И.Г.Бурова, Ю. К. Демьянович

АЛГОРИТМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Курс лекций

ВВЕДЕНИЕ

Имеется большое количество важнейших задач, решение которых требует использования огромных вычислительных мощностей, зачастую недоступных для современных вычислительных систем. К таким задачам прежде всего относятся задачи точных долгосрочных прогнозов климатических изменений и геологических катаклизмов (землетрясений, извержений вулканов, столкновений тектонических плит), прогнозов цунами и разрушительных ураганов, а также экологических прогнозов и т.п. Сюда следует отнести также прогнозирование результатов экспериментов во многих разделах физики, в особенности, экспериментов по выявлению основ мироздания (экспериментов на коллайдерах со встречными пучками частиц, экспериментов, направленных на получение антиматерии и, так называемой, темной материи и т.д.). Важными задачами являются расшифровка генома человека, определение роли каждого гена в организме, влияние генов на здоровье человека и на продолжительность жизни. Не решена задача безопасного хранения вооружений, в особенности, ядерного оружия (из-за запрета на ядерные испытания состояние накопленных ядерных зарядов можно определить лишь путем моделирования на компьютере большой мощности). Постоянно появляются новые задачи подобного рода и возрастают требования к точности и к скорости решения прежних задач; поэтому вопросы разработки и использования сверхмощных компьютеров (называемых суперкомпьютерами) актуальны сейчас и в будущем. К сожалению технологические возможности увеличения быстродействия процессоров ограничены: увеличение быстродействия связано с уменьшением размеров процессоров, а при малых размерах появляются трудности из-за квантово-механических эффектов, вносящих элементы недетерминированности; эти трудности пока что не удается преодолеть. Из-за этого приходится идти по пути создания параллельных вычислительных систем, т.е. систем, в которых предусмотрена одновременная реализация ряда вычислительных процессов, связанных с решением одной задачи. На современном этапе развития вычислительной техники такой способ, по-видимому, является одним из основных способов ускорения вычислений.

Первоначально идея распараллеливания вычислительного процесса возникла в связи с необходимостью ускорить вычисления для

решения сложных задач при использовании имеющейся элементной базы. Преполагалось, что вычислительные модули (процессоры или компьютеры) можно соединить между собой так, чтобы решение задач на полученной вычислительная системе ускорялось во столько раз, сколько использовано в ней вычислительных модулей. Однако, достаточно быстро стало ясно, что для интересующих сложных задач упомянутое ускорение, как правило, достичь невозможно по двум причинам: 1) любая задача распараллеливается лишь частично (при полном распараллеливании параллельные части не могут взаимодействовать в процессе счета и представляют собой отдельные задачи меньшего размера, так что использование параллельной системы теряет смысл), 2) коммуникационная среда, связывающая отдельные части параллельной системы, работает значительно медленнее процессоров, так что передача информации существенно задерживает вычисления.

Параллельное программирование невозможно без представления о методах решения возникающих задач, об архитектуре параллельных вычислительных систем и о математическом обеспечении, которое имеют эти системы. Важно знать класс методов, удобных для реализации на параллельной системе, и алгоритмическую структуру этих методов, а также изучить средства параллельного программирования.

В данном курсе рассматриваются некоторые проблемы высокопроизводительных вычислений на параллельных вычислительных системах, но слово "вычисления" здесь понимается в расширенном смысле: это не обязательно решение чисто вычислительных задач; излагаемые средства применимы для обработки самой разнообразной информации.

Любознательным читателям, жаждущим расширить свой кругозор, рекомендуются книги [1-4]; эти книги существенно использовались при подготовке данного курса.

Подготовка издания выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 04-01-00692, 04-01-00026, 07-01-00269 и 07-01-00451).

Глава 1. О ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ

§ 1. Введение

Многие явления природы характеризуются параллелизмом (одновременным исполнением процессов с применением различных путей и способов). В частности, в живой природе параллелизм распространен очень широко в дублирующих системах для получения надежного результата. Параллельные процессы пронизывают общественные отношения, ими характеризуются развитие науки, культуры и экономики в человеческом обществе. Среди этих процессов особую роль играют параллельные информационные потоки. Среди них можно упомянуть потоки информации со спутников, от различных источников излучения во Вселенной, циркуляцию информации в человеческом обществе и т. п. При проведении вычислений обычными стали многозадачность и мультипрограммность, мультимедийные средства, компьютерные локальные сети, а также глобальные сети, такие, как Интернет, сеть WEB и т.п. Это показывает, что серьезное изучение вопросов распараллеливания и высокопроизводительных вычислений чрезвычайно важно.

За многие годы существования однопроцессорных систем произошло весьма четкое разделение сфер между вычислительной техникой, алгоритмическими языками и численными методами (в широком смысле этого слова).

Однако, на первых порах развития высокопроизводительных вычислений появилась необходимость совместного развития всех трех перечисленных направлений.

Последние годы характеризуются скачкообразным прогрессом в развитии микроэлектроники, что ведет к постоянному совершенствованию вычислительной техники. Появилось большое количество вычислительных систем с разнообразной архитектурой, исследованы многие варианты их использования при решении возникающих задач.

Среди параллельных систем различают конвейерные, векторные, матричные, систолические, спецпроцессоры и т.п. Родоначальниками параллельных систем являются ILLIAC, CRAY, CONVEX и др. В настоящее время все суперкомпьютеры являются параллельными системами.

Суперкомпьютеры каждого типа создаются в небольшом количестве экземпляров, обычно каждый тип суперкомпьютеров имеет определенные неповторимые архитектурные, технологические и вычислительные характеристики; поэтому сравнение суперкомпьютеров весьма сложная задача, не имеющая однозначного решения. Тем не менее, разработаны определенные принципы условного сравнения компьютеров (это важно для их дальнейшего совершенствования и для продвижения на рынке). В соответствии с этими принципами суперкомпьютеры классифицируются в списке TOP500, который размещен в Интернете по адресу www.top500.org. Этот список содержит 500 типов компьютеров, расположенных в порядке убывания мощности; в списке указывается порядковый номер суперкомпьютера, организация, где он установлен, его название и производитель, количество процессоров, максимальная реальная производительность (на пакете LINPACK), теоретическая пиковая производительность. Так, например, в 29-й редакции списка ТОР500 (появившейся 27 июня 2007 года) на первом месте находится суперкомпьютер BlueGene/L фирмы IBM с числом процессоров 131072, максимальной реальной производительностью 280.6 триллионов операций с плавающей точкой в секунду (280.6 Tflops) и с пиковой производительностью 367 Tflops.

С появлением параллельных систем возникли новые проблемы:

- как обеспечить эффективное решение задач на той или иной параллельной системе, и какими критериями эффективности следует пользоваться;
- как описать класс тех задач, которые естественно решать на данной параллельной системе, а также класс задач, не поддающихся эффективному распараллеливанию;
- как обеспечить преобразование данного алгоритма в подходящую для рассматриваемой параллельной системы форму (т.е. как распараллелить алгоритм);
- как поддержать переносимость полученной программы на систему с другой архитектурой;
- как сохранить работоспособность программы и улучшить ее характеристики при модификации данной системы; в частности, как обеспечить работоспособность программы при увеличении количества параллельных модулей.

Естественным способом решения этих проблем стало создание стандартов как для вычислительной техники (и прежде всего — $\,$

для элементной базы), так и для программного обеспечения. В настоящее время разрабатываются стандарты для математического обеспечения параллельных вычислительных систем; в частности, постоянно дорабатываются стандарты MPI и Open MP, а также некоторые другие.

Итак, требуется:

- выделить класс задач, которые необходимо решать на параллельной системе;
- выбрать или сконструировать систему для выделенного класса задач;
- создать подходящее математическое обеспечение для упомянутого класса задач на выбранной параллельной системе;
- написать программу для данной конкретной задачи с учетом перечисленных факторов.

§ 2. О некоторых вычислительных задачах

Характерным (и типичным) примером сложной вычислительной задачи является задача о компьютерном моделировании климата (в частности, задача о метеорологическом прогнозе). Климатическая задача включает в себя атмосферу, океан, сушу, криосферу и биоту (биологическую составляющую). Климатом называется ансамбль состояний, который система проходит за большой промежуток времени.

Под климатической моделью подразумевается математическая модель, описывающая климатическую систему с той или иной степенью точности.

В основе климатической модели лежат уравнения сплошной среды и уравнения равновесной термодинамики. В модели описываются многие физические процессы, связанные с переносом энергии: перенос излучения в атмосфере, фазовые переходы воды, мелкомасштабная турбулентная диффузия тепла, диссипация кинетической энергии, образование облаков, конвекция и др.

Рассматриваемая модель представляет собой систему нелинейных уравнений в частных производных в трехмерном пространстве. Ее решение воспроизводит все главные характеристики ансамбля состояний климатической системы. * Работая с ней, приходится принимать во внимание следующее:

^{*}Если обозначить $\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\overline{v}\nabla=\frac{\partial}{\partial t}+v_x\frac{\partial}{\partial x}+\dots$, то простейшая система уравнений, моделирующая погоду, решается в приземном сферическом слое Σ

- в отличие от многих других наук при исследовании климата нельзя поставить глобальный натурный эксперимент;
- проведение численных экспериментов над моделями и сравнение результатов экспериментов с результатами наблюдений единственная возможность изучения климата;
- сложность моделирования заключается в том, что климатическая модель включает в себя ряд моделей, которые разработаны неодинаково глубоко; при этом лучше всего разработана модель атмосферы, поскольку наблюдения за ее состоянием ведутся давно и, следовательно, имеется много эмпирических данных;
- общая модель климата далека от завершения; поэтому в исследования включают обычно лишь моделирование состояния атмосферы и моделирование состояния океана.

Рассмотрим вычислительную сложность обработки модели состояния атмосферы.

Предположим, что нас интересует развитие атмосферных процессов на протяжении 100 лет.

При построении вычислительных алгоритмов используем принцип дискретизации: вся атмосфера разбивается на отдельные элементы (параллелепипеды) с помощью сетки с шагом 1^o по широте и по долготе; по высоте берут 40 слоев. Таким образом получается 2.6×10^6 элементов. Каждый элемент описывается десятью компонентами. В фиксированный момент времени состояние атмосферы характеризуется ансамблем из 2.6×10^7 чисел. Условия развития процессов в атмосфере требуют каждые 10 минут находить новый ансамбль, так что за 100 лет будем иметь $5.3\cdot10^6$ ансамблей.

⁽в тропосфере, окружающей Землю) и состоит из слудующих уравнений:

[—] уравнения количества движения $\frac{D\overline{v}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + g - 2\overline{\Omega} \times \overline{v}$, где p — давление, ρ —плотность, g — ускорение силы тяжести, $\overline{\Omega}$ — угловой вектор скорости вращения Земли, \overline{v} — скорость ветра;

вращения Земли, \overline{v} — скорость ветра; — уравнения сохранения энергии $c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt}$, где c_p — удельная теплоем-кость;

[—] уравнения неразрывности (уравнения сохранения массы) $\frac{Dp}{Dt} = -\rho \overline{\nabla} \cdot \overline{v},$ где $\overline{\nabla} \cdot \overline{v} = {\rm div} \overline{v};$

[—] уравнения состояния $p = \rho RT$, где R — константа.

Фактически, перед нами система шести нелинейных скалярных уравнений относительно шести неизвестных функций (зависящих от трех координат $(x,y,z)\in \Sigma$ и времени t), а именно, относительно компонент $v_x,\,v_y,\,v_z$ вектора скорости \overline{v} и функций $p,\,\rho,\,T.$ К этим уравнениям присоединяются начальные и граничные условия; полученная система уравнений представляет собой математическую модель погоды. Заметим, что климатическая модель намного сложнее.

Таким образом, в течение одного численного эксперимента получим около $2.6\cdot 10^6\times 5.3\cdot 10^7\approx 1.4\cdot 10^{14}$ числовых результатов. Если учесть, что для получения одного числового результата требуется 10^2-10^3 арифметических операций, то приходим к выводу, что для одного варианта вычисления модели состояния атмосферы на интервале 100 лет требуется затратить $10^{16}-10^{17}$ арифметических действий с плавающей точкой. Следовательно, вычислительная система с производительностью 10^{12} операций в секунду при полной загрузке и эффективной программе будет работать 10^4-10^5 секунд (иначе говоря, потребуется от 3 до 30 часов вычислений). Ввиду отсутствия точной информации о начальных и о краевых условиях, требуется просчитать сотни подобных вариантов.

Заметим, что расчет полной климатической модели займет на порядок больше времени.

§ 3. Численный эксперимент и его целесообразность

Предыдущий пример показывает, что высокопроизводительные вычислительные системы необходимы для прогноза погоды, а также для прогнозирования климатических изменений. Нетрудно понять, что задачи прогноза землетрясений, цунами, извержений и других природных катаклизмов требуют решения не менее сложных математических задач. Еще сложнее задачи высоконадежных вычислений, связанных с исследованиями космоса, с экспериментами на субатомном уровне (постройка ускорителей элементарных частиц, ядерных реакторов), с испытанием и хранением ядерного оружия и др.

Высокопроизводительная вычислительная система имеет большую стоимость; ее создание и эксплуатация требуют обучения большого числа специалистов. Создание математического обеспечения и программ для такой системы — весьма трудоемкая задача. С другой стороны, ряд задач допускает постановку натурного эксперимента, что в ряде случаев быстрее приводит к цели, чем проведение численного эксперимента, хотя стоимость натурного эксперимента может оказаться очень большой.

Какое же количество вычислительных систем на самом деле целесообразно иметь? Ответ зависит от конкретной ситуации.

Например, до запрещения испытаний ядерного оружия был возможен натурный эксперимент. После запрещения испытаний он стал невозможен, так что способы надежного хранения и совершенствования ядерного оружия определяются исключительно численным экспериментом, для проведения которого нужны мощнейшие компьютеры, соответствующие программные разработки, штат специалистов и т.д.

Существует множество областей, в которых невозможно или трудно проводить натурный эксперимент: экономика, экология, астрофизика, медицина; однако во всех этих областях часто возникают большие вычислительные задачи.

В некоторых областях, таких как аэродинамика, часто проводится дорогостоящий натурный эксперимент: "продувка" объектов (самолетов, ракет и т. п.) в аэродинамической трубе. В начале прошлого века "продувка" самолета братьев Райт стоила более 10 тысяч долларов, "продувка" многоразового корабля "Шаттл" стоит 100 миллионов долларов.

Однако, как оказалось, "продувка" не дает полной картины обтекания объекта, так как нельзя установить датчики во всех интересующих точках.

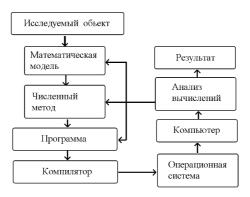


Рис. 1. Этапы численного эксперимента.

Для преодоления упомянутых выше трудностей приходится создавать математическую модель и проводить численный эксперимент, который обходится недешево, но все же значительно дешевле, чем натурный эксперимент.

Типичная ситуация состоит в следующем:

— исследуемые объекты являются трехмерными;

- для приемлемой точности приходится использовать сетку с одним миллионом узлов:
- в каждом узле необходимо найти числовые значения от 5 до 20~ функций;
- при изучении нестационарного поведения объекта нужно определить его состояние в 10^2 – 10^4 моментах времени;
- на вычисление каждого значимого результата в среднем приходится 10^2 – 10^3 арифметических действий;
- -вычисления могут циклически повторяться для уточнения результата.

Этапы численного эксперимента изображены на рис. 1.

Замечание. Если хотя бы один из этапов выполняется неэффективно, то неэффективным будет и весь численный эксперимент (и проводить его, по-видимому, нецелесообразно).

§ 4. Об архитектуре вычислительных систем

4.1. Однопроцессорные системы

В архитектуре однопроцессорных вычислительных систем (ВС) принято различать следующие устройства:

- устройства управления (УУ),
- центральный процессор (ЦП),
- память,
- устройство ввода-вывода (В/В),
- каналы обмена информацией.



Рис. 2. Схема однопроцессорной ВС.

Принцип работы однопроцессорной ВС состоит в последовательном выполнении команд. Главной задачей при создании алгоритма является представление алгоритма в виде последовательности команд. Основная проблема оптимизации сводится к минимизации числа операций и размера требуемой памяти.

4.2. Многопроцессорные системы

Многопроцессорные системы формально имеют сходную структуру (рис. 3):

- устройство управления;
- первый процессор;
- второй процессор;
- *k*-й процессор;
- память (общую или разделенную);
- устройство ввода-вывода;

каналы обмена информацией.

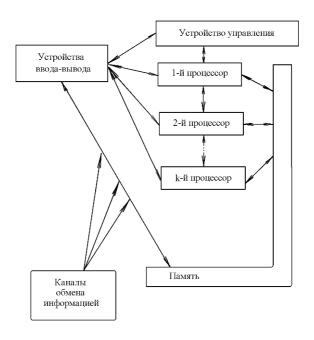


Рис. 3. Схема многопроцессорной ВС.

Узкое место такой системы — коммуникационная сеть (каналы обмена информацией). Сложность сети обычно растет пропорционально квадрату числа имеющихся устройств. В настоящее время трудно создать эффективную связь между любыми двумя устройствами многопроцессорной ВС.

В многопроцессорных системах организация коммуникаций всегда ограничивает класс решаемых задач.

$4.3.\ Tрудности использования многопроцессорной <math>BC$

Основная трудность состоит в том, что большая производительность (близкая к максимальной) может быть достигнута лишь тогда, когда все или бо́льшая часть процессоров будут загружены полезной работой. Ввиду этого однопроцессорная система (при эффективной программе вычислений) имеет максимальную производительность.

При решении задач на многопроцессорных системах приходится сталкиваться со следующими вопросами:

- какие алгоритмы эффективно реализуются на данной многопроцессорной системе?
- какие нужно создавать многопроцессорные системы для данного класса задач?
- какими должны быть вычислительные методы, чтобы они были удобны для многопроцессорных систем?

Одной из важнейших идей при создании многопроцессорных систем и при эффективной реализации алгоритмов на этих системах является идея конвейерных вычислений.

4.4. Идея конвейерных вычислений

При поступлении потока задач каждая из них может расщепляться на последовательность подзадач с тем, чтобы любая такая последовательность реализовывалась на одной из свободных от работы частей вычислительной системы. Это позволяет эффективнее использовать имеющееся оборудование, уменьшая его простои и частично совмещая решение упомянутых подзадач.

Вычислительная система, предназначенная для такого использования, называется конвейерной, а процесс подобных вычислений — конвейером.

В конвейере различают r последовательных этапов, так что когда i-я операция проходит s-й этап, то (i+k)-я операция проходит (s-k)-й этап (рис. 4).

Итак, имеется два направления повышения эффективности:

— использование многих устройств одновременно для однотипных операций (это называеся *распарамемиванием*);

— повышение загруженности каждого устройства использованием различных его частей для одновременного проведения разнотипных операций (это называется конвейеризацией).

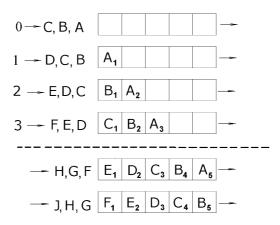


Рис. 4. Схема конвейера

Конечно, конвейеризация может сыграть существенную роль в уменьшении числа необходимых арифметических устройств и тем самым значительно повлиять на увеличение эффективности.

4.5. О классификации многопроцесорных систем

При классификации многопроцессорных систем дополнительно учитываются следующие особенности:

- тип потока команд (одиночный или множественный);
- тип потока данных (одиночный или множественный);
- способ обработки данных (пословная или поразрядная обработка);
 - тип памяти (распределенная или общая);
 - тип коммуникационной сети (быстрая или медленная связь);
- степень однородности компонент (например, систолические массивы);

— степень согласованности работы устройств (синхронный и асинхронный режимы).

4.6. Примеры высокопроизводительных BC

Вот некоторые примеры параллельных систем.

1. Система ILLIAC-IV (1974 г.) имела 64 процессора, выполняла 100–200 млн оп./сек с 64-разрядными словами. Память этой системы распределенная (у каждого процессора 2048 слов).

Конструктивно система содержала матрицу процессоров 8×8 . В этой системе команды выполнялись синхронно.

Коммуникациями служили быстрые каналы, связывающие каждый процессор с четырьмя соседними процессорами. В результате получилась система, позволяющая решать довольно узкий класс задач.

- 2. В системе CRAY-1 (1976 г.) был использован конвейерный принцип. Система выполняла 80—140 млн оп./сек с 64-разрядными словами и имела 12 функциональных конвейерных устройств. Режим работы синхронный. Здесь имелось 8 векторных регистров по 64 слова, а также быстрые регистры, позволяющие быстро перестраивать систему конвейеров в разнообразные цепочки с передачей данных через эти быстрые регистры и производить операции над векторами большой длины.
- 3. Система Earth-Simulator (фирма NEC, 2002 г.) одна из последних разработок среди суперкомпьютеров (она имеет 5120 параллельных процессоров). Эта система достигла пиковой производительности 40.9 триллиона операций (с плавающей точкой) в секунду (кратко 40.9 Терафлопс), а также произодительности 35.8 Терафлопс на реальных задачах линейной алгебры (из пакета LINPACK) и была мощнейшей в мире системой до 2005 года.
- $4.\ C\ 2005$ года наиболее мощной является система BlueGene/L (фирма IBM); как отмечено выше, эта система имеет 131072 параллельных процессоров, достигает пиковой производительности 367 Терафлопс, а на реальных задачах ее производительность 280.6 Терафлопс.

Фирма IBM анонсировала создание суперкомпьютера Blue Gene/P, который позволит достичь пиковой производительности 3 Pflops (т.е. производительности 3 квадрильона арифметических операций с плавающей точкой в секунду), что в сто тысяч раз мощнее наиболее мощного персонального компьютера. К марту

2009 года совместными усилиями японских компаний Hitachi, NEC и Fujitsu предполагается создать суперкомпьютер со значительно бо́льшей пиковой поизводительностью, а именно — 10 Pflops.

§ 5. О понятии "алгоритм"

Понятие алгоритм, используемое в теории алгоритмов, существенно отличается от понятия "алгоритм", которое в дальнейшем мы будем использовать. Математическая энциклопедия (МЭ) содержит следующее определение. "Алгоритм — точное предписание, которое задает вычислительный процесс (называемый в этом случае алгоритимическим), начинающийся с произвольного исходного данного (из некоторой совокупности возможных для данного алгоритма исходных данных) и направленный на получение полностью определяемого этим исходным данным результата. "На этом статья для определения алгоритма не кончается: каждый может ознакомиться с ее полным текстом (см. МЭ, т.1, 1977 г., с. 202). Здесь слова "вычислительный процесс" не означают обязательно операции с числами — это может быть работа с любыми четко определенными объектами по заданным правилам.

На с.206 этой же энциклопедии дается понятие "Алгоритм в алфавите A": это — "точное общепонятное предписание, определяющее потенциально осуществимый процесс последовательного преобразования слов в алфавите A, процесс, допускающий любое слово в алфавите A в качестве исходного". Очевидно, понятие "алгоритм в алфавите A" — более узкое понятие, чем понятие алгоритма, отмеченное выше (то есть это частный случай более общего понятия алгоритма).

В конечном счете вычислительная система дискретного действия обрабатывает двоичные коды, и потому можно считать, что алфавит А состоит из двух символов 0 и 1; с этой точки зрения любое моделирование на упомянутой системе можно рассматривать как численное решение (с той или иной точностью) поставленной задачи. На первый взгляд представляется правильным сначала "разработать алгоритм решения" поставленной задачи, затем его запрограммировать и реализовать на имеющейся вычислительной системе. Однако, давно замечено, что понятие алгоритма для этих целей не достаточно: даже в простейших случаях алгоритм определяется лишь в момент реализации. Приведем пример, иллюстрирующий возникшую ситуацию.

 $\Pi pumep.$ Рассмотрим задачу об отыскании квадратного корня из числа a>0. Будем использовать соотношение

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad x_0 > 0,$$

до тех пор пока $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$, где $a,\,\varepsilon,\,x_0$ — заданные числа.

Является ли это соотношение описанием алгоритма? Поскольку его можно реализовать в виде программы вычислений на компьютере, то можно предположить, что ответ положительный.

Однако, начальное значение $x_0 > 0$ нельзя брать произвольным (так например, при программировании на языке Си или на Паскале нельзя брать x_0 иррациональным числом), при вычислениях, возможно, придется использовать "машинную арифметику" с присущими ей правилами округления и учитывать другие ограничения (на первый взгляд кажется, что использование обыкновенных дробей позволило бы отказаться от округления, но это привело бы к быстрому исчерпанию ресурсов по памяти и быстродействию).

Таким образом, результат будет зависеть от свойств используемой вычислительной системы (разрядности, правил округления и т. п.) и программного окружения; однако, упомянутые свойства (во всем многообразии деталей), как правило, пользователю неизвестны, так что "разработать алгоритм решения" поставленной задачи, строго говоря, не удастся (на это обстоятельство указывал Н.Вирт).

В приведенном примере упомянутые действия не имеют четкого конструктивного определения. При изучении вопросов распараллеливания подобная неопределенность значительно возрастает и с этим приходится мириться, но при гигантской сложности современных задач подобная неопределенность требует повышенной устойчивости параллельных версий алгоритмов.

Будем называть *псевдоалгоритмом* (с указанной областью определения) однозначно понимаемую совокупность указаний о выполняемых действиях, считая, что сами действия не обязательно имеют четкое конструктивное определение. При уточнении определения упомянутых действий исходный псевдоалгоритм можно заменить новым, называемым *уточнением* предыдущего. В результате получается цепочка уточняющих псевдоалгоритмов, последним звеном которой является алгоритм реализации вычислений. Учет возможных изменений свойств используемой вычислительной системы (или ее замены) и программного окружения приводит к де-

реву псевдоалгоритмов, листьями которого служат различные алгоритмы реализации, связанные с исходным псевдоалгоритмом — корнем этого дерева.

В данном курсе будем использовать термин aлгoрuтm как эквивалент термина nсевdоaлгoрuтm.

§ 6. Параллельная форма алгоритма

Для реализации алгоритма на параллельной системе его следует представить в виде *последовательности групп операций*.

Отдельные операции в каждой группе должны обладать следующим свойством: их можно выполнять одновременно на имеющихся в системе функциональных устройствах.

Итак, пусть операции алгоритма разбиты на группы, а множество групп полностью упорядоченно так, что каждая операция любой группы зависит либо от начальных данных, либо от результатов выполнения операций, находящихся в предыдущих группах.

Представление алгоритма в таком виде называется *параллельной формой* алгоритма. Каждая группа операций называется *ярусом*, а число таких ярусов — 6ucomoй параллельной формы. Максимальное число операций в ярусах (число привлекаемых процессов в ярусах) — mupunoй параллельной формы.

Один и тот же алгоритм может иметь много параллельных форм. Формы минимальной высоты называются максимальными.

Рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. Пусть требуется вычислить выражение

$$(a_1a_2 + a_3a_4)(a_5a_6 + a_7a_8),$$

соблюдая лишь тот порядок выполнения операций, который представлен в записи.

Фактически здесь фиксирован не один алгоритм, а несколько, эквивалентных по результатам.

1.1. Приведем один из них:

Данные: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$. Ярус 1. $a_1a_2, a_3a_4, a_5a_6, a_7a_8$. Ярус 2. $a_1a_2 + a_3a_4, a_5a_6 + a_7a_8$. Ярус 3. $(a_1a_2 + a_3a_4)(a_5a_6 + a_7a_8)$.

Высота этой параллельной формы равна 3, а ширина 4.

Особенность этой параллельной формы в том, что 4 процессора загружены только на первом ярусе, а на последнем ярусе загружен лишь один процессор.

1.2. Вторая параллельная форма имеет вид:

Данные: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$. Ярус 1. a_1a_2, a_3a_4 . Ярус 2. a_5a_6, a_7a_8 . Ярус 3. $a_1a_2 + a_3a_4, a_5a_6 + a_7a_8$. Ярус 4. $(a_1a_2 + a_3a_4)(a_5a_6 + a_7a_8)$.

1.3. Третья параллельная форма такова:

Данные:
$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8.$$
 Ярус 1. $a_1a_2, a_3a_4.$ Ярус 2. $a_1a_2 + a_3a_4, a_5a_6.$ Ярус 3. $a_7a_8.$ Ярус 4. $a_5a_6 + a_7a_8.$ Ярус 5. $(a_1a_2 + a_3a_4)(a_5a_6 + a_7a_8).$

Ясно, что высота второй формы 4, третьей формы - 5, а ширина обеих форм одинакова и равна 2.

Для эффективного распараллеливания процесса стремятся

- 1) к увеличению загруженности системы процессоров;
- 2) к отысканию параллельной формы с заданными свойствами.

Пусть n=8. Требуется перемножить числа $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8.$

2.1. Обычная схема последовательного умножения:

Высота этой параллельной формы равна 7, ширина равна 1.

2.2. Уменьшение числа ярусов можно добиться с помощью *алгоритма сдваивания*, который состоит в следующем:

Данные $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ Ярус 1. $a_1a_2, a_3a_4, a_5a_6, a_7a_8$. Ярус 2. $(a_1a_2)(a_3a_4), (a_5a_6)(a_7a_8)$. Ярус 3. $(a_1a_2a_3a_4)(a_5a_6a_7a_8)$. Высота такой параллельной формы равна 3, ширина — 4. Процесс подобного вида называется cxemoù cdeaueanus. Для его реализации нужно на каждом ярусе осуществлять максимально возможное число попарно не пересекающихся перемножений чисел, полученных на предыдущем ярусе.

§ 7. О концепции неограниченного параллелизма

Концепция неограниченного параллелизма предполагает использование идеализированной модели неограниченной параллельной вычислительной системы.

Неограниченной параллельной вычислительной системой будем называть систему, работа которой производится в течение некоторого количества единиц дискретного времени, называемых тактами, и которая обладает следующими свойствами:

- 1) система имеет любое нужное число идентичных процессоров;
- 2) система имеет произвольно большую память, одновременно доступную всем процессорам;
- 3) каждый процессор за упомянутую единицу времени может выполнить *любую унарную* или *бинарную* операцию из некоторого априори заданного множества операций; операции из этого множества будем называть *основными*;
- 4) время выполнения всех вспомогательных операций (т.е. операций, не являющихся основными), время взаимодействия с памятью и время, затрачиваемое на управление процессором, считаются пренебрежимо малыми;
 - 5) никакие конфликты при общении с памятью не возникают;
- 6) все входные данные перед началом работы системы *записаны в памяты*;
- 7) после окончания вычислительного процесса все результаты ocmanomcs в namsmu.

§ 8. О схеме сдваивания

В дальнейшем символом $\lceil a \rceil$ обозначаем ближайшее к a целое число не меньшее числа a.

Теорема 8.1. Высота h параллельной формы умножения n чисел, соответствующей схеме сдваивания равна $\lceil \log_2 n \rceil$, а ее ширина w не превосходит $\lceil n/2 \rceil$.

Доказательство почти очевидно. В случае, когда n не является степенью двойки, найдем k так, чтобы $2^{k-2} < n < 2^k$, и дополним произведение $2^k - n$ сомножителями, равными единице. Далее строим параллельную форму, соответствующую схеме сдваивания, и подсчитываем высоту и ширину этой формы.

Аналогичным образом применяется схема сдваивания к сумме n чисел; в результате получается следующее утверждение.

Теорема 8.2. Высота параллельной формы сложения n чисел, соответствующей схеме сдваивания, равна $\lceil \log_2 n \rceil$, а ее ширина не превосходит $\lceil n/2 \rceil$.

Доказательству теоремы 8.1 (в случае, когда n не является степенью двойки, добавляем в сумму соответствующее число нулевых слагаемых). •

Пусть теперь требуется найти не только произведение n чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, но и все последовательные произведения

$$a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \ldots, a_1a_2 \ldots a_{n-1}.$$

Эта задача по схеме сдваивания реализуется очень эффективно. Продемонстрируем это на примере восьми сомножителей (n=8); на следующей ниже схеме искомые произведения подчеркнуты.

Данные:
$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$$

Ярус 1. $a_1a_2, a_3a_4, a_5a_6, a_7a_8$.
Ярус 2. $(a_1a_2)a_3 (a_1a_2)(a_3a_4), (a_5a_6)a_7 a_5a_6a_7a_8$.
Ярус 3. $(a_1a_2a_3a_4)a_5 (a_1a_2a_3a_4)(a_5a_6)$
 $(a_1a_2a_3a_4)(a_5a_6a_7) (a_1a_2a_3a_4)(a_5a_6a_7a_8)$.

Здесь высота h=3, ширина w=4, и имеется полная загрузка процессоров, однако, некоторые результаты "лишние" в том смысле, что в окончательном ответе они не нужны (последнее — достаточно типичное свойство параллельных алгоритмов).

Нетрудно реализовать эту схему для произвольного числа n сомножителей, дополнив их в случае, когда n не является степенью двойки, необходимым числом единиц. Эта схема тоже называется $cxemoù\ cdeaueahus\$ (для последовательных произведений). Высота и ширина этой схемы такая, как указано в теореме 8.1.

Отметим две особенности параллельных алгоритмов.

- 1. Ряд алгоритмов имеет очень много "лишних" операций.
- 2. Разные схемы параллельных алгоритмов реализуют разные алгоритмы, хотя формально (ввиду ассоциативности и коммутатив-

ности сложения и умножения в исходных формулах) результат точных действий одинаков; однако, при реализации (из-за использования "машинной арифметики"и связанных с этим ошибок округления) результат может оказаться существенно другим.

3. Устойчивость параллельных алгоритмов при большом числе процессоров оказывается хуже устойчивости последовательных алгоритмов.

§ 9. О вычислении степени на параллельной системе

Исследование сложности параллельных алгоритмов иногда приводит к довольно неожиданным результатам. Приведем один из таких результатов.

Нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 1. При всех $x \neq e^{ik2\pi/n}$ справедлива формула

$$x^{n} = 1 + n \left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik2\pi/n} \left(x - e^{2k\pi i/n} \right)^{-1} \right)^{-1}.$$
 (9.1)

Доказательство. Положим $q=e^{2\pi i/n}$; тогда доказываемое соотношение можно написать в виде

$$(x^{n} - 1) \left(\sum_{k=1}^{n} q^{k} (x - q^{k})^{-1} \right) = n.$$

Обозначая выражение в скобках через S,

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} q^{k} (x - q^{k})^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{xq^{-k} - 1}, \tag{9.2}$$

и предполагая, что

$$|xq^{-k}| < 1, \qquad k = 1, 2, \dots, n,$$
 (9.3)

используем формулу суммы для бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем xq^{-k} :

$$S = -\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} (xq^{-k})^{j} = -\sum_{j=0}^{\infty} x^{j} \sum_{k=1}^{n} q^{-kj}.$$
 (9.4)

1. При $q^{-j} \neq 1$ внутренняя сумма в выражении (9.4) представляет собой сумму n членов геометрической прогрессии со знаменателем q^{-j} ; используя формулу суммы и обозначение $q=e^{2\pi i/n}$, находим

$$\begin{split} \sum_{k=1}^n q^{-kj} &= q^{-j} \sum_{k=1}^n q^{-j(k-1)} = q^{-j} \sum_{k'=0}^{n-1} q^{-jk'} = q^{-j} \frac{q^{-nj}-1}{q^{-j}-1} = \\ &= e^{-j2\pi i/n} \frac{e^{-j2\pi i}-1}{e^{-j2\pi i/n}-1} = 0. \end{split}$$

2. Случай $q^{-j}=1$ получается лишь для тех j, для которых $e^{-j2\pi i/n}=1$, что эквивалентно равенству j=nl при некотором целом l; в этом случае $q^{-kj}=1$, и потому

$$\sum_{k=1}^{n} q^{-kj} = n.$$

Итак, из (9.4) имеем

$$S = -\sum_{\substack{0 \le j < +\infty \\ j = nl}} x^{j} \sum_{k=1}^{n} q^{-kj} = -n \sum_{l=0}^{+\infty} x^{nl} = -\frac{n}{1 - x^{n}}.$$
 (9.5)

l- целое число

Последнее означает, что $(x^n-1)S=n$. Вспоминая определение S (см. (9.2)) и подставляя (9.5) в (9.2), убеждаемся в справедливости тождества (9.1). Благодаря аналитичности выражений в (9.2) видим, что утверждение (9.1) справедливо для всех $x \neq e^{ik2\pi/n}$, $k=1,\ldots,n$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь следующий пример.

 Π ример. В условиях неограниченного параллелизма займемся задачей о вычислении x^n , где x — вещественное число, а n — натуральное. Для отыскания x^n по схеме сдваивания требуется $\lceil \log_2 n \rceil$ параллельных умножений.

Если воспользоваться леммой 1, то можно поступить следующим образом:

1) сделать одно параллельное сложение для вычисления разностей

$$x - e^{ik\pi/n}, \quad k = 1, \dots, n,$$

2) провести одно параллельное деление для вычисления частных

$$\frac{e^{ik\pi/n}}{x - e^{ik\pi/n}}, \quad k = 1, \dots, n,$$

- 3) найти сумму n слагаемых по схеме сдваивания за $\lceil \log_2 n \rceil$ параллельных сложений,
- 4) сделать одно деление: делим n на полученную только что сумму,
 - 5) добавить единицу.

В результате оказывается, что выражение x^n можно вычислить, используя 2 параллельные мультипликативные операции и $\lceil \log_2 n \rceil + 2$ параллельных аддитивных операций.

Замечание. В приведенном примере предполагается, что числа $e^{ik\pi/n}$, $k=1,2,\ldots,n$ подсчитаны заранее и запасены в вычислительной системе (это — естественное предположение при возведении большого количества чисел x в одну и ту же степень n). Если предположить, что сложение выполняется быстрее умножения, и не принимать в расчет другие аспекты реализации, то можно считать, что предлагаемый в 1) — 5) алгоритм вычисления x^n эффективнее схемы сдваивания при умножении.

§ 10. О взаимоотношении числа данных и высоты параллельной формы

Схему сдваивания можно сформулировать в более общей форме. Рассмотрим множество $\mathcal M$ с ассоциативной бинарной операцией *; пусть в этом множестве имеется единица, т.е. такой элемент e, что для любого элемента a из $\mathcal M$ выполняется соотношение e*a=a*e=a. Множество $\mathcal M$ называют ассоциативным моноидом, а операцию * — умножением в $\mathcal M$.

Будем считать, что рассматриваемая бинарная операция относится к числу основных операций (см. \S 7). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 10.1. Если требуемый результат может быть получен из n данных последовательным применением бинарной операции * в ассоциативном моноиде \mathcal{M} , то в условиях неограниченного параллелизма высота h параллельной формы, получаемой по схеме сдваивания, дается соотношением $h = \lceil \log_2 n \rceil$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. ■

Замечание. В рассматриваемых условиях, если задача существенно зависит от n, то вообще говоря нельзя рассчитывать на существование параллельной формы с высотой по порядку меньше, чем порядок $\log_2 n$. В частности, алгоритм с высотой h порядка $\log_2^\alpha n$, $\alpha \geq 1$, следует считать эффективным.

Глава 2. О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В КОНЦЕПЦИИ НЕОГРАНИЧЕННОГО ПАРАЛЛЕЛИЗМА

§ 1. Предварительные соглашения

В конце предыдущей главы для оценки эффективности алгоритмов пришлось использовать сравнение бесконечно больших величин. Поскольку это потребуется делать и в дальнейшем, остановимся на понятиях бесконечно больших функций одинакового порядка и эквивалентных бесконечно больших (читатели, знакомые с этими понятиями, могут пропустить данный параграф).

Рассмотрим положительные функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ вещественной переменной t. Будем считать их бесконечно большими величинами при $t \to +\infty$, а именно, такими, что

$$\lim_{t \to +\infty} \alpha(t) = \lim_{t \to +\infty} \beta(t) = +\infty.$$

Определение 1. Если существуют не зависящие от t константы t_0, c_1 и c_2 со свойством

$$0 < c_1 \le \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \le c_2 \qquad \forall t > t_0,$$

то говорят, что функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ имеют одинаковый порядок при $t \to +\infty$ и пишут $\alpha(t) \approx \beta(t)$.

Определение 2. Если для рассматриваемых функций $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ выполнено соотношение

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} = 1,$$

то $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ называются эквивалентными при $t \to +\infty$; при этом пишут $\alpha(t) \sim \beta(t)$.

Очевидно, что эквивалентные функции имеют один порядок.

Если $\alpha(t) \approx \beta(t)$ и $\beta(t)=t$, то будем писать $\alpha(t)=O(t)$; вообще, бесконечно большую величину, имеющую порядок величины t при $t\to +\infty$ будем обозначать O(t).

 $\mbox{\it Пример.} \quad \mbox{При } a>0, \ b>0, \ a\neq 1, \ b\neq 1, \ t>0$ функции $\alpha(t)\stackrel{\mbox{\tiny def}}{=} \log_a t$ и $\beta(t)\stackrel{\mbox{\tiny def}}{=} \log_b t$ имеют одинаковый порядок при $t\to +\infty,$

ибо при $t \neq 1$ из основного логарифмического тождества вытекает соотношение $\log_a t/\log_b t = \log_a b$.

§ 2. Распараллеливание умножения матрицы на вектор

Здесь используем заглавные буквы для обозначения векторов и матриц и малые буквы для их компонент. Пусть $X=(x_1,\ldots,x_n)^T, Y=(y_1,\ldots,y_n)^T-n$ -мерные векторы, $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ — квадратная матрица порядка n. Предположим, что Y=AX, т.е.

$$y_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j. (2.1)$$

Теорема 2.1. Для вычисления произведения квадратной матрицы порядка n на вектор можно построить параллельную форму высоты $\lceil \log_2 n \rceil + 1$ и ширины n^2 .

Доказательство. За первый такт работы с n^2 процессорами можно получить n^2 произведений $a_{ij}x_j$, т.е. все требуемые произведения. Все суммы (2.1) можно получать параллельно, используя схему сдваивания (для этого на втором такте потребуется $n \cdot \lceil n/2 \rceil$ процессоров, а на следующих тактах число используемых процессоров будет уменьшаться). Для вычисления сумм согласно теореме 8.1 главы 1 потребуется $\lceil \log_2 n \rceil$ тактов. Итак, общее требуемое количество тактов равно $\lceil \log_2 n \rceil + 1$. Теорема доказана.

§ 3. Распараллеливание перемножения матриц

Теорема 3.1. Для перемножения двух квадратных матриц порядка n можно построить параллельную форму высоты $\lceil \log_2 n \rceil + 1$ и ширины n^3 .

Доказательство. Умножение матрицы порядка n на вектор можно представить в виде параллельной формы высоты $\lceil \log_2 n \rceil + 1$ и ширины n^2 . Поскольку умножение квадратных матриц можно рассматривать, как произведение первой матрицы на столбцы второй (а этих столбцов n), то при наличии n^3 процессоров можно умножение матриц на упомянутые столбцы осуществлять параллельно. Это приведет к параллельной форме той же высоты, но с шириной в n раз больше. Теорема доказана.

Замечание. Скалярное произведение двух векторов размерности n можно осуществить c помощью параллельной формы высоты $\lceil \log_2 n \rceil + 1$ и ширины n.

Доказательство очевидно: на первом шаге проводим необходимые умножения, что ведет к одному ярусу ширины n, а при сложении применяем схему сдваивания (см. теорему 8.2 главы 1). \blacksquare

§ 4. О распараллеливании одного рекурентного процесса

Здесь будет рассмотрен один часто встречающийся рекурентный процесс.

Пусть r, s — фиксированные натуральные числа, а

$$X_0, X_{-1}, \dots, X_{-r+1}$$
 (4.1)

— заданные *п*-мерные векторы. Требуется найти векторы

$$X_1, X_2, \dots, X_s \tag{4.2}$$

из рекурентных соотношений

$$X_i = A_{i1}X_{i-1} + \dots + A_{ir}X_{i-r} + B_i, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$
 (4.3)

Здесь A_{ij} , $(j=1,\ldots,r,i=1,2,\ldots,s)$ — заданные квадратные матрицы порядка n, B_i — заданные векторы.

Итак, векторы (4.2) определяются из соотношений

причем слагаемое $A_{ss}X_0$ встречается лишь при $s \leq r$.

Теорема 4.1. Для вычисления векторов (4.2) существует параллельная форма высоты $s(\lceil \log_2 n \rceil + \lceil \log_2 (r+1) \rceil + 1)$ и ширины $n^2 r$.

Доказательство. Сначала зафиксируем $i \in \{1,2,\ldots,s\}$ и рассмотрим формулу

$$X_i = A_{i1}X_{i-1} + A_{i2}X_{i-2} + \ldots + A_{ir}X_{i-r} + B_i \tag{4.4}$$

Здесь X_{i-1}, \ldots, X_{i-r} уже известны.

Для вычисления каждого произведения $A_{ij}X_{i-j}$ согласно теореме 1 можно построить параллельную форму с высотой $\lceil \log_2 n \rceil + 1$ и шириной n^2 . Поскольку все упомянутые произведения (для $j=1,2,\ldots,r$) можно вычислять параллельно, то достаточно лишь увеличить ширину параллельной формы в r раз, сохранив прежнюю высоту; поэтому указанные вычисления можно осуществить с помощью параллельной формы высоты $\lceil \log_2 n \rceil + 1$ и ширины $n^2 r$. Для вычисления (4.4) осталось провести r сложений векторов; это можно делать параллельно для всех векторных компонент, используя алгоритм сдваивания, что потребует применить параллельную форму высоты $\lceil \log_2 (r+1) \rceil$ с шириной $n \lceil (r+1)/2 \rceil$. Поскольку этот этап вычислений лишь добавляет ярусы к параллельной форме, но не меняет ее ширину (очевидно, $n \lceil (r+1)/2 \rceil \le n^2 r$) имеем на i-м шаге алгоритма

$$\lceil \log_2 n \rceil + 1 + \lceil \log_2(r+1) \rceil$$

ярусов, причем ширина формы остается прежней n^2r .

Наконец, вычисления по формуле вида (4.4) нужно повторить s раз; поскольку здесь вычисления зависимы, то расширением формы обойтись нельзя: нужно увеличить количество ярусов в s раз.

Итак, для всей совокупности рассматриваемых вычислений получается параллельная форма высоты

$$s(\lceil \log_2 n \rceil + 1 + \lceil \log_2 (r+1) \rceil)$$

и ширины n^2r . Теорема доказана. \blacksquare

Возникает вопрос, нельзя ли построить параллельную форму с более слабой зависимостью высоты от s. Следующее утверждение показывает, что это возможно за счет увеличения ширины параллельной формы.

Теорема 4.2 Существует парамельная форма для вычисления векторов (4.2) с высотой

$$h = \lceil \log_2(s+1) \rceil (\lceil \log_2(nr+1) \rceil + 1)$$

и с шириной

$$w = \left\lceil \frac{s+1}{2} \right\rceil (nr+1)^3.$$

Доказательство. Рекурентное соотношение (4.3) представим в эквивалентном виде с использованием блочных (клеточных) матриц и векторов

$$\begin{pmatrix} X_i \\ X_{i-1} \\ \dots \\ X_{i-r+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{i1} & \dots & \dots & A_{ir-1} & A_{ir} & B_i \\ E & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{i-1} \\ X_{i-2} \\ \dots \\ X_{i-r} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(4.5)$$

Для того, чтобы убедиться в эквивалентности соотношений (4.3) и (4.5), осуществим умножение блочной матрицы на блочный вектор в правой части равенства (4.5); в результате последовательно получаем r векторных равенств и одно (последнее) — скалярное равенство

$$X_i = A_{i1}X_{i-1} + \ldots + A_{ir-1}X_{i-r+1} + A_{ir}X_{i-r} + B_i,$$

 $X_{i-1} = X_{i-1},$
 \ldots
 $X_{i-r+1} = X_{i-r+1},$

Из этих равенств видно, что запись (4.5) эквивалентна соотношениям (4.3).

Введём обозначения

$$Q_{i} = \begin{pmatrix} A_{i1} & \dots & A_{ir-1} & A_{ir} & b_{i} \\ E & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & E & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Y_{i} = \begin{pmatrix} X_{i} \\ X_{i-1} \\ \vdots \\ X_{i-r} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, матрица Q_i квадратная и имеет размер nr+1. Теперь (4.5) принимает вид

$$Y_i = Q_i Y_{i-1}; (4.6)$$

из (4.6) находим

$$Y_i = (Q_i Q_{i-1} \cdots Q_1) Y_0, \quad i = 1, \dots, s.$$

Используя здесь алгоритм сдваивания, можно вычислить все произведения Y_i (с учётом того, что здесь s+1 сомножитель) за $\lceil \log_2(s+1) \rceil$ макротактов, используя $\lceil \frac{s+1}{2} \rceil$ макропроцессоров, выполняющих в качестве макрооперации перемножение двух матриц порядка nr+1.

Согласно теореме 2.2 для перемножения двух матриц порядка nr+1 можно построить параллельную форму высоты $\lceil \log_2(nr+1) \rceil + 1$ и ширины $(nr+1)^3$.

Поэтому общая высота получаемой параллельной формы

$$h = \lceil \log_2(s+1) \rceil \cdot (\lceil \log_2(nr+1) \rceil + 1), \tag{4.7}$$

а её ширина

$$w = \left\lceil \frac{s+1}{2} \right\rceil \cdot (nr+1)^3. \tag{4.8}$$

Теорема доказана. ■

Замечание. Рекуррентные соотношения вида (4.3) широко используются в численном анализе для проведения итерационных процессов (в частности, при n=1 эти соотношения превращаются в числовые). Параллельная форма, полученная из них на основании представлений (4.4)–(4.7), эквивалентна соотошениям (4.3) только при условии точных вычислений. Ошибки округления, возникающие при численных расчетах с плавающей точкой, могут существенно повлиять на результаты вычислений и привести к неустойчивости вычислительного процесса. Поэтому такой параллельной формой следует пользоваться с большой осторожностью.

\S 5. Об LU-разложении

Рассмотрим квадратную матрицу $A=(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Обозначим A_k квадратную матрицу, образованную перевых k строк и первых k столбцов матрицы $A, A_k=(a_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$, где $1\leq k\leq n$; в частности, матрица A_1 состоит из одного элемента $a_{11}, A_1=(a_{11}),$ а $A_n=A.$ Определители $\det A_k, k=1,\dots,n$, называются главными минорами матрицы A.

Теорема 5.1. Квадратная матрица A c ненулевыми главными минорами однозначно представляется в виде произведения LU нижнетреугольной матрицы L c единицами на главной диагонали и верхнетреугольной матрицы U, главная диагональ которой состоит из ненулевых элементов.

Доказательство. По условию теоремы

$$\det A_k \neq 0, \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$
 (5.1)

Доказательство теоремы проведём индукцией по k. При k=1 очевидно

$$(a_{11}) = (1) \cdot (a_{11}), \tag{5.2}$$

так что рассматривая одноэлементные матрицы $L_1=(1),\ U_1=(a_{11}),\$ из (5.2) получим $A_1=L_1U_1.$ Итак, база индукции установлена.

Пусть теперь при некотором $k, \, k \in \{1, 2, \dots, n-1\},$ известно, что

$$A_k = L_k U_k, (5.3)$$

где $L_k = (l_{ij}^{(k)})$ — нижнетреугольная матрица порядка k с единицами на главной диагонали, а U_k — верхнетреугольная матрица того же порядка, $U_k = (u_{ij}^{(k)})$. Ввиду определения матрицы L_k имеем $\det L_k = 1$, а из неравенства (5.1) и свойства $\det A_k = \det L_k \cdot \det U_k$ получаем $\det U_k \neq 0$. Итак,

$$\det L_k = 1, \qquad \det U_k \neq 0. \tag{5.4}$$

Представим матрицу A_{k+1} в клеточной форме

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & b \\ a & a_{k+1 k+1} \end{pmatrix},$$

где $a_{k+1\,k+1}$ — элемент исходной матрицы A, a-k-мерная векторстрока, b-k-мерный вектор-столбец.

Будем находить k-мерную вектор-строку l и k-мерный вектор-столбец u, а также элемент $u_{k+1,k+1}$ из уравнения

$$\begin{pmatrix} L_k & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k & u \\ 0 & u_{k+1\,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k & b \\ a & a_{k+1\,k+1} \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Соотношения (5.5) эквивалентны равенствам

$$L_k U_k = A_k, \qquad L_k u = b, \qquad lU_k = a, \tag{5.6}$$

$$l \cdot u + u_{k+1\,k+1} = a_{k+1\,k+1},\tag{5.7}$$

где $l\cdot u$ — скалярное произведение векторов l и u. Первое из равенств (5.6) заведомо верно, ибо совпадает с (5.3), второе представляет собой систему линейных уравнений с неособенной матрицей L_k (см. (5.4)); отсюда однозначно определяется вектор u. Третье из соотношений (5.6) являются системой линейных алгебраических уравнений относительно компонент вектора l; благодаря второй формуле в (5.4) вектор l определяется однозначно. Таким образом, в (5.7) l и u уже определены; поэтому имеем

$$u_{k+1,k+1} = a_{k+1,k+1} - l \cdot u.$$

Если положить

$$L_{k+1} = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix}, \quad U_{k+1} = \begin{pmatrix} U_k & u \\ 0 & u_{k+1 k+1} \end{pmatrix},$$

то (5.5) принимает вид

$$A_{k+1} = L_{k+1} U_{k+1}.$$

Шаг индукции завершен; вместе с базой индукции это завершает доказательство. Теорема доказана. ■

Замечание. С помощью метода индукции аналогичным образом нетрудно установить, что если матрица A — ленточная матрица, удовлетворяющая условиям теоремы, то матрицы L и U также можно рассматривать как ленточные, ширина ленты которых не больше, чем ширина ленты у матрицы A. Если A — диагональная, то L и U — тоже диагональные.

§ 6. Распараллеливание LU-разложения трехдиагональной матрицы

Пусть решается система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{k-1 \, k-2} & a_{k-1 \, k-1} & a_{k-1 \, k} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k \, k-1} & a_{k \, k} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что A имеет ненулевые главные миноры. В соответствии с теоремой об LU-разложении матрицы A будем иметь

$$A = BC$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{k \, k-1} & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{k-1 \, k-1} & c_{k-1 \, k} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_{k \, k} \end{pmatrix},$$

Получим формулы для элементов матриц B и C. Для упрощения вычислений рассмотрим случай k=4. Имеем

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_{32} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0, & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix},$$

так что

$$BC = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ b_{21}c_{11} & b_{21}c_{12} + c_{22} & c_{23} & 0 \\ 0 & b_{32}c_{22} & b_{32}c_{23} + c_{33} & c_{34} \\ 0 & 0 & b_{43}c_{33} & b_{43}c_{34} + c_{44} \end{pmatrix}.$$

Из равенства A = BC получаем формулы

$$c_{11} = a_{11}, \quad c_{12} = a_{12},$$

$$b_{21} = a_{21}/c_{11}, \quad c_{22} = a_{22} - b_{21}c_{12}, \quad c_{23} = a_{23},$$

$$b_{32} = a_{32}/c_{22}, \quad c_{33} = a_{33} - b_{32}c_{23},$$

$$c_{34} = a_{34}, \quad b_{43} = a_{43}/c_{33}, \quad c_{44} = a_{44} - b_{43}c_{34}.$$

В общем случае можно показать, что справедливы формулы

$$c_{1,1} = a_{1,1},$$

$$c_{i-1,i} = a_{i-1,i}, (6.1)$$

$$b_{i,i-1} = a_{i,i-1}/c_{i-1,i-1}, (6.2)$$

$$c_{i,i} = a_{i,i} - b_{i,i-1}a_{i-1,i}, (6.3)$$

где $i=2,3,\ldots,k$ (здесь и далее для ясности при отделении индексов применяется запятая).

Умножая соотношение (6.3) на $c_{i-1,i-1}$, находим

$$c_{i,i}c_{i-1,i-1} = a_{i,i}c_{i-1,i-1} - b_{i,i-1}a_{i-1,i}c_{i-1,i-1}.$$

Используя в последнем произведении формулу (6.2), получаем

$$c_{i,i}c_{i-1,i-1} = a_{i,i}c_{i-1,i-1} - a_{i-1,i}a_{i,i-1}$$

$$(6.4)$$

Пусть

$$q_i = c_{i,i}c_{i-1,i-1}\dots c_{2,2}c_{1,1}, \qquad i = 1, 2, \dots, k.$$

При $i \ge 3$ умножим равенство (6.4) на q_{i-2} ; имеем

$$c_{i,i}c_{i-1,i-1}q_{i-2} = a_{i,i}c_{i-1,i-1}q_{i-2} - a_{i-1,i}a_{i-1,i}q_{i-2},$$

так что

$$q_i = a_{i,i}q_{i-1} - a_{i-1,i}a_{i,i-1}q_{i-2}, \qquad i = 3, 4, \dots, k.$$
 (6.5)

Преобразуем (6.5) к рекуррентным соотношениям (4.3),

$$X_j = A_{j,1}X_{j-1} + \dots + A_{j,r}X_{j-r} + B_j, \qquad j = 1, 2, \dots, s,$$
 (6.6)

полагая в них n=1, т.е. считая, что $X_j,\ A_{s,j},\ B_j$ — некоторые числа.

Для этого в формулах (6.5) возьмем j=i-2 и перепишем их с использованием индекса $j,\,j=1,2,\ldots,k-2$. Получаем

$$q_{j+2} = a_{j+2,j+2}q_{j+1} - a_{j+1,j+2}a_{j+2,j+1}q_j. (6.7)$$

Теперь применим (6.6), полагая $X_j=q_{j+2},\,A_{j,1}=a_{j+2,j+2},\,A_{j,2}=-a_{j+1,j+2}a_{j+2,j+1},\,B_j=0,\,s=k-2,\,r=2.$

Согласно формулам (4.7),(4.8) для рассматриваемого рекуррентного процесса существует параллельная форма высоты h=

 $\lceil \log_2(s+1) \rceil (\lceil \log_2(nr+1) \rceil + 1)$ и ширины $w = \lceil \frac{s+1}{2} \rceil (nr+1)^3$. Подставляя сюда $n=1,\ s=k-2$ и r=2, видим, что доказано следующее утверждение.

Теорема 6.1 LU-разложение трехдиагональной матрицы k-го порядка можно осуществить параллельной формой высоты $3\lceil \log_2(k-1) \rceil$ и ширины $27\lceil \frac{k-1}{2} \rceil$.

Теперь рассмотрим распараллеливание процесса решения системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей.

Теорема 6.2. Решение системы k уравнений Ax = y c трехдиагональной матрицей A можно осуществить параллельной формой высоты $O(\log_2 k)$ и ширины O(k).

Доказательство. Пусть получено LU-разложение матрицы A вида A=BC; тогда решение системы Ax=y получается последовательным решением двух систем

$$Bz = y,$$
 $Cx = z$

с двухдиагональными матрицами (этот процесс соответсвует обратному ходу в методе Гаусса). После деления во второй системе на диагональные элементы (один такт) решение сводится к рекуррентному процессу (4.3). Действительно, для первой из систем имеем

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ b_{21}z_1 + z_2 = y_2 \\ b_{32}z_2 + z_3 = y_3 \\ \vdots \\ b_{ii-1}z_{i-1} + z_i = y_i \\ \vdots \\ b_{k,k-1}z_{k-1} + z_k = y_k, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 - b_{21}z_1 \\ z_3 = y_3 - b_{32}z_2 \\ \dots \\ z_i = y_i - b_{ii-1}z_{i-1} \\ \dots \\ z_k = y_k - b_{k,k-1}z_{k-1}. \end{cases}$$

Применим рекуррентный процесс(4.1) – (4.3), полагая

$$n = 1, \quad X_0 = 0, \quad X_j = z_j, \quad B_j = y_j, , \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

$$s = k$$
, $r = 1$, $A_{11} = 0$, $A_{i1} = -b_{i,i-1}$, $i = 2, 3, ..., k$.

Используя теорему 4.2, получаем параллельную форму для отыскания чисел $z_i, i=1,2,\ldots,k$ с высотой $h=2\lceil\log_2(k+1)\rceil$ и с шириной $w=8\lceil\frac{k+1}{2}\rceil$.

Такой же результат получается и для второго уравнения. С учетом теоремы 6.1 видим, что решение системы k уравнений с трехдиагональными матрицами k-го порядка можно осуществить параллельной формой с высотой $O(\log_2 k)$ и с шириной O(k), что и требовалось доказать. \blacksquare

Замечание 1. Полученная параллельная форма основана на методе Гаусса: LU-разложение соответствует прямому ходу, а решение систем с треугольными матрицами — обратному ходу. Однако, характеристики устойчивости этой формы отличаются от устойчивости обычно рассматриваемых последовательных алгоритмов метода Гаусса.

Замечание 2. Параллельных форм c меньшей (по порядку) высотой, чем $O(\log_2 k)$ не существует.

Нетрудно установить справедливость следующего утверждения.

Теорема 6.3. Для решения системы линейных алгебраических уравнений с треугольной матрицей порядка n существует параллельная форма c высотой $O(\log_2^2 n)$ и шириной $O(n^3)$.

Доказательство предлагается провести читателю самостоятельно.

§ 7. О распараллеливании процесса отыскания обратной матрицы

Рассмотрим задачу вычисления обратной матрицы A^{-1} для квадратной матрицы A порядка n. Для ее построения используем теорему Гамильтона–Кэли.

Пусть

$$f(\lambda) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \ldots + c_n \tag{7.1}$$

— характеристический многочлен матрицы A. Согласно теореме Гамильтона–Кэли подстановка матрицы A в характеристический многочлен получается нулевая матрица; этот факт записывается в

виде f(A) = 0 (здесь нулем обозначена квадратная нулевая матрица порядка n). Отсюда (умножением на A) находим

$$A^{-1} = -\frac{1}{c_n} \left(A^{n-1} + c_1 A^{n-2} + \dots + c_{n-1} E \right), \tag{7.2}$$

где E — единичная матрица.

Пусть λ_i — корни характеристического уравнения, а s_k — сумма их k-х степеней

$$s_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k. \tag{7.3}$$

Известно соотношение Ньютона (см., например, Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., 1952):

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
s_1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
s_2 & s_1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-3} & \dots & s_1 & n
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
c_1 \\
c_2 \\
c_3 \\
\dots \\
c_n
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
-s_1 \\
-s_2 \\
-s_3 \\
\dots \\
-s_n
\end{pmatrix}. (7.4)$$

Числа s_k можно вычислить, как сумму диагональных элементов матрицы $A^k.$

Построение параллельной формы для определения матрицы A^{-1} сводится к следующим этапам:

- 1. Сначала по схеме сдваивания находят все степени матрицы до n; это требует выполнения $O(\log_2 n)$ макрошагов, на каждом из которых выполняется O(n) произведений двух квадратных матриц порядка n. Поскольку произведение двух таких матриц требует параллельной формы высоты $\lceil \log_2 n \rceil + 1$ и ширины n^3 , то отыскание степеней матрицы A от 2 до n-1 может быть произведено с помощью параллельной формы высоты $O(\log_2^2 n)$ и ширины $O(n^4)$.
- 2. На втором этапе вычисляются все числа s_k , как следы матриц A^k , $k=1,\ldots,n$; поскольку след сумма диагональных элементов, то требуется вычислить n сумм с n слагаемыми. Это можно сделать по схеме сдваивания параллельной формой высоты $O(\log n)$ и ширины $O(n^2)$.
- 3. Теперь отыскиваются коэффициенты c_k характеристического многочлена решением системы n-го порядка с треугольной

матрицей (см. (7.4)); благодаря теореме 6.3 это можно сделать с помощью параллельной формы высоты $O(\log_2^2 n)$ и ширины $O(n^3)$.

4. На четвертом этапе вычисляется матрица A^{-1} по формуле (7.2) с использованием схемы сдваивания (для всех n^2 элементов одновременно) с помощью параллельной формы высотой $O(\log_2 n)$ и шириной $O(n^3)$.

Для наглядности результаты представим в таблице.

Содержание этапа	Высота	Ширина
Вычисление степеней A^2, \ldots, A^n	$O(\log_2^2 n)$	$O(n^4)$
Вычисление следов $s_k, k = 1, \ldots, n$	$O(\log_2 n)$	$O(n^2)$
Вычисление коэффициентов c_k	$O(\log_2^2 n)$	$O(n^3)$
Вычисление матрицы A^{-1}	$O(\log_2 n)$	$O(n^3)$

Из предыдущих рассуждений и приведенной таблицы видно, что доказано следующее утверждение.

Теорема 7.1. Для вычисления обратной матрицы n-го порядка существует параллельная форма высоты $O(\log_2^2 n)$ и ширины $O(n^4)$.

Глава 3. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ГРАФОВ В СВЯЗИ С РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕМ

§ 1. О понятии графа

Рассмотрим конечное множество V с выделенным элементом θ . Элементы множества V будем называть вершинами, а выделенный элемент θ — пустой вершиной.

Вершины из V будем обозначать буквами u,v,w. Пусть E некоторое множество неупорядоченных пар (u,v), где $u,v\in V$. Пары (u,v) называются ребрами; среди них пары вида (u,θ) и (θ,v) называем ребрами с одной вершиной, пары вида (u,u) называются петлей.

Если V содержит не менее двух элементов и задано множество E, то говорят, что задан граф; обозначим его G:

$$G = (V, E). (6.1)$$

Обычно граф изображается в виде некоторой схемы на плоскости или в пространстве, причем вершины графа изображаются точками, а ребра — непрерывной линией, соединяющей вершины. Ребра с одной вершиной изображаются в виде линии, исходящей из этой вершины, со свободным концом. Ребра (u,v), повторяющиеся в E, изображаются различными простыми кривыми, соединяющими u и v.

Говорят также, что ребро (u,v) соединяет вершины u и v; при этом сами вершины u,v называются смежными, а ребро (u,v) называют инцидентным вершинам u и v; вершины u,v также называют инцидентными ребру (u,v).

Все ребра с одинаковыми концевыми вершинами называются кратными или параллельными. Некратные ребра называют различными. Ребро с совпадающими концевыми точками называется петлей. Число инцидентных вершине ребер называется степенью вершины. Вершина степени 1 называется висячей, а степени 0- изолированной. Ребро, инцидентное одной вершине, будем называть висячим.

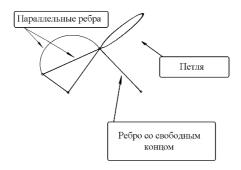
Если имеется упорядоченная последовательность вершин, каждые две из которых являются смежными, то связывающую их последовательность ребер называют *цепью*. Цепь называется *простой*, если среди составляющих ее ребер нет кратных, и *составной* — в противном случае.

 $\underline{U}u\kappa$ лом называется цепь, начало и конец которой находятся в одной и той же вершине.

Цикл, образованный последовательностью ребер, среди вершин которых не встречается одинаковых, называется элементарным.

Граф называется cвязным, если любые две его вершины можно соединить цепью.

Граф называется npocmым, если он не содержит петель и кратных ребер.



Puc. 5. Граф с кратными ребрами и петлями.

Граф, содержащий кратные ребра, но без петель, называется мультиграфом, а граф с кратными ребрами и петлями называется псевдографом (рис. 5). Граф, не содержащий ребер, называется пустым.

§ 2. Ориентированный граф

До сих пор рассматривались неупорядоченные пары вершин (т.е. неориентированные ребра). Но если порядок существен, то вводят ориентацию.

Упорядоченную пару $(u,v),\ u,v\in V,$ будем называть ориентированным ребром или дугой и будем говорить, что u- начальная вершина, а v- конечная вершина, и что u предшествует v.

Если V — непустое множество вершин, а E — множество дуг (ориентированных ребер), то G=(V,E) называется ориентированным графом (орграфом).

Ориентированный граф порождает (вообще говоря, неоднозначное) отображение Γ вершин: если (u,v) — дуга, то по определению $v=\Gamma u$, а если из вершины u не исходит ни одной дуги, то полагают $\Gamma u=\theta$. Говорят, что отображение Γ задает *отношение предшествования*.

Для ориентированных графов термины *ребро*, *цепь*, *цикл*, *связность* обычно заменяются на термины *дуга*, *путь*, *контур*, *сильная связность*.

Число дуг, образующих путь, называется длиной пути.

Простой путь (т.е. путь, не имеющий кратных ребер) максимально возможной длины называется *критическим путем графа*.

Граф называется ациклическим, если он не имеет циклов.

Граф называется *помеченным*, если его вершины снабжены некоторыми метками (например, номерами).

Иногда рассматривают *частично упорядоченные* графы, в котором лишь часть ребер имеет ориентацию.

Если на каком-либо этапе исследования для ориентированного графа используется терминология, введенная для неориентированного графа, то это значит, что ориентация графа не принимается во внимание.

§ 3. Топологическая сортировка

Вначале будем рассматривать графы без висячих ребер.

Теорема 3.1. В любом ориентированном ациклическом графе существует хотя бы одна вершина, для которой нет предшествующей, и хотя бы одна вершина, для которой нет последующей.

Доказательство. Если для каждой вершины графа есть предшествующая, то ввиду конечности числа вершин в рассматриваемом графе есть контур (цикл), а значит, он не ациклический. Аналогично устанавливается второе утверждение. Теорема доказана. •

Дальше вершину графа будем помечать номером т.е. приписывать ей то или иное натуральное число; вершину, помеченную номером j будем обозначать v_j .

Теорема 3.2. Пусть дан ориентированный ациклический граф, имеющий п вершин. Существует такое натуральное число $s, s \leq n$, что все вершины графа можно пометить одним из номеров $1, 2, \ldots, s$ так, что если (v_i, v_j) — его дуга, то верно неравенство i < j.

Доказательство. Выберем в графе вершины, которые не имеют предшествующих, и пометим их индексом 1. Отбросим их вместе с инцидентными им дугами. В полученном в результате этой операции графе пометим цифрой 2 все вершины, которые не имеют предшествующих, а затем отбросим их вместе с инцидентными им дугами.

Повторяя последовательно эту операцию, придем к исчерпанию графа (ввиду его конечности). Поскольку на каждом шаге отбрасывается хотя бы одна вершина, то количество израсходованных номеров $1,2,\ldots,s$ не более числа вершин n. Теорема доказана. \blacksquare

Следствие 3.1. При указанной в теореме 3.2 нумерации никакие вершины с одним и тем же индексом не связаны дугой.

Обозначим s_n минимальное количество индексов, которыми можно пометить все вершины графа.

Следствие 3.2. Минимальное число индексов s_n , которыми можно пометить все вершины графа, на единицу больше длины его критического пути.

Доказательству сторемы 3.2, видим, что на каждом шаге (за исключением последнего) отбрасывается вершина, не имеющая предшествующей, вместе с инцидентными ей дугами. Если у критического пути число звеньев больше, чем таких операций отбрасывания, то поскольку все дуги отбрасываются за s-1 шаг, то на каком-то шаге отбрасываются более одной дуги критического пути, а это означает, что на этом шаге отбрасываются по крайней мере две соседние вершины критического пути, имеющие одинаковые номера. Однако, для рассматриваемой нумерации две соседние вершины не могут иметь одинаковые номера (см. следствие 3.1). Итак, число звеньев критического пути не больше числа s-1.

С другой стороны, из алгоритма отбрасывания (см. доказательство теоремы 3.2) видно, что минимальное число индексов будет использовано, если при каждой операции отбрасывания будут отбрасываться все вершины (вместе с инцидентными им дугами), не имеющие предшествующей (такие операции отбрасывания назы-

ваются максимальными). При последовательности максимальных отбрасываний начало любого пути может встретиться только на первом шаге операции. Это означает, что на каждом шаге операции (за исключением последней) обязательно отбрасывается строго одна дуга критического пути графа. Этот путь не может закончиться раньше завершения всех отбрасываний, ибо тогда он не был бы критическим путем графа. Это означает, что число отбрасываний (вместе с последним) в точности на единицу больше длины критического пути графа.

Следствие 3.3. Для любого натурального числа $s, s_n \leq s \leq n$, существует такая разметка вершин графа, при которой используются все s индексов.

Доказательство легко вытекает из следствий 3.1 и 3.2.

Определение 3.1. Разметка вершин графа, удовлетворяющая условиям теоремы 3.2, называется сортировкой графа.

Определение 3.2. Разметка вершин графа, проведенная при максимальных операциях отбрасывания, называется топологической сортировкой графа.

Нетрудно заметить следующее.

- 1. При топологической сортировке все пути могут начинаться лишь в вершинах с индексом k; вершины с индексом k>1 не могут служить началом пути.
- 2. При сортировке вершина с индексом k>1 может являться концом пути длины не более k-1.
- 3. При топологической сортировке в вершине с индексом k>1 могут заканчиваться лишь пути длины k-1.
- 4. При топологической сортировке число используемых индексов на единицу больше длины критического пути графа.

Определение 3.3. Топологическая сортировка называется линейной, если индексы любых вершин различны; в этом случае говорят, что граф линейно упорядочен.

Замечание. Если топологическая сортировка не является линейной, то из нее можно получить другие сортировки с бо́льшим числом индексов.

Доказательство этого замечания очевидно.

§ 4. Примеры графов параллельных форм

Рассмотрим процесс вычисления выражения $(a_1a_2 + a_3a_4)(a_5a_6 + a_7a_8)$ и построим для него графы нескольких

параллельных форм (эти параллельные формы уже рассматривались нами ранее). Соответствующие графы будем иллюстрировать рисунками 1.6-1.8; на них данные помещены на нулевой уровень.

Первая парамельная форма (см. рис. 6)

Данные 0:	$a_1, a_2,$	$a_3, a_4,$	a_5, a	$a_7, a_8.$
Ярус 1.	a_1a_2 ,	a_3a_4 ,	a_5a_6 ,	a_7a_8 .
Ярус 2.	a_1a_2	$+ a_3 a_4,$	a_{5}	$a_6 + a_7 a_8$.
Ярус 3.	($a_1 a_2 + a_3 a_4$	$(a_{4})(a_{5}a_{6})$	$+ a_7 a_8$).

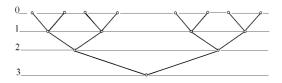


Рис. б. Первая параллельная форма.

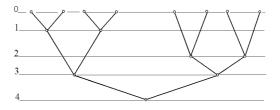


Рис. 7. Вторая параллельная форма.

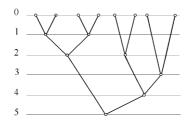


Рис. 8. Третья параллельная форма.

```
Вторая парамельная форма (см. рис. 7)
Данные 0:
                           a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8.
                  a_1, a_2,
Ярус 1.
                  a_1a_2,
                            a_3a_4.
Ярус 2.
                                          a_5a_6, a_7a_8.
Ярус 3.
                      a_1a_2 + a_3a_4
                                         a_5a_6 + a_7a_8.
                         (a_1a_2 + a_3a_4)(a_5a_6 + a_7a_8).
Ярус 4.
Третья парамельная форма (см. рис. 8)
                  a_1, a_2,
                            a_3, a_4,
                                       a_5, a_6, a_7, a_8.
                  a_1a_2,
                             a_3a_4.
```

Данные 0: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ Ярус 1. a_1a_2, a_3a_4 . Ярус 2. $a_1a_2 + a_3a_4, a_5a_6$. Ярус 3. a_7a_8 . Ярус 4. $a_5a_6 + a_7a_8$. Ярус 5. $(a_1a_2 + a_3a_4)(a_5a_6 + a_7a_8)$.

Нетрудно видеть, что все три графа отличаются друг от друга лишь топологической сортировкой, что и должно быть при изображении одного и того же алгоритма.

§ 5. Изоморфизм графов. Операции гомоморфизма

Определение 5.1. Два графа (соответственно, ориентированных графа) называются изоморфными, если между множествами вершин и ребер (вершин и дуг) можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее отношение инциденции (соответственно, отношение инциденции и ориентацию).

Изоморфизм графов представляет собой эквивалентность (т.е. отношение со свойствами рефлексиности, симметричности и транзитивности).

Определение 5.2. Подграфом графа G называется граф, y которого все вершины и все ребра принадлежат G (для них сохраняются прежние отношения инциденции). Подграф, y которого вершины те же, что и y G, называется остовным подграфом для G.

Определение 5.3. Объединением графов $G_1 = (V_1, E_1) \ u \ G_2 = (V_2, E_2)$ называется граф

$$G_3 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2).$$

Пересечением графов $G_1=(V_1,E_1)$ и $G_2=(V_2,E_2)$ называется граф

$$G_4 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2).$$

Легко видеть, что операции объединения и пересечения графов ассоциативны и коммутативны.

В графе G=(V,E) выберем две вершины $u,v\in V$ и построим новый граф G'=(V',E'), где множество V' получается из V отождествлением вершин u и v. Результат отождествления — новую вершину, обозначим w (w — символ, не встречавшийся в обозначении вершин графа G),

$$V' = V \setminus \{u, v\} \cup w,$$

а E' получается из E заменой всех ребер вида (u,v_1) на ребра (w,v_1) , а затем всех ребер вида (u_1,v) на ребра (u_1,w) — для неориентированного графа; для ориентированного графа, кроме этого, требуется заменить все ребра вида (v_1,u) на ребра (v_1,w) , а также все ребра вида (v,u_1) на ребра (w,u_1) .

Определение 5.4. Говорят, что граф G' получен из графа G кратным элементарным гомоморфизмом.

Определение 5.5. По введенному в предыдущем определении графу G' построим граф G'' исключением из G' всех кратных ребер и петель. Говорят, что граф G'' получен из G простым элементарным гомоморфизмом.

Определение 5.6. Последовательное выполнение операций (простого) элементарного гомоморфизма называется операцией (простого) гомоморфизма.

Говорят, что граф H гомоморфен (просто гомоморфен) графу G, если он изоморфен графу, полученному из G операцией (простого) гомоморфизма. Вершина графа H, соответствующая отождествляемым вершинам графа G, называется их образом, а отождествляемые вершины (графа G) — прообразом при рассматриваемом гомоморфизме. Сам граф H называется гомоморфным образом графа G.

Определение 5.7. Гомоморфизм называется независимым, если никакие две из отождествляемых вершин не соединены ребром.

Определение 5.8. Гомоморфизм называется связным, если подграф, образованный отождествляемыми вершинами, связен.

Теорема 5.1. Любой гомоморфизм можно представить как последовательность независимых и связных гомоморфизмов.

Доказательство вытекает из введенных только что понятий (см. определения 5.7 и 5.8). \blacksquare

Замечание. Рассматривают также обратную задачу — задачу о построении гомоморфного прообраза данного графа. Эта задача решается добавлением новых вершин и ребер. В связи с этим вводят операцию добавления новых вершин: в E ребро (u,v) исходного графа заменяют парой ребер (u,w),(v,w), а к V добавляют новую вершину w. Возможны и другие способы добавления новых вершин, которые ведут к получению гомоморфного прообраза исходного графа.

§ 6. Построение графов параллельных форм

Предположим, что известны:

- множество переменных, преобразование которых составляет рассматриваемый алгоритм;
- множество операций, выполняемых при реализации алгоритма;
- соответствие, показывающее, какие результаты предшествующих операций являются операндами для следующих.

Дополнительные предположения:

- 1) *число операндов* в каждой операции фиксировано и не зависит от результатов работы алгоритма;
- 2) классы переменных и классы операций фиксированы; переменные и операции, принадлежащие этим классам, называются базовыми.

Построение графа алгоритма состоит в следующем:

- каждой операции U алгоритма ставится в соответствие вершина u,
- если операнд операции V (которой поставлена в соответствие вершина v) является результатом операции U, то соответствующие им вершины u и v соединяются направленной (от u к v) дугой (u,v).

Полученный таким образом граф имеет следующие свойства:

- в каждую вершину u входит столько дуг, сколько входов у операции U,
 - полученный граф не содержит циклов.

Результатом является ориентированный ациклический мультиграф.

Определение 6.1. Пусть задан алгоритм u G = (V, E) его граф. Рассмотрим V_1, \ldots, V_k — непересекающиеся подмножества его вершин,

$$V = \bigcup_{i=1}^{k} V_i, \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

$$(6.1)$$

такие, что если $u \in V_i$, $v \in V_j$ и существует дуга $(u,v) \in E$, то i < j. В этом случае представление (6.1) называется параллельной формой алгоритма, а множества V_1, V_2, \ldots, V_k — его ярусами.

Число k называется высотой параллельной формы; число $|V_j|$ элементов множества V_j называется шириной j-го яруса V_j , а максимальное из чисел $|V_i|$ — шириной параллельной формы.

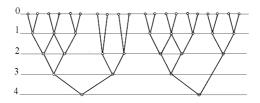
Параллельная форма минимальной высоты называется макси-мальной.

 $Bысотой\ алгоритма$ называется высота максимальной параллельной формы.

Ширина максимальной параллельной формы называется uu-риной алгориmма.

Параллельная форма mupuhu 1 называется nocnedosamenьной. Максимальная параллельная форма называется kahohuveckoù, если через каждую вершину i-го яруса проходит путь длины i-1.

На рис. 9 представлены неканоническая (слева) и каноническая (справа) параллельные формы.



Puc. 9. Неканоническая и каноническая параллельные формы.

Отметим некоторые свойства графов параллельных форм:

- 1) никакие две вершины одного яруса не связаны дугой;
- 2) все дуги, входящие в вершины первого яруса, являются ребрами с одной вершиной (лежащей в первом ярусе);

- 3) все дуги, исходящие из вершин последнего яруса, являются ребрами с одной вершиной (лежащей в последнем ярусе);
- 4) высота параллельной формы на единицу больше критического пути графа;
- 5) произведение высоты параллельной формы на ее ширину не меньше числа вершин графа.

В силу предыдущих рассуждений эти свойства представляются достаточно очевидными.

Замечание. На первый взгляд может показаться, что отыскание параллельной формы не требует большого числа операций. Действительно, при топологической сортировке требуется число действий по меньшей мере порядка n^2 (ибо на каждом шаге приходится делать сравнения со всеми оставшимися вершинами), и это кажется приемлемым с точки зрения сложности алгоритмов (закон полиномиальный и даже весьма малой степени — квадратичный). Однако в реальных алгоритмах общее число n операций велико и потому даже линейная зависимость от n для отыскания параллельной формы обычно недопустима (ибо в наших обстоятельствах, как правило, не получится никакой экономии). Поэтому нужны более эффективные методы отыскания параллельных форм.

§ 7. Направленные графы и параллельные формы

Пусть задан ациклический ориентированный граф алгоритма, вершины которого расположены в некотором арифметическом пространстве R^s (т.е. в некотором евклидовом пространстве конечной размерности s).

Теорема 7.1. Пусть в R^s существует ось l (т.е. направленная прямая) такая, что ортогональная проекция графа на нее имеет следующее свойство: ненулевые проекции всех его дуг имеют положительное значение. Тогда длина критического пути графа не превосходит суммы длин критических путей его подграфов, проектирующихся в точки, и длины критического пути проекции графа.

Доказательство. Рассмотрим критический путь графа. Те его части, которые имеют ненулевые проекции на ось, в сумме не превосходят критического пути графа на оси. Те же его части, которые находятся в подграфах на ортогональных плоскостях, не превосходят критических путей упомянутых подграфов. Складывая

все перечисленные неравенства, приходим к заключению, сформулированному в доказываемой теореме. ■

Теорема 7.2. Пусть выбрана такая ось l, что проекции на нее всех дуг графа положительны. Тогда эта ось определяет некоторую параллельную форму алгоритма: ярусами этой параллельной формы являются множества вершин, лежащих в перпендикулярных κ l гиперплоскостях, причем ярусы упорядочены в соответствии с порядком проекции вершин на ось l.

Доказательство. Докажем сначала, что множества вершин в гиперплоскостях — ярусы, т.е. что они не соединены дугами: но это действительно так, ибо в противном случае проекции этих дуг на ось не были бы положительными (они равнялись бы нулю), что противоречит условию теоремы.

С другой стороны, если гиперплоскости перенумерованы в соответствии с порядком проекций на оси l, то ввиду однонаправленности проекций дуг ясно, что если $1,2,\ldots,k$ — нумерация точек пересечения гиперплоскости с осью l в соответствии с упомянутым направлением, а V_i — множества вершин в i-й гиперплоскости, то для вершин $u \in V_i, \ v \in V_j$, соединенных дугой (u,v), следует, что i < j. Теорема доказана. \blacksquare

Следствие 7.1. В условиях теоремы 7.2 высота алгоритма равна числу проекций на прямой l, а ширина алгоритма — максимальному числу вершин, проектирующихся в одну точку прямой l.

Определение 7.1. Ось l, удовлетворяющая теореме 7.1, называется направляющим вектором графа, а сам граф называется направленным.

Если существует ось l, удовлетворяющая условиям теоремы 7.2, то граф называется $cmporo\ nanpagnenhum.$

Теорема 7.3. Если все дуги графа имеют положительные координаты (разность между координатами конца и начала положительна), то этот граф является строго направленным и в качестве направляющего вектора можно взять любой вектор с положительными компонентами.

Доказательство становится очевидным, если вспомнить определение строгой направленности.■

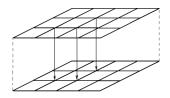


Рис. 10. Решетчатый граф.

Следствие 7.2. Если одноименные координаты (т.е. координаты с одним номером) дуг либо отрицательные, либо положительные, то граф является строго направленным, а в качестве направления можно взять вектор с ненулевыми координатами, знаки которых совпадают со знаками соответствующих одноименных координат дуг.

Теорема 7.4. Пусть все вершины графа алгоритма находятся в узлах прямоугольной целочисленной решетки и принадлежат замкнутому прямоугольному параллелепипеду с ребрами длиной d_1, d_2, \ldots, d_s . Пусть дуги графа имеют неотрицательные координаты. Тогда высота h алгоритма удовлетворяет неравенству

$$h \le \sum_{i=1}^{m} d_i + 1. \tag{7.2}$$

Доказательство. Очевидно, рассматриваемый граф является строго направленным, и в качестве оси можно взять вектор с единичными компонентами. Согласно следствию 7.1 высота алгоритма равна числу проекций на ось, а их число не превосходит правой части неравенства (7.2). Теорема доказана.■

Определение 7.2. Граф, вершины которого лежат в узлах целочисленной решетки, называется решетчатым.

Пример. Рассмотрим задачу вычисления произведения A=BC двух квадратных матриц $B=(b_{ik}), \quad C=(c_{kj}), \quad i,j,k=1,\ldots,n.$ Пусть $A=(a_{ij})$ $i,j,k=1,\ldots,n.$ Определим алгоритм формулами $a_{ij}^{(k)}=a_{ij}^{(k-1)}+b_{ik}c_{kj},$ где $a_{ij}^{(0)}=0.$ Операцию a+bc будем считать базовой.

Тогда соответствующий решетчатый граф имеет вид, изображенный на рис. 10.

Глава 4. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА

§ 1. Некоторые определения

Предположим, что вычислительная система состоит из функциональных устройств и работает по тактам, т. е. каждая операция начинается или заканчивается только в фиксированные равноотствоящие моменты времени. Для простоты полагаем, что все рассматриваемые функциональные устройства синхронизированы, т.е. могут включаться лишь в упомянутые моменты времени.

Временно́й интервал между *соседними моментами времени* будем считать единичным и называть его *тактом*.

Определение 1.1. Функциональное устройство называется простым, если время выполнения операции на нем (число тактов) определено априори и никакая следующая операция не может начаться раньше окончания предыдущей.

Простое функциональное устройство будем обозначать F^1 .

Определение 1.2. Функциональное устройство называется конвейерным, если время выполнения на нем любой операции заранее определено, но следующая операция может начать выполнение через один такт после начала выполнения предыдущей.

Предполагается, что выполнение любой операции происходит за целое число тактов.

Замечание. Основное отличие между простым и конвейерным функциональным устройством состоит в том, что простое функциональное устройство использует все свое оборудование для выполнения одной операции, а конвейерное — распределяет свое оборудование между несколькими операциями, к выполнению каждой из которых оно приступает последовательно, обычно не закончив выполнение предыдущих. В некоторых случаях конвейерное функциональное устройство можно рассматривать как особое устройство распараллеливания, точнее — "диагонального" распараллеливания.

Конвейерное устройство можно также рассматривать как совокупность s простых устройств. Число последних называется числом ступеней или длиной конвейера.

Очевидно, что длина конвейерного устройства совпадает с числом тактов обработки самой длинной операции. Конвейерное функциональное устройство длины s будем обозначать F^s .

Будем предполагать, что

- 1) функциональное устройство не имеет собственной памяти (в случае необходимости присоединяется внешняя память);
- 2) функциональное устройство работает по индивидуальным командам;
- 3) в момент подачи команды сначала уничтожаются результаты предыдущего срабатывания данного функционального устройства (если они не нужны), и затем передаются результаты срабатывания соседних функциональных устройств, необходимые для выполнения команды;
- 4) если функциональное устройство может реализовывать операции разных типов, то будем считать, что функциональное устройство может выдавать их результаты даже в том случае, когда некоторые (или все) операции завершились в один и тот же момент времени.

Замечание. Время выполнения одной операции на конвейерном функциональном устройстве совпадает с числом ступеней конвейера; часто конвейерное функциональное устройство реализуется, как цепочка простых функциональных устройств со временем срабатывания 1 такт (например, при выполнении операций с плавающей точкой простые функциональные устройства выполняют сравнение порядков, сдвиг мантиссы, сложение мантисс и т.п.).

Определение 1.3. Стоимостью операции называется время ее реализации, а стоимостью работы — сумма стоимостей всех выполненных операций (т.е. время их выполнения на однопроцессорной системе).

Будем обозначать R_T — стоимость работ, проведенных на нашей вычислительной системе за время T, а P_T — максимально возможная стоимость работ за время T.*

Определение 1.4. Загруженностью Z_T устройства или системы на данном отрезке времени T называется отношение стоимости реально выполненных операций к стоимости операций, которые можно выполнить при максимальном использова-

^{*}Здесь и далее под T подразумевается промежуток времени $[t_0,t_0+T]$. В результате достигается краткость в ущерб строгости (ибо рассматриваемые далее величины чаще всего зависят не только от T, но и от t_0). Заинтересованный читатель при желании легко это исправит.

нии ресурсов за то же время:

$$Z_T = \frac{R_T}{P_T}.$$

 $A c u m n m u u e c ko ü загруженностью <math>Z_{\infty}$ при выполнении данного класса работ называется предел загруженности Z_T при неограниченном увеличении рассматриваемого отрезка времени T.

$$Z_{\infty} = \lim_{T \to +\infty} Z_T.$$

Замечание. Очевидно, что $0 \le Z_T \le 1, 0 \le Z_{\infty} \le 1$.

§ 2. Свойства простых и конвейерных функциональных устройств

Рассмотрим некоторые свойства функциональных устройств.

Теорема 2.1. Если функциональное устройство простое, то максимальная стоимость работ, выполняемая им на отрезке времени длины T, равна T, а максимальная стоимость работ на том же отрезке времени для конвейерного функционального устройства длины s равна $T \cdot s$.

Доказательство очевидно.

Обозначим $P_T(F^1)$ — максимальную стоимость работ на простом функциональном устройстве, а $P_T(F^s)$ — максимальную стоимость работ на конвейерном функциональном устройстве с s ступенями. Из теоремы 2.1 следуют формулы $P_T(F^1) = T$, $P_T(F^s) = s \cdot T$.

Замечание. Максимальная стоимость работ не зависит от типов и длительностей операций.

Будем говорить, что устройство F работает стабильно на рассматриваемой задаче, если его производительность на этой задаче пропорциональна времени T, а именно $R_T(F) = TR_1(F)$.

Говорят, что устройство при максимальной загрузке работает стабильно, если $P_T(F) = TP_1(F)$.

Определение 2.1. Максимальная стоимость работ, выполняемая устройством за единицу времени в среднем на промежутке времени [t,t+T] называется пиковой производительностью на этом промежутке. Обозначим ее $\Pi^{[t,t+T]}$.

Ясно, что $\Pi^{[t,t+T]} = P_T(F)/T$.

Замечание. Если устройство при максимальной загрузке работает стабильно, то пиковая производительность от t и T не зависит. Обозначая ее через $\Pi(F)$, имеем *

$$\Pi(F) = P_T(F)/T = P_1(F).$$

Нетрудно видеть, что

- для простого функционального устройства $\Pi(F^1) = 1$,
- для s-ступенчатого конвейера $\Pi(F^s) = s$.

Определение 2.2. Реальной производительностью системы называется стоимость работ, фактически выполненных системой за единицу времени.

Замечание. Если система F работает стабильно, то реальная производительность ее равна $R_1(F)$, а ее загруженность Z_T от T не зависит. Действительно

$$Z_T = \frac{R_T}{P_T} = \frac{TR_1}{TP_1} = \frac{R_1}{P_1}. (2.1)$$

В дальнейшем будем считать, что рассматриваемые функциональные устройства работают стабильно.

Теорема 2.2. Если система состоит из k устройств c пиковыми производительностями $p_{1(1)}, p_{1(2)}, \ldots, p_{1(k)}$ и c загруженностями $z_{(1)}, z_{(2)}, \ldots, z_{(k)}$, то реальная производительность системы равна

$$R_1 = \sum_{i=1}^k z_{(i)} p_{1(i)}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Поскольку реальная стоимость работ, проводимых системой за время T складывается из стоимостей работ $R_{1(i)}$, проводимых ее устройствами за это время, то полагая T=1 имеем

$$R_1 = \sum_{i=1}^k R_{1(1)}.$$

^{*}Напомним, что R_T — стоимость работ, проведенных за время T,

 P_T — максимально возможная стоимость работ,

 Z_T — загруженность функционального устройства, $Z_T = R_T/P_T$.

Деля и умножая каждое слагаемое на $P_{1(i)}$ и пользуясь определением загруженности $z_{(i)}=R_{1(i)}/P_{1(i)},$ получаем (2.2). \blacksquare

Следствие 2.1. Из формул (2.1) и (2.2) найдем

$$Z = \sum_{i=1}^{k} z_{(i)} p_{1(i)} / P_1.$$
 (2.3)

С учетом формулы

$$P_1 = \sum_{i=1}^k P_{1(i)},$$

получаем

$$\min_{i=1,\dots,k} z_{(i)} \le Z \le \max_{i=1,\dots,k} z_{(i)}. \tag{2.4}$$

Следствие 2.2 Если система состоит из независимых устройств одинаковой пиковой производительности, то в условиях теоремы 2.2 ее загруженность равна среднему арифметическому загруженностей ее функциональных устройств.

Следствие 2.3 В условиях теоремы 2.2 загруженность системы равна единице тогда и только тогда, когда равна единице загруженность всех ее функциональных устройств.

Следствие 2.4 В условиях теоремы 2.2 для того чтобы обеспечить выполнение объема работы заданной стоимости за минимальное время, нужно обеспечить максимальную загруженность устройств наибольшей пиковой производительности.

Теорема 2.3. Пусть s простых независимых функциональных устройств за время T s общей сложности выполняют N_i операций длительностью $\tau_i, i=1,\ldots,r$. Пусть z_j — загруженность j-го функционального устройства. Тогда

$$\sum_{j=1}^{s} z_j = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{r} \tau_i N_i. \tag{2.5}$$

Доказательство почти очевидно. Пусть N_{ij} — число операций с номером i на j-м устройстве. Ясно, что

$$N_i = \sum_{j=1}^s N_{ij}.$$

C другой стороны, $z_j = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^r \tau_i N_{ij}$, откуда

$$\sum_{j=1}^{s} z_j = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \tau_i N_{ij},$$

что совпадает с доказываемой формулой (2.5).

Теорема 2.4 Пусть s конвейерных функциональных устройств за время T в общей сложности выполняют N операций, и каждое из этих функциональных устройств может выполнять лишь операции одной длительности. Пусть z_j — загруженность j-го устройства. Тогда

$$\sum_{j=1}^{s} z_j = \frac{N}{T}.\tag{2.6}$$

Доказательство. Обозначим au_j длительность операций на j-м устройстве, а N_j — их количество.

Стоимость реально выполненной работы на j-м устройстве равна $\tau_j N_j$, а максимально возможная стоимость работы, которую можно осуществить на j-м устройстве, по теореме 2.2 равна $\tau_j T$. Поэтому загруженность j-го устройства равна $z_j = (\tau_j N_j)/(\tau_j T) = (N_j)/T$.

Поскольку $\sum_{j=1}^{s} N_j = N$, то теперь легко получить формулу (2.6). Теорема доказана. \blacksquare

§ 3. О времени реализации алгоритма

Теорема 3.1. Время реализации алгоритма не меньше, чем время выполнения операций, находящихся на каждом произвольно выбранном пути графа алгоритма.

Доказательство вытекает из того факта, что операции, находящиеся на одном пути алгоритма не могут выполняться одновременно. ■

Теорема 3.2. Любой алгоритм при подходящем составе и количестве функциональных устройств может быть реализован за время, равное максимальному из времен последовательного выполнения операций, находящихся на отдельных путях графа алгоритма.

Доказательство. Используя сведения об имеющихся функциональных устройствах, укажем в вершинах графа время выполнения соответствующих операций. Далее заменим все вершины графа линейными цепочками новых вершин, число которых совпадает со временем выполнения упомянутых операций и построим для полученного графа его каноническую максимальную параллельную форму*. Очевидно, что высота этой формы равна максимальному из времён последовательного выполнения всех операций, находящихся на различных путях исходного графа (т.е. высота на единицу больше длины критического пути графа). На месте каждого яруса поставим соответствующее конвейерное функциональное устройство. Ясно, что в результате получится набор функциональных устройств, позволяющий реализовывать алгоритм за указанное в утверждении время. Теорема доказана.

Замечание. На каждом ярусе вместо конвейерных функциональных устройств можно использовать простые функциональные устройства, но в значительно большем количестве (примерно во столько раз больше, во сколько больше длительность выполнения операций). Нетрудно видеть, что хотя общее время решения задачи может уменьшаться при использовании большего количества функциональных устройств, но тем не менее при заданном наборе типов функциональных устройств оно ограничено снизу, так что начиная с некоторого момента дальнейшее увеличение количества функциональных устройств бесполезно; при этом, как правило, не реализуется полная загруженность системы ни при каком наборе функциональных устройств.

Постоянно возникают следующие кардинальные вопросы:

- нужно ли создавать специализированные параллельные системы для решения тех или иных классов задач (для некоторых таких классов ответ оказывается отрицательным),
 - что следует делать для увеличения загруженности системы,
- как заранее распознавать трудные для распараллеливания ситуации.

Ответы на подобные вопросы можно получить лишь при рассмотрении конкретных ситуаций.

 $^{^*}$ Параллельная форма называется канонической, если она — результат топологической сортировки графа; в этом случае все пути начинаются на первом ярусе.

§ 4. Ускорение при распараллеливании

Пусть алгоритм реализуется на вычислительной системе за время T. Рассмотрим гипотетическое "идеальное" простое функциональное устройство, которое имеет возможность выполнять все операции алгоритма за такие же времена, за которые эти операции выполняются в системе. Предположим, что время реализации этого алгоритма на идеальном функциональном устройстве равно T_0 .

Определение 4.1. Отношение $U = T_0/T$ называется ускорением реализации алгоритма на парадлельной системе.

Теорема 4.1. Пусть параллельная система состоит из s независимых функциональных устройств c пиковыми производительностями $p_{1(1)},\ldots,p_{1(s)}$. Предположим, что при реализации алгоритма загруженность i-го функционального устройства равна $z_{(i)},\ i=1,\ldots,s$. Тогда достигаемое ускорение U вычисляется по формуле

$$U = \sum_{i=1}^{s} p_{1(i)} z_{(i)}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Обозначим T время реализации алгоритма на нашей системе, p_1 — номинальную (пиковую) производительность системы, z — ее загруженность. Из формулы (3.3) предыдущего параграфа имеем

$$Z \cdot P_1 = \sum_{i=1}^{s} p_{1(i)} z_{(i)}. \tag{4.2}$$

По определению загруженности $Z=R_T/P_T$, где R_T — стоимость обработки алгоритма; она равна T_0 , а $P_T=P_1\cdot T$ (так как система работает стабильно). Итак

$$Z = \frac{T_0}{P_1 \cdot T},$$

откуда

$$Z \cdot P_1 = \frac{T_0}{T}.$$

Подставляя это в (4.2), получаем (4.1).

Следствие 4.1. Максимально возможное ускорение равно пиковой производительности вычислительной системы: $\max U = P_1$.

Доказательство. При максимальной загруженности устройств в формуле (4.1) имеем $z_{(i)}=1$. Отсюда $\max U=\sum_{i=1}^s p_{1(i)}=P_1$. \blacksquare

Следствие 4.2. Если вычислительная система состоит из s простых функциональных устройств, то максимально возможное ускорение равно s.

Доказательство. Пиковая производительность простого функционального устройства равна 1, так что $p_{1(i)}=1$ для всех $i=1,\dots,s$. Отсюда $P_1=\sum_{i=1}^s p_{1(i)}=s$.

Замечание. До сих пор рассматривалось только выполнение операций и не учитывались затраты на пересылки, запоминание промежуточных результатов и т.п. Однако, в реальных параллельных системах именно эти затраты являются наиболее существенными, ибо, например, каналы связи оказываются наиболее узким местом этих систем. Но ситуацию легко поправить, введя в рассмотрение функциональные устройства, которые передают ее или преобразуют в другую форму (например, перекодируют). Такие функциональные устройства тоже можно разделить на две группы: простые и конвейерные. Граф расширенного таким образом алгоритма получается из предыдущего графа добавлением вершин, соответствующих упомянутым устройствам.

Определение 4.2. *Расