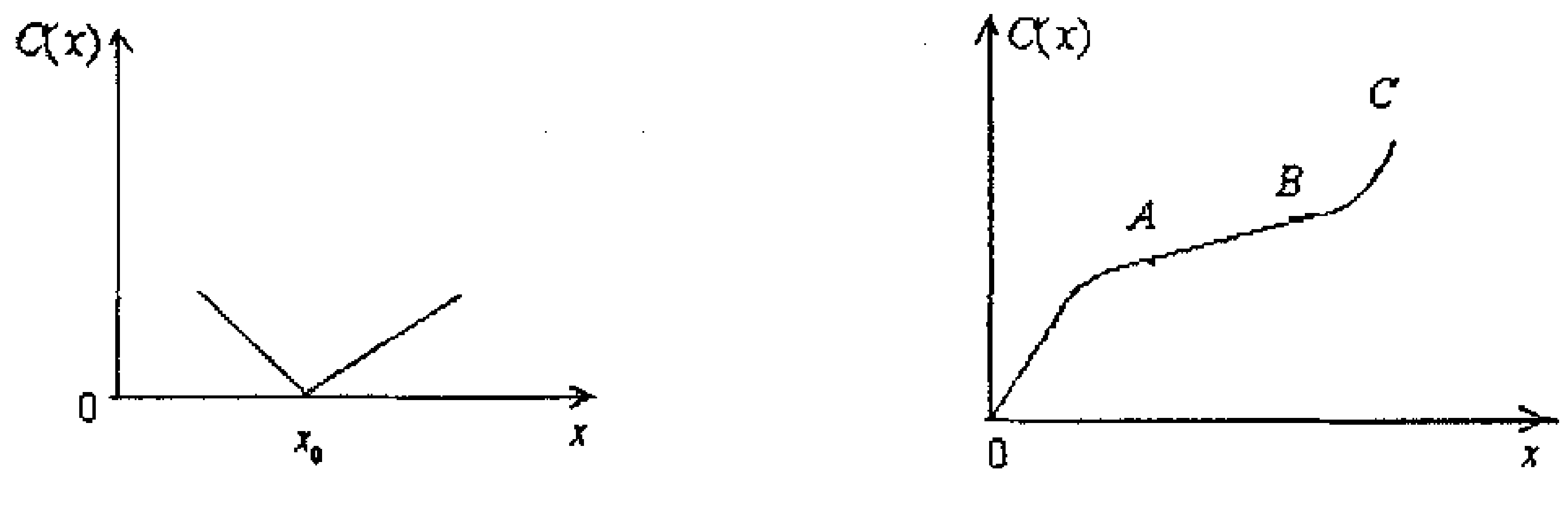
K-T 条件及最优化的算法可以求得最优解。

§ 2.2 具有典型交易成本的投资组合模型

目前已有的组合投资模型中，为了简便起见，大多不考虑投资交易成本，而事实上由于成本对实际收益的影响，忽略交易成本往往导致无效的资产组合[31]。也有一些研究引入了交易成本，如文献[32,33]引入了线性交易成本，文献[34]引入了 V-型成本函数形式（图 2.2.1（a））。但这些研究所假设的交易成本均与实际情形不符而文献[26]采用了所谓的“典型交易成本函数形式”（图 2.2.1(b)）较好的表达了实际交易成本的情况。典型交易成本函数是具有两个拐点的非凹非凸的函数。当资产额较小时，单位交易成本很大；随着交易额的上升，单位交易成本将逐渐减少，故在达到某个点，譬如 A 点之前，成本函数 $C(x)$ 是凹型的，然而当越过此点时单位交易成本就会保持不变，或者说交易成本函数将随交易量的增加呈线性增长，直到达到另一个拐点 B。如果交易量继续增加，则由于股票供给的缺乏等因素其价值上升，所以成本函数 $C(x)$ 在越过 B 点之后将变凸。

因此，本文引入上述的典型交易成本函数形式，建立具有非凹非凸交易成本的投资组合问题的相关机会模型。设交易成本函数为 $C(x)=(c_1(x_1),c_2(x_2),\dots,c_n(x_n))$，则组合资产的实际收益为

$$y=x^T r-\sum_{i=1}^{n}c_i(x_i)\sim N(\mu^T x-\sum_{i=1}^{n}c_i(x_i),x^T Qx)$$



(a)V-型成本函数　　(b) 典型成本函数

图 2.2.1　V-型成本函数与典型成本函数的结构形式

这种情况下投资决策的相关机会模型为：

$$\max_x \Pr(y\ge R) \tag{2.2.1}$$

$$\min_x \Pr(y \le \alpha)$$

$$s.t \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \ge 0, i = 1,2,\ldots,n$$

同理于模型（2.1.1）可得模型（2.2.1）的等价模型如下：

$$\min_x f_1(x) = \frac{R - [\mu^T x - \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i)]}{(x^T Q x)^{1/2}} \tag{2.2.2}$$

$$\max_x f_2(x) = \frac{\alpha - [\mu^T x - \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i)]}{(x^T Q x)^{1/2}}$$

$$s.t \quad h(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i - 1 = 0$$

$$g_i(x) = x_i \ge 0, (i = 1,2,\ldots,n)$$

这里交易成本函数为如下形式的典型成本函数（图 2.2.1 (b)）

$$c_i(x_i) = \begin{cases} \kappa\sqrt{x_i} & 0 \le x_i \le a \\ \kappa(kx_i + h) & a \le x_i \le b \\ \kappa(x^2 + m) & b \le x_i \le 1 \end{cases}$$

$$i = 1,2,\ldots,n, \kappa > 0$$

两目标问题（2.2.2）也可转化为单目标问题：

$$\min_x f(x) = (1-\beta)\frac{R - [\mu^T x - \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i)]}{(x^T Q x)^{1/2}}$$

$$+\beta\frac{\alpha - [\mu^T x - \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i)]}{(x^T Q x)^{1/2}}$$

$$s.t \quad h(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i - 1 = 0$$

$$g_i(x)=x_i\ge 0,(i=1,2,\dots,n)$$

$$(\ 0<\beta<1\ )$$

同样可以给出该模型的最优解满足的 K-T 条件，即存在 θ,γ 和 $\Lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$ 使得最优解 x^* 满足：

$$\begin{cases}\nabla f(x^*)-\gamma\nabla h(x^*)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\nabla g_i(x^*)=0\\ \lambda_k g_k(x^*)=0,(k=1,2,\dots,n)\\ \lambda_k\ge 0,(k=1,2,\dots,n)\end{cases}$$

§2.3 组合投资问题的相关机会模型遗传算法

模型（2.2.2）是一种较复杂的优化问题，其目标函数是非凹非凸的且搜索空间不规则，这就要求所使用的求解算法必须具有高度的鲁棒性，避免陷入局部最优点。传统的数值优化算法，诸如梯度下降法、内点法、 外点法、分支定界法等无法对此进行有效求解。这里引入非数值并行优化的遗传算法求解模型（2.2.2），算法过程描述如下：

1．参数设置与编码

1). 输入参数，种群规模pop_size=60，交叉概率 $P_c=0.2$，变异概率Pm=0.5，评价函数中的参数为 $a=0.5$。

2). 编码。采用十进制向量，用染色体 $V=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 作为解的代码。

2．群体初始化

从超几何体 $\Omega=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid 0\le x_1\le 1,0\le x_2\le 1,0\le x_3\le 1,0\le x_4\le 1\}$ 中随机产生一个染色体，检验其可行性若可行，则接受；否则，拒绝。重复上述过程pop_size次，直到得到pop_size个可行的染色体 $V_1,V_2,\dots,V_{pop\_size}$ 为止。

3．计算适应度

个体的适应度通过一种基于排序的评价函数来测算。评价函数用来对种群中的

每个染色体设定一个概率，以便该染色体被选中的可能性与其在种群中相对于其它染色体的适应性成比例。即通过轮盘赌，适应性强的染色体被选中产生后代的机会要大。

设参数 $a\in(0,1)$ 给定，定义基于排序的评价函数为

$$eval(V_i)=a(1-a)^{i-1}, i=1,2,...,pop\_size.$$

$i=1$ 意味着染色体是最好的，$i=pop\_size$ 说明是最差的。

4．选择过程

1）．对每个染色体 V_i 计算累计概率 q_i

$$\begin{cases} q_0=0 \\ q_i=\sum_{j=1}^{i} eval(V_j), i=1,2,...,pop\_size \end{cases}$$

2）从区间 $(0,q_{pop\_size}]$ 中产生一个随机数 r；

3）若 $q_{i-1}<r\le q_i$，则选择第 i 个染色体 V_i（$1\le i\le pop\_size$）；

4）重复步骤 2 和步骤 3 共 pop_size 次，由此得 pop_size 个复制的染色体.

5．交叉操作

从 $i=1$ 到 pop_size 重复一下过程：在区间[0，1]上随机产生一个实数 r_c，如果 $r_c<P_c$，则选择 V_i 作为一个父代，这样就会有 $P_c\cdot pop\_size$ 个染色体进行交叉操作，例如，对于选中的两个父代 V_1 和 V_2，产生两个后代 X 和 Y 的方法如下：

$$X=c\cdot V_1+(1-c)\cdot V_2,\quad Y=(1-c)\cdot V_1+c\cdot V_2$$

c 为从区间（0，1）中产生的一个随机数，检验 X 和 Y 的可行性，仅用可行的后代取代其父代。

6．变异操作

从 $i=1$ 到 pop_size 重复一下过程：在区间[0，1]上随机产生一个实数 r_m，如果 $r_m<P_m$，则选择 V_i 作为变异父代。在 R^4 中随机选择变异方向 d，若 $V_i+M\cdot d$ 不可行，则置 M 为 0 和 M 之间的随机数，直到可行为止，然后用 $X=V_i+M\cdot d$ 代替 V_i。这里 M 为保证变异操作遍及整个可行集的一个足够大的数。

7. 保留策略和停止准则

因为最好的染色体未必出现在最后一代中，所以在进化开始时就必须把最好的染色体保留下来，记为V_0。如果在新的种群中发现了更好的染色体，则用它代替原来的染色体。在进化完成以后，这个染色体就可以看成是最优化问题的解。

下面考虑一个数值实例：设在模型（2.2.1）中有三种股票（n=3），其期望收益率分别为$\mu_1=0.1,\mu_2=0.15,\mu_3=0.5$；成本函数中，$\kappa=0.05,a=0.3,b=0.7$，$k=2,h=1$，三种股票收益率的协方差矩阵分别为：

$$\sigma^2=\begin{pmatrix} 0.1410 & -0.1890 & 0.1670 \\ -0.1890 & 0.2600 & -0.2200 \\ 0.1670 & -0.2200 & 0.2240 \end{pmatrix}$$

从表 2.2.1，2.2.2 可以得出以下的结论：

1）于每一个给定的收益阈限α，期望收益R越大目标函数值$f(x^*)$越大，也即高收益对应高风险，而且实际风险$Risk(x^*)$也随期望收益的提高而增大，相应的实际收益$R(x^*)$也随之提高。这一结果符合“高风险对应高收益”的基本规律。

2）对于每一个给定的收益阈限α，随着风险水平β的上升，具有较高预期收益的资产（资产 3）在组合中所占的比例趋于增大，而预期收益相对较低的资产（资产 1）的份额趋于减小。对于预期收益解于两者之间的资产（资产 2），它的份额虽然发生调整变化，但并没有表现出明显的规律趋势。分析其原因，除收益率不突出外，它与其余资产存在的正相关关系也是一个重要的因素。

§2.4 本章小结

在典型交易成本函数的条件下考虑了组合投资问题的相关机会模型，突破传统模型引入亏损概率作为风险测度，克服了协方差测度带来的缺陷。其决策过程具有一定的现实意义。本章在资产收益率服从正态分布的假设前提下，得出其等价模型，即将概率模型转化为一般模型，随着混合智能算法的发展，资产收益在任意分布下，均可利用随机模拟、神经网络及遗传算法，对历史数据模拟优化，从而得到满意结果，这对实际投资操作有直接的引导作用。

第三章 组合投资问题的目标规划模型

§3.1 引言

在证券投资过程中，为实现既定的投资目标，投资者需要根据市场条件的变化不断调整现有资产组合——买入、卖出证券，由此导致交易成本的产生。通常对实际交易成本的描述往往具有复杂的数学形式，因此具有交易成本的投资组合问题在技术上存在许多困难。为了简便起见，经典 Markowitz 投资组合模型忽略了交易成本，而事实上由于交易成本对实际收益的影响，忽略交易成本往往导致无效的资产组合。文献[36，37]引入了线性交易成本，文献[38]考虑了非线性交易成本，并采用逐段逼近的方式处理非线性交易成本，文献[39,40]引入了 V-形成本函数形式。但这些交易成本函数形式于实际情形不符，文献[7]采用了所谓的“典型交易成本”(如图 1)，很好的刻画了交易成本通常表现为资产交易量具有两个拐的非凹非凸的函数的特点。即当资产额较小时，单位交易成本很大；随着交易额的上升交易成本将逐渐减小。故在达到某个点，譬如 A 点之前，成本函数$C(x)$时凹型的。然而当越过此点时单位交易成本就会保持不变，或者说交易成本函数建随着交易量的增加呈线性增长，直到达到另一个点 B。如果交易量继续增长，则由于证券供给的缺乏等因素其价格将上升。所以成本函数$C(x)$在越过点 B 之后将变凸。

另外，在建立投资组合模型时，通常只考虑资产投资的收益及其风险，这与实际情形不符。譬如收入税率、盈利分红等因素对投资的最终收益也有影响，对于投资大户尤其如此[42]。本文应用随机目标规划，同时考虑组合投资收益和盈利分红收益对证券投资问题进行讨论。

§3.2 组合投资问题的目标规划模型

3.2.1 模型建立

设有n种证券，ξ_{i1}为第i种证券的收益率。ξ_{i2}为第i种证券的分红率。x_i为投资于第i种证券的比例。$c_i(x_i)$为第i种证券的交易费用，则g_1,g_2分别为投资收益和分红收益，即

$$g_1=\sum_{i=1}^{n}\xi_{i1}x_i-\sum_{i=1}^{n}c_i(x_i)$$

$$g_2=\sum_{i=1}^{n}\xi_{i2}x_i$$

则可建立目标规划模型：

$$\begin{aligned}&\min\sigma^2(g_1)\\&\min\sigma^2(g_2)\\&s.t\quad \overline{g}_1\ge a_1\\&\qquad\ \overline{g}_2\ge a_2\\&\qquad\ \sum_{i=1}^{n}x_i=1\\&\qquad\ x_i\ge 0,i=1,2,\dots,n\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

这里 $\overline{g}_1=Eg_1$，$\overline{g}_2=Eg_2$，a_1,a_2 为目标值。$\sigma^2(g_i)=X_j\times(\mathrm{cov})_j\times X_j^T$。

这里交易成本函数采用图 3.2.1 形式的典型交易成本函数形式——非凸非凹函数。

$$c_i(x_i)=\begin{cases}\kappa\sqrt{x_i} & 0\le x_i\le a\\ \kappa(kx_i+h) & a\le x_i\le b\\ \kappa(x^2+m) & b\le x_i\le 1\end{cases}$$

$$i=1,2,\dots,n,\kappa>0$$

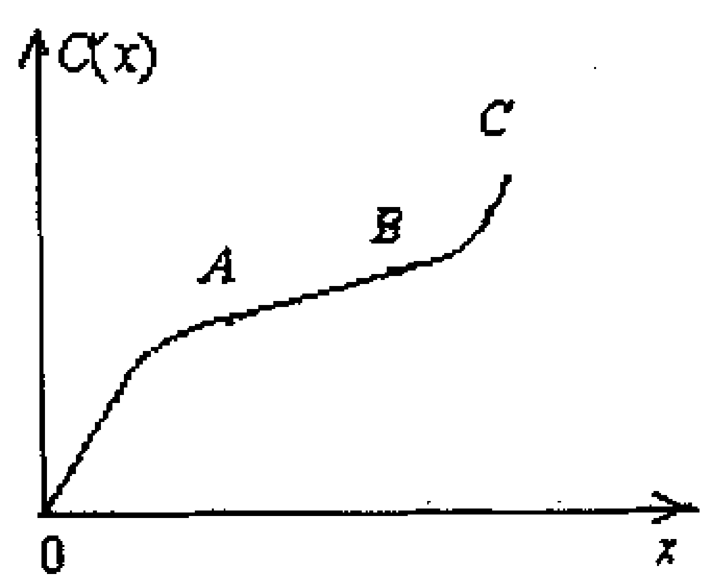


图 3.2.1 典型成本函数的结构形式

用加权法将该两目标问题转换为单目标问题：

$$f(x)=\min\beta\sigma^{12}(g_1)-(1-\beta)\sigma^{22}(g_2)\tag{3.2.2}$$

$$s.t\quad \begin{aligned} &\bar{g}_1 \ge a_1 \\ &\bar{g}_2 \ge a_2 \\ &\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ &x_i \ge 0, i = 1,2,\dots,n \end{aligned}$$

§ 3.3 具有典型交易成本时模型的求解算法

3.3.1 算法

模型（3.2.2）中，若忽略交易费用即不考虑交易费用时模型可退化为二次规划，可直接用求解二次规划的数学软件进行求解。当引入典型交易费用函数时模型（3.2.2）的约束函数为非线性函数，此时有效解集为非凸非凹集合即搜索空间不规则，这就要求所使用的求解算法必须具有高度的鲁棒性，避免陷入局部最优点. 传统的数值优化算法，诸如梯度下降法、内点法、外点法、分支定界法等无法对此进行有效求解.这里引入非数值并行优化的遗传算法求解模型（3.2.2），算法过程描述如下：

1. 参数设置与编码

1). 输入参数，种群规模pop_size=60，交叉概率 $P_c = 0.2$，变异概率Pm=0.5，评价函数中的参数为 $a = 0.5$.

2). 编码. 采用十进制向量，用染色体 $V = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ 作为解的代码。

2. 群体初始化

从超几何体 $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | 0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1, 0 \le x_3 \le 1, 0 \le x_4 \le 1\}$ 中随机产生一个染色体，检验其可行性若可行，则接受；否则，拒绝。重复上述过程pop_size次，直到得到pop_size个可行的染色体 $V_1, V_2, \dots, V_{pop\_size}$ 为止。

3. 计算适应度

本文中个体的适应度是通过一种基于排序的评价函数来测算。评价函数用来对种群中的每个染色体设定一个概率，以便该染色体被选中的可能性与其在种群中相对于其它染色体的适应性成比例。即通过轮盘赌，适应性强的染色体被选中产生后代的机会要大。

设参数$a \in (0,1)$给定，定义基于排序的评价函数为

$$eval(V_i) = a(1-a)^{i-1}, i = 1,2,\ldots, pop\_size.$$

$i=1$意味着染色体是最好的，$i = pop_size$说明是最差的。

4. 选择过程

1）. 对每个染色体V_i计算累计概率q_i

$$\begin{cases} q_0 = 0 \\ q_i = \sum_{j=1}^{i} eval(V_j), i = 1,2,\ldots, pop\_size \end{cases}$$

2）从区间$(0, q_{pop_size}]$中产生一个随机数r；

3）若$q_{i-1} < r \le q_i$，则选择第i个染色体V_i（$1 \le i \le pop\_size$）；

4）重复步骤2和步骤3共pop_size次，由此得pop_size个复制的染色体。

5. 交叉操作

从$i=1$到pop_size重复一下过程：在区间[0，1]上随机产生一个实数r_c，如果$r_c < P_c$，则选择V_i作为一个父代，这样就会有$P_c \cdot pop_size$个染色体进行交叉操作，例如，对于选中的两个父代V_1和V_2，产生两个后代X和Y的方法如下：

$$X = c \cdot V_1 + (1-c) \cdot V_2, \quad Y = (1-c) \cdot V_1 + c \cdot V_2$$

c 为从区间（0，1）中产生的一个随机数，检验X和Y的可行性，仅用可行的后代取代其父代。

6. 变异操作

从$i=1$到pop_size重复一下过程：在区间[0，1]上随机产生一个实数r_m，如

果$r_m < P_m$，则选择V_i作为变异父代。在R^4中随机选择变异方向d，若$V_i + M\cdot d$不可行，则置M为0和 M之间的随机数，直到可行为止，然后用$X = V_i + M\cdot d$代替V_i。这里M为保证变异操作遍及整个可行集的一个足够大的数。

7. 保留策略和停止准则

因为最好的染色体未必出现在最后一代中，所以在进化开始时就必须把最好的染色体保留下来，记为V_0。如果在新的种群中发现了更好的染色体，则用它代替原来的染色体。在进化完成以后，这个染色体就可以看成是最优化问题的解。

3.3.2 实例分析

下面考虑一个数值实例。设在模型（3.2.11）中有三种股票（n=3），其期望收益率分别为 $\mu_{11}=0.61,\mu_{21}=0.15,\mu_{31}=0.5$ ；三种股票的分红率为 $\mu_{21}=0.05,\mu_{22}=0.018,\mu_{23}=0.09$ ；成本函数中，$\kappa=0.05,a=0.3,b=0.7$，$k=2,h=1$，三种股票收益率和分红率的协方差矩阵分别为：

$$\sigma^{12}=\begin{pmatrix} 0.0250 & 0.0150 & 0.0170 \\ 0.0150 & 0.0210 & 0.0090 \\ 0.0170 & 0.0090 & 0.0010 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{22}=\begin{pmatrix} 0.1410 & -0.1890 & 0.1670 \\ -0.1890 & 0.2600 & -0.2200 \\ 0.1670 & -0.2200 & 0.2240 \end{pmatrix}$$

3.3.2.1 不同交易成本条件下的比较

为了考察模型应用的实际效果，比较不同交易成本条件下的有效边界。第一种情况忽略交易成本，即在模型（3.2.2）中令交易成本为 0，得如图 3.3.1 所示曲线 1；第二种情况考虑 V-型交易成本，（曲线 2）；第三种情况考虑非凸非凹的典型性交易成本函数形式（曲线 3）。（为了直观起见，我们固定其中一个期望收益值，如固定a_2，只分析期望收益a_1于风险函数之间的关系.）

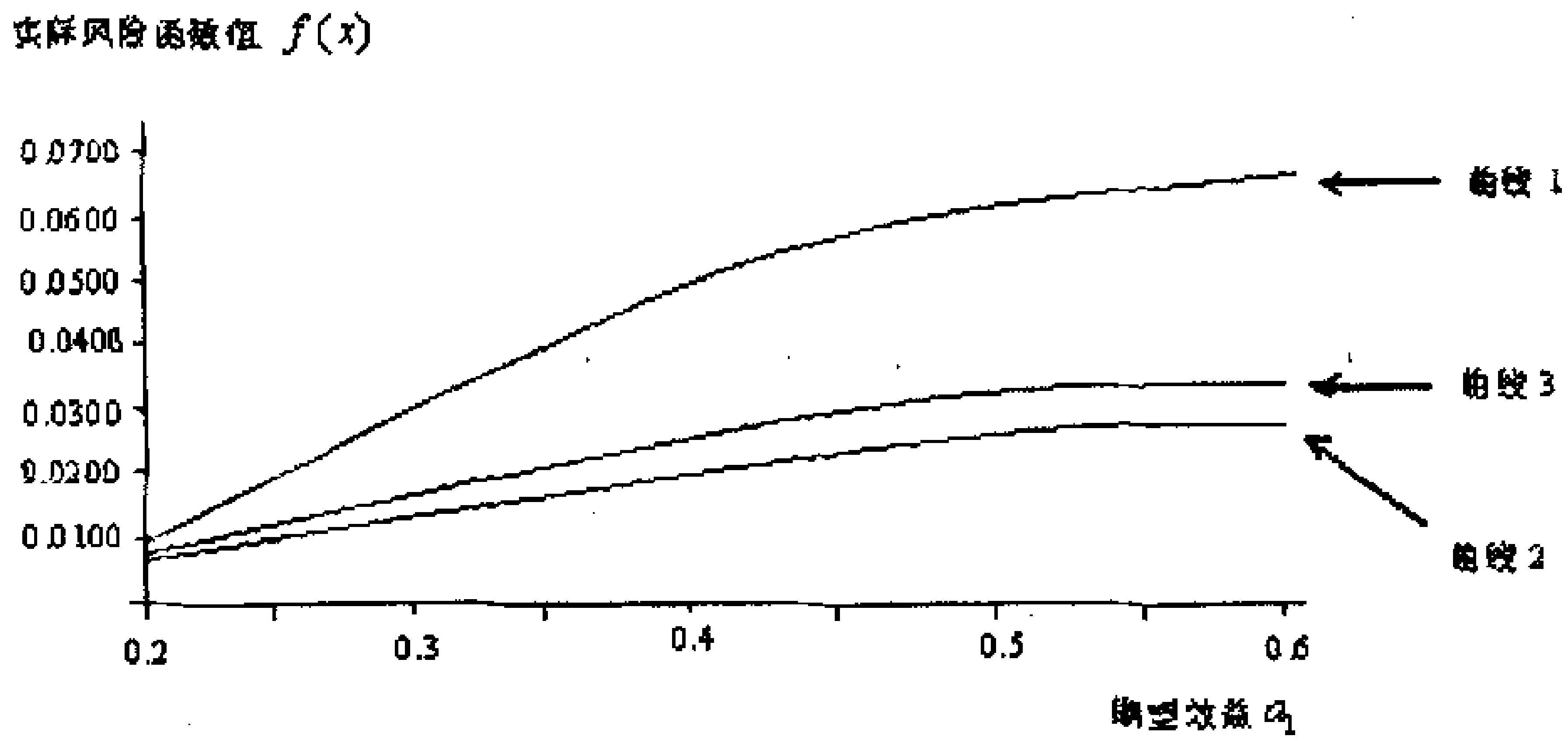


图 3.3.1 不同交易成本条件下的有效边界

从图 3.3.1 可以看出：

1）曲线 1 均位于曲线 2，3 的左上方，这是因为曲线 1 忽略了交易成本。由于交易成本的影响，它就比其他情况得到的组合风险更高。

2）曲线 2 位于曲线 3 的右下方，这一事实说明相对于本文提出的典型交易成本而言，V-型交易成本尽管会使资产组合模型得到适当的简化，但它会造成对实际封信的高估，从而导致模型产生的资产组合不能达到实际风险最优。

3）上述分析说明，不同类型的交易成本会影响到资产组合的有效前沿，而采用典型交易成本可以获得相对更有效的资产组合。

3.3.2.1 灵敏度分析

为了检验模型（3.2.2）对其中参数的敏感性，我们分别变换模型中的参数 β，a_1 和 a_2 的取值，借此来检验参数变化对模型结果的影响，获得关于最有资产组合、期望收益、实际风险及风险偏好变动的规律，所得结果如表 3.3.1 所示。

从表 3.3.1 可以得出以下结论：对于每个给定的风险偏好系数 β，随着期望收益 a_1、a_2 的增加，资产组合的风险函数值 $f(x^*)$ 也将随之增大。这一结果符合"高收益，高风险"的基本规律。而且，期望收益越高，承担大风险的同时也获得越高的实际收益 $g_1(x^*)$，$g_2(x^*)$。投资者可以根据自己对收益的期望和风险承受能力确定预期收益水平 a_1、a_2 的高低。

表 3.3.1 不同期望收益和风险偏好水平下的最优资产组合及风险截面

	β=0.3			β=0.5			β=0.7		
a_1	0.5000	0.5500	0.5800	0.5000	0.5500	0.5800	0.5000	0.5500	0.5800
a_2	0.0400	0.0450	0.0500	0.0400	0.0450	0.0500	0.0400	0.0450	0.0500
x_1	0.4354	0.2670	0.3000	0.1345	0.2670	0.3000	0.4052	0.2670	0.3000
x_2	0.4268	0.3589	0.3289	0.4113	0.3589	0.3289	0.4236	0.3589	0.3289
x_3	0.1378	0.3740	0.3711	0.4542	0.3740	0.3711	0.1713	0.3740	0.3711
$f(x^*)$	0.0070	0.0132	0.0167	0.0114	0.0136	0.0152	0.0101	0.0134	0.0159
$g_1(x^*)$	0.5602	0.5662	0.5679	0.5325	0.5662	0.5679	0.5585	0.5662	0.5679
$g_2(x^*)$	0.0419	0.0535	0.0543	0.0550	0.0535	0.0543	0.0433	0.0535	0.0543

3.4 本章小结

本章主要从交易成本角度对组合投资问题的模型进行了改进和扩展。现有的投资组合模型对角以成本的处理主要有三种方式：无交易成本模型、线性交易成本函数模型和 V-型加一成本函数模型。另外，已有的模型通常只考虑所投资产的收益及其风险建立模型，这与实际投资过程的操作不符合。实际投资过程中不可避免的会有收入税、公司分红等因素，这些因素对实际投资收益和风险都会产生影响。本文引入典型性交易成本函数形式建立了该问题的目标规划模型，并对模型进行分析。

数值实例结果表明，不同类型的交易成本会影响资产组合的有效前沿，而采用典型交易成本函数形式可获得相对有效的资产组合。

第四章 基于可信性分布的投资组合问题

§4.1 引 言

Markowitz“证券组合投资选择”第一次运用数学方法来确定最佳资产组合投资的理论，提出了均值—方差模型，奠定了人们进行组合投资理论研究和实际应用的基础。许多国内外学者对投资组合问题也进行了深入的研究，并对这一模型进行了若干改进。模型中存在一些不确定性参数，如资产收益率，传统的组合投资模型中，不确定性被等同于随机性。实际上，这种等同过程把客观上可观察和可试验的随机事件与决策者的主观判断平行的作了概率估计。一个纯理论者可以接受用概率理论来处理可观察的随机事件，但是当把人的主观判断转换成概率问题时就会产生疑问。另一方面，概率有另一个缺点：概率给出了一个精确地反映，这并不是优点。我们发现一个事件的概率分布是通过非常粗略而粗糙又主观的估计得到的，而且随后的计算均是以两位小数点的精度进行的，这表明按惯例采用随机变量及概率理论并不是一个好的选择。

本章中我们将资产的收益率这一不确定性因素用模糊变量表示，而不用传统M-V 模型中所用的随机变量。也就是说，第i种资产的收益率r_i是一个模糊变量。

文献[43]中采用模糊变量的可能性分布，本文采用的模糊变量的可信性分布更为合适。因为当一个模糊事件的可能性为 1 时，该事件未必成立；同样，当该事件的可能性为 0 时，该事件也有可能成立。但是，若一事件的可信性为 1，则该事件必然成立；反之，若可信性为 0 时，则该事件必然不成立。在模糊集理论中扮演概率测度角色的不是可能性分布而是可信性分布[44]。

§4.2 模糊环境下组合投资问题

4.2.1 一个比较投资组合方案优劣的效用函数

M-V 方法是在现代金融理论中解决最优投资组合问题的一个最基本的方法。M-V 模型是 Markowitz 提出的解决最优投资组合问题的模型，其基本原则是用投资组合的期望值作为投资的收益并用其方差代表投资风险。

假设每个投资者均能设计一个效用函数，如（4.2.1）式，用来比较基于收益期望和投资风险的各种投资组合方案的优劣[43]。这个效用函数是比较投资方案优劣的一种方式，效用函数的值越高相应的投资方案越有吸引力。（4.2.1）式是金融

理论者广泛使用的一种效用函数，这里 p 是以风险收益率为 r_p 的风险资产，其预期投资收益用 $E(r_p)$表示，用 σ^2（r_p）刻画投资风险。

$$U(p)=E(r_p)-0.005*A\times\sigma^2(r_p) \tag{4.2.1}$$

式中 U 为效用值，A 为投资者厌风险指数（在美国 A 平均为 2.46），系数 0.005 是一个按比例计算的方法，这样我们在式（4.2.1）中是按百分比而不是按小数来表示预期收益与标准差的。等式（4.2.1）与高预期收益会提高效用，而风险会降低效用的概念是一致的。

因为我们可以对效用函数的值和无风险资产收益率进行比较，所以在一种风险资产和无风险资产之间选择时，可以将风险资产效用函数的值视为其确定的等价收益率与无风险资产的收益率作比较。我们说，一种风险资产有效当且仅当其上述等价收益率大于无风险资产的收益率。在 M-V 模型中，最优投资组合问题可以转化为下面的二次规划问题：

$$\max U(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i)=E(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i)-0.005*A*\sigma^2(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i) \tag{4.2.2}$$

$$\text{s.t}\quad \sum_{i=1}^{n} x_i=1\ ,$$

$$x_i\ge 0,\ i=1,\ \ldots,\ n$$

这里 n 是可供选择的资产种类的种数，x_i 是投资于第 i 种资产的比例，r_i 表示第 i 种资产的收益率，$i=1,\ldots n$,用 r_f 表示无风险资产的收益率，则一种投资方案有效当且仅当满足

$$U(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i)\ >\ r_f$$

下面介绍本文所涉及的一些概念。

定义 4.2.1(liu[46]) 假设 ξ 为模糊变量，若函数 $\Phi:[-\infty,+\infty]\to[0,1]$ 满足

$$\Phi(x)=\mathrm{Cr}\ \{\theta\in\Theta\,|\,\xi(\theta)\le x\} \tag{4.2.3}$$

则 Φ 称为模糊变量 ξ 的可信性分布。也就是说，可信性分布 $\Phi(x)$ 是模糊变量 ξ 取值小于或等于 x 的可信度。

定义 4.2.2(liu[46]) 假设 ξ 为模糊变量，Φ 为 ξ 的可信性分布。若函数

$\phi: R \to [0,+\infty)$ 对所有的 $x \in [-\infty,+\infty]$ 满足

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(y)dy \tag{4.2.4}$$

则 称 $\Phi(x)$ 为模糊变量 ξ 的可信性密度函数。

定义 4.2.3(liu[46]) 设 ξ 为模糊变量，则称

$$E[\xi] = \int_{0}^{+\infty} Cr\{\xi \ge r\}dr - \int_{-\infty}^{0} Cr\{\xi \le r\}dr \tag{4.2.5}$$

为模糊变量 ξ 的期望值 (为了避免出现 $\infty-\infty$ 情形，要求(5)式右端两个积分至少有一个有限)。

定理 4.2.1(liu[46]) 设 ξ 是可能性空间 $(\Theta, P(\Theta), Pos)$ 上的模糊变量，若 lerbegue 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\phi(x)dx$ 有限，则

$$E[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\phi(x)dx$$

其中 ϕ 是 ξ 的可信性密度函数。

证明 根据期望值的定义和 Fubini 定理，我们有

$$\begin{aligned}
E[\xi] &= \int_{0}^{+\infty} Cr\{\xi \ge r\}dr - \int_{-\infty}^{0} Cr\{\xi \le r\}dr \\
&= \int_{0}^{+\infty} [\int_{r}^{+\infty} \phi(x)dx]dr - \int_{-\infty}^{0} [\int_{-\infty}^{r} \phi(x)dx]dr \\
&= \int_{0}^{+\infty} [\int_{0}^{x} \phi(x)dr]dx - \int_{-\infty}^{0} [\int_{x}^{0} \phi(x)dr]dx \\
&= \int_{0}^{+\infty} x\phi(x)dx + \int_{-\infty}^{0} x\phi(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x\phi(x)dx
\end{aligned}$$

定理证毕。

定义 4.2.4(liu[46]) 设 ξ 为模糊变量，且有有限期望值 $E[\xi]$ ，则称 $V[\xi] = E[(\xi - E[\xi])^2]$ 为模糊变量 ξ 的方差。

定义 4.2.5 假设 $f: R^n \to R$ 是一个实值函数，$\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n)$ 是可能性空间 $(\Theta, P(\Theta), Pos)$ 上的模糊向量，则 $f(\xi)$ 也是一个模糊变量，它的期望值定义为

$$E[f(\xi)] = \int_{0}^{+\infty} Cr\{f(\xi) \ge r\}dr - \int_{-\infty}^{0} Cr\{f(\xi) \le r\}dr$$

【注】关于可能性空间，可能性测度，必要性测度及可信行测度的详细讨论可参

考文献[44]和文献[46]。

§4.3 投资组合问题的一个可信性方法及其混合智能算法

4.3.1 模型

Watada[45]提出了模糊投资组合问题的一个模型，其中用一个模糊变量表示决策者对期望回收率和某种程度的风险的渴望(或接受)程度. Inuiguchi 和 Tanino [47]介绍了关于投资组合问题的一种新颖的可能性规划方法，[43]中给出该问题的另一种可能性方法，他们均采用了分散投资的方法，并且都是基于将目标标准最大化或最小化的方法。[43]中采用了模糊变量的可能性分布及其隶属函数定义其期望和方差，本文采用可信性分布定义模糊变量的期望和方差。

现在考虑具有可信性分布的投资组合问题：

$$\max \quad U(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i)=E(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i)-0.005*A*\sigma^2（\sum_{i=1}^{n} r_i x_i）$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

$$x_i \ge 0,\ i=1,\ \ldots,\ n$$

这里 $r_i(i=1,2,\ldots,n)$ 是模糊变量，并且其可信性分布函数为 $\Phi(x_i)$，则 E(*) 及 $\sigma^2(*)$ 按定义 4.2.3 或定理 4.2.1 和定义 4.2.4.

记 $r=(r_1,r_2,\ldots,r_n)^T, x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$

则 $\quad U(x^T r)=E[x^T r]-0.005*A*\sigma^2(x^T r)$。

现在给出模糊模拟、神经元网络和遗传算法相结合的混合智能算法对该问题进行求解。

4.3.2 算法步骤（混合智能算法）

步骤 1 通过模糊模拟为不确定函数

$$U: x \to U(x^T r)$$

产生输入输出数据，记为 (x,y)。

步骤 2 利用产生的训练数据(x,y)训练一个神经元网络 $F(x,\omega)$从而逼近不确定函数$U(x)$。可用遗传算法训练神经网络，

$$\min Err(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\| F(x_i,\omega)-y_i\|^2\to\omega,\ F(x,\omega)\approx U(x)。$$

步骤 3 初始产生 pop_size 个染色体$V_1,V_2,\ldots,V_{pop_size}$，并利用训练好的神经元网络检验子代染色体的可行性。

步骤 4 通过交叉和变异操作更新染色体，并利用训练好的神经元网络检验子代染色体的可行性。

交叉操作：选择父代 $V_1',V_2',\ldots$ 并随机配对$(V_1',V_2'),(V_3',V_4'),(V_5',V_6'),\ldots$。以$(V_1',V_2')$为例解释交叉操作，随机产生$(0,1)$之间的一个数 c，然后按下列形式进行交叉操作，并产生两个后代X和Y，

$$X=cV_1'+(1-c)V_2',Y=(1-c)V_1'+cV_2'.$$

变异操作：选择父代如V并随机产生一个变异方向d，取合适的M，使得$V+Md$可行，用$X=V+Md$代替原来的染色体。

步骤 5 利用训练好的神经元网络$F(x,\omega)$计算所有染色体的目标值。

步骤 6 根据目标值计算每个染色体的适度，$eval(V_i)=a(1-a)^{i-1}$，$i=1,2,\ldots,pop\_size$。这里a是给定的$(0,1)$之间的参数，$i=1$意味着染色体是最好的，$i=pop_size$说明是最差的。

步骤 7 通过旋转赌轮选择染色体。对每个染色体V_i，计算累计概率q_i

$$q_0=0,$$
$$q_i=\sum_{j=1}^{i}eval(V_j),i=1,2,\ldots,popsize$$

从区间$(o,q_{pop_size}]$中产生一个随机数r，若$q_{i-1}<r\le q_i$，则选择第i个染色体$V_i(1\le i\le popsize)$，重复上述操作共$popsize$次，可以得到$popsize$个复制染色体。

步骤 8 重复步骤 4 到步骤 7 直到完成给定的循环次数。

步骤 9 给出最好的染色体作为最优解。

4.3.3 应用算例

用一个简单例子说明算法的有效性。

假设现在有 4 种有效资产可供选择，并且各种资产的收益率表现为如下形式的模糊变量（梯形模糊变量）

$$r_1=(1,2,3,4), r_2=(2,3,4,5), r_3=(3,4,5,6), r_4=(4,5,6,7)$$

此时该组合问题的模型为：

$$\begin{aligned} \max\ & U(x_1r_1+x_2r_2+x_3r_3+x_4r_4) \\ & =E(x_1r_1+x_2r_2+x_3r_3+x_4r_4)-0.005*A*\sigma^2(x_1r_1+x_2r_2+x_3r_3+x_4r_4) \\ s.t\ & \{x_1+x_2+x_3+x_4=1, x_i\ge 0, i=1,2,3,4\}, \end{aligned}$$

为了求解这个模型，首先通过模糊模拟为不确定性函数

$$U: x\to E(x_1r_1+x_2r_2+x_3r_3+x_4r_4)-0.005*A*\sigma^2(x_1r_1+x_2r_2+x_3r_3+x_4r_4)$$

产生输入输出数据。然后，训练一个神经网络（3 个输入神经元，5 个隐含层神经元，1 个输出神经元）来逼近不确定函数。最后，把训练好的神经元网络嵌套在遗传算法中，从而形成混合智能算法。

通过运行混合智能算法（ 模拟 6000 代，2000 个训练样本，1000 次遗传迭代 ），找到最优解

$$x_1^*=0.3433\ ,\ x_2^*=0.3991,\ x_3^*=0.2575,\ x_4^*=0.0601$$

即：在所给的 4 种资产中选择投资组合时，我们投资于各种资产的份额分别为：第一种资产占 34.33%，第二种资产占 39.91%，第三种资产占 25.75%，第四种资产占 6.01%，以这样的分配方式投资于这 4 种资产就可达到一定满意程度的最优组合。在这样的决策方式下得到效用函数的目标值为 78.71%，这表明投资方案在 r_1,r_2,r_3,r_4，收益率情况下达到较高的收益和较低的风险。而且该算法得到的误差平方和为 0.3647，平均误差为 0.0143。

§4.4 一种组合投资问题的具有潜在解方法

4.4.1 引言

实际证券投资问题中通常存在一些不确定的参数，如资产的收益率，传统模型中将这些不确定参数用随机量来刻画，此过程中忽略了人的主观判断这一主观因素。本文中用能够表达主观性的模糊参量来刻画不确定性因素，即在模糊环境

结束语

投资组合优化理论在国外已经发展了半个多世纪，而在我国是伴随着证券市场的发展而发展起来的，不过才二十年的时间。随着中国加入世贸组织以及全球经济一体化的潮流，证券市场势必会进入一个高速发展的时期。因而，在当前形势下，对证券投资组合理论进行研究就显得迫在眉睫。

本文围绕投资组合优化理论，分别建立了选择最优投资组合的相关机会和目标规划模型，并针对各个资产交易时交易费的变化情况，从理论上研究了最优投资组合的动态变化规律；讨论了模糊环境下具有可信性分布的投资组合问题，引用具有可信性分布的模糊变量更好地反映带有人的主观性的收益率。并用集模糊模拟、神经网络和遗传算法于一体的混合智能算法进行求解；另外，采用模糊决策变量，突破传统的精确决策变量，并用一定的解模糊方法，模糊规划问题可以退化为简单的线性规划问题，不仅给出问题的最优解，而且提供了最优解周围一定满意程度的潜在解范围，这给实际决策者提供了更大的选择范围。

作者认为将来值得研究的问题和可能的工作有：

对带有摩擦的不完善市场下最优投资组合选择模型的进一步研究；

对连续时间不完全信息的投资消费问题更深入的研究；

行为心理学对有效市场理论的影响；

由于作者水平有限，本文一定存在不少不足之处，恳请各位专家、老师、读者提出批评意见。

致 谢

深深感谢我的导师刘三阳教授。正是刘老师对我的指导、帮助和培养，使我顺利地完成了硕士阶段的学习和研究。在两年多的学习和科研活动中，刘老师给予了我无微不至的关怀和帮助，这次论文的完成更是得到了刘老师的悉心指导，从选题、构思、成文到最后定稿，刘老师都严格要求，仔细审阅，提出了许多宝贵的意见和建议。刘老师渊博的知识、严谨的学风、对科学敏锐的洞察力和极强的预见性，给我的研究以莫大的启发。同时他正直无私的品格、豁达的胸襟和哲人的风度展现了杰出学者的思想境界和人格魅力，为我树立了做人的楷模。

感谢我的师兄师姐师弟师妹们，共同进行的学术讨论以及生活中相互间的帮助，使我得益匪浅，在此致以谢意。

深深感谢我的父母，是他们为我营造了和睦的家庭环境，教给我正确的待人处世之道，保证我顺利完成学业，希望我的成绩能给他们带去欢欣与骄傲。

最后感谢那些曾经帮助过我的人们！

参考文献

[1] Mandel brot B B and Bachelier L. In the new Palgrave: A Dictionary of Economic. London: Macmillan Predd Limited, 1989.

[2] Von Neumann J and Morgen Stern O. Theory of games and economics behavior. Princeton, New Jersey: Princeton University Press 1st Edition, 1944.

[3] Markowitz H. Portfolio selection. Journal of Finance. 1952, 1 .77-91。

[4] Sharp W F. Capital asset pricing: a theory of market equilibrium under conditions. Journal of Finance. 1964, 19. 425-442.

[5] Lintner J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolio and capital budgets. Review of Economics and Statistics. 1965,47. 13-37.

[6] Mossin J. Equilibrium in a Capital Asset Market. Econometrica, 1966, 34. 768-783.

[7] Fama E F. The behavior of stock priced. Journal of Business. 1965, 37(1). 34-105.

[8] Merton R C. Portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case. Rev. Econ. Statist., 1969, Vol.51. 247—257.

[9] Merton R C. Optimal consumption and portfolio rules in a continuous time model. J.Econ. Theory, 1971, Vol.3. 373—413.

[10] Merton R C. Continuous-Time Finance. Cambridge, MA: Basil Blackwell, 1990.

[11] Merton R C. An analytic derivation of the efficient frontier. Journal of Finance and Quantitative Analysis, 1972, Vol.9. 1851—1872.

[12] Karatzas I., Leoczky.J.S. and Shreve S. Explicit solution of a general consumption/investment problem. Mathematics of operations research. 1986, Vol.11, No.2. 261—294.

[13] John C C, Huang C. Optimal consumption and portfolio policies when asset price follow a diffusion process. Journal of Economic Theory. 1989, Vol.49. 33—83.

[14] John C C, Huang C. A variational problem arising in financial economics. J.of Math.Econ., 1991, Vol.20. 465-487.

[15] Karatzas, I., Lehoczky, Sethi S., Shreve, S.E. Martingale and duality methods for utility maximization in incomplete markets. SIAM J. control optimiz. 1991, Vol.29.

702-730.

[16] Karatzas,I., Lehoczky, Shreve, S.E. Optimal consumption and portfolio decision for a "Small Investor" on a finite horizon. SIAM J. control optimiz. 1987, Vol.25. 1557-1586.

[17] Ioannis Karatzas, Steven E.Shreve. Methods of Mathematical Finance. New York: Springer verlag,

[18] Ross S A. The arbitrage theory of capital. Joural of Economic theory. 1976,3.341-360.

[19] Markowitz H. Foundation of portfolio theory. Journal of finance. 1991, Vol.46, No.2. 469-477.

[20] Markowitz H. Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets.

[21] Markowitz H. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. New York, Basil Blackwell, 2ed Eddition, 1991.

[22] H.Yamazak. Mean-absobute deviation portfolio optimization models and its application to Tokyo stock market. Management Science. 1991, Vol.37. 519-531.

[23] Simaan Y. Estimation risk in portfolio selection: the mean variance model versus the mean absolute deviation model. Management Science. 1997, 43. 1437-1446.

[24] Yang.M.R. A minimax portfolio selection rule with linear programming solution. Management Science. 1998, Vol.44. 673-683.

[25] Cai. X.Q, Teo.K.L and Yang.X.Q. Portfolio optimization under a minimax rule. Management Science. 2000, Vol.46. 957-972.

[26] 王春峰，杨建林，赵欣。具有典型交易成本的投资组合管理模型及求解[J].系统工程理论与实践,2002,10：134-138。

[27] 唐万生，梁建峰，韩其恒. 组合证券投资的概率准则模型[J].系统工程学报，2004，19（2）：193-197。

[28] Brockette PL, Kahane Y. Risk, return, skew-ness and preference [R]. The University of Taxas at Ausin,1989.

[29] 梁建峰，唐小我.有交易费用的组合证券投资的概率准则模型[J].系统工程，2001，19（2）：5-10。

[30] Ruefli TW. Longitidinal risk-return relationships: pradox lost [J]. Mnagement science 1990 ,36 : 368-380.

[31] Arnott R,Wagner W H. The measurement and control of trading costs[J]. Financial Analyst Journal, 1990, Nov/Dec:73-80.

[32] Perold A F. Large-scal portfolio optimization [J]. Management Science,1984,30: 1143-1160.

[33] Mulvey J M, Waclimirow H. Stochastic net work programming for financial planning problems [J]. Management Science ,1992, 38:1642-1664.

[34] Gennotte G, Jung A.Investment strategies under transaction costs: the finite horizon case [J]. Manangement Science,1994, 40:385-404.

[35] M.阿佛里耳。非线性规划[M]。上海：上海科学技术出版社，1979。

[36] Perold A F. Large-scal portfolio optimization [J]. Management Science,1984,30: 1143-1160.

[37] Mulvey J M, Waclimirow H. Stochastic net work programming for financial planning problems [J]. Management Science ,1992, 38:1642-1664.

[38] Dantigiz G B,Infanger G. Multistage stochastic linear programs for portfolio optimization [J]. Annals of Operations Research,1993,45:59-76.

[39] Gennotte G, Jung A.Investment strategies under transaction costs: the finite horizon case [J]. Management Science,1994, 40:385-404.

[40]Yoshimoto A. The mean-variance approach to portfolio optimization subject to transaction costs [J]. Journal of the Operation Research of Japan,1996,39,99-117.

[41] Enrique Ballestero. Stochastic goal programming: A mean-variance approach [J]. European Journal of Operational Research 131(2001)476-481.

[42] Eltonm, E.,Gruber,M.,1984. Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. Wiley, New York

[43] Christer Carlsson, Robert Fuler, Peter Majlender, Apossibilistic approach to selecting portfolios with highest utility score [J], TUCS Technical Report No 355,August 2000.

[44]《不确定性规划》[M]，刘宝碇、赵瑞清、王纲著，清华大学出版社。

[45] J. Watada, Fuzzy portfolio selection and its applications to decision making [J], Tatra Mountains Math. Pub. 13 (1997)219-248.

[46] Liu B and Liu Y. K, Excepted value of fuzzy variable and fuzzy excepted value model [J],IEEE Transactions on fuzzy systems,2002,10(4):445-450.

[47] M.Inuiguchi and T.Tanino,Portfolio selection under independent possibilistic information [J], Fuzzy Sets and Systems,115(2000)83-92.

[48] Christer Carlson,Robert Fuller, Peter Majlender [J] A Possibilistic Approach to Selecting Portfolios with Highest Utility Score, Turku Centre for computer Science TUCS Technical Report No 355,2000,8.

[49] Scrichander Kamaswamy, Portfolio Selection Using Fuzzy Decision Theory[J],1998,11,BIS working paper .

[50] L.A.Zadeh,The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I, Information Science 8 (1975) 199-330.

[51] C. Stanciulescu, Ph.Fortemps, M.Installe, V.Wertz, Multi-objective linear programming problems with fuzzy decision variables, European Journal of Operational Research, 149(2003) 654-675.

[52] S.A.Orlovski, Calculus of Decomposable Properties, Fuzzy Set, Decisions, Allerton Press,New York,1994.

[53] H.Rommelfanger,R.Slowinski, Fuzzy linear programming with single or multiple or multiple objective functions , in: R.Slowinski(ED.),Fuzzy Sets in Decision Analysis, Operations research, Statistics,The Handbooks of fuzzy sets,vol.1,Kluwer Academic Publishers,1998.

[54] Ph. Fortemps, M.Roubens, *Ranking and defuzzification methods based on area compensation*, fuzzy Sets and Systems 82(1996) 319-330.

[55] M.Roubens, *Inequality constraints between fuzzy numbers, their use in mathematical programming,in: R. Slowinski, J.Teghem (Eds), Stochastic versus Fuzzy Approaches to Multi-objective Mathematical Programming Uncertainty* , Kluwer Academic Publishers, 1990, pp.321-330.

[56] 罗洪浪，王浣尘. 现代投资组合理论的新进展. 系统工程理论方法应用. 2002, 9. 185-197。

[57] 陈学荣，张银旗，周维. 投资组合理论及其在中国证券市场中的应用研究. 系统工程. 2000, 9. 6-12。

[58] 于维生. 组合证券投资的有效边界. 数理统计与管理. 1996, 5. 27-31。

[59] 任达，屠新曙. 无风险利率下投资组合的有效前沿. 北京理工大学学报. 2002, 5. 75-78。

[60] 张卫国. 不相关资产组合投资优化模型及实证分析. 系统工程理论与实践. 1998, 4. 34-40。

[61] 唐小我. 组合证券投资决策的计算方法. 管理工程学报. 1990, 3. 53-57。

[62] 卢祖帝，赵泉水. 上海股票市场的投资组合分析：给予均值—绝对偏差的折衷方法. 管理科学学报. 2001, 2. 12-16。

[63] 王春峰，王海晖，张维. 金融市场风险测量模型-VaR. 系统工程学报. 2000, 3. 67-75。

[64] 陈金龙，张维. CVaR与投资组合优化统一模型. 系统工程理论方法应用. 2002, 3. 68-71。

[65] 吕锋，倪志红. 组合投资在E-SH风险下的有效边界. 系统工程理论方法应用. 1995, 2. 35-39。

[66] 荣喜民，张喜彬，张世英. 组合证券投资模型研究. 系统工程学报. 1998, 1. 81-87。

[67] 龙朝阳，王键，祝建军. 改进β约束的组合投资决策优化模型. 预测. 2001, 1.

68-70。
[68] 刘莉，周红霞．允许卖空的最优资产组合投资模型．应用数学．2002,2. 97-101。
[69] 吴可．基于β域的证券投资风险弱化策略．系统工程. 1999, 5. 6-11。
[70] 马永开，唐小我．允许持有无风险资产的β值证券组合投资决策模型研究．系统工程理论与实践. 2000, 12. 26-32。
[71] 马永开，唐小我．不允许卖空的多因素证券组合投资决策模型．系统工程理论与实践. 2000, 2. 37-43。
[72] 徐东，杨招军，黄立宏．金融与随机分析评述．系统工程. 2003, 5. 18-23。
[73] 汪贵浦，王明涛. Harlow 下偏矩证券组合优化模型的求解方法研究．系统工程理论与实践. 2003, 6. 42-47。
[74] 叶中行，林建忠．数理金融-金融定价与金融决策理论．科学出版社, 1998。
[75] 陈共，周升业，吴晓求．证券投资分析．中国人民大学出版社, 1998。
[76] 程希骏，胡达沙．金融投资数理分析．安徽科学技术出版社, 2001。
[77] 陈伟忠．动态组合投资理论与中国证券定价．陕西人民出版社, 1997。
[78] 王一鸣．数理金融经济学．北京大学出版社, 2000。
[79] 哈里.马可威茨．资产选择-投资的有效离散化．刘军霞，张一驰译．首都经贸大学出版社, 1997。
[80] 郭尚来．随机控制．清华大学出版社, 1999。
[81] 袁亚湘，孙文瑜．最优化理论与方法．科学出版社, 1997。
[82] 罗伯特.A.哈根．现代投资学．郭世坤等译．中国财政经济出版社, 1992。
[83] 陈开周．最优化计算方法．西安电子科技大学出版社, 1984。
[84] 曹凤岐．证券投资学．北京大学出版社, 1997。
[85] 贝政新，陈瑛．证券投资通论．复旦大学出版社, 1998。
[86] 博通，凯恩，马库斯．投资学．朱宝宪，吴洪，赵冬青译．机械工业出版社, 2002。
[87] 吴晓求．处在十字路口的中国资本市场－吴晓求演讲谈访录．中国金融出版社, 2002。

研究成果

1．阿春香，刘三阳．模糊环境下组合投资问题的一种混合智能方法，《数学的实践与认识》（核心期刊），已录用；

2．阿春香，刘三阳．组合投资问题的相关机会模型及其遗传算法，《系统工程》（核心期刊），已录用；

3．A Chunxiang, Liu Sanyang. *An approach to Portfolio Selection with Some Potential Satisfactory Solutions* , accepted for the Joint Mathematics Meetings in Atlanta, Georgia, January 5-8, 2005. The paper has been included into the Mathematical Association of America'General Contributed Paper Session , VIII, 1003-X1-199；

4．A Chunxiang, Liu Sanyang. *Model of Portfolio Selection based on Probability Criteria with Typical Transaction Cost*, sent to "Operation Research";

5．A Chunxiang, Liu Sanyang. *Dependence-chance Model of Portfolio Selection with Typical Transaction Cost and its Solution*, sent to "Operation Research Letter";

6．阿春香，刘三阳．组合投资问题的目标规划模型，西安电子科技大学研究生 2004 年学术年会。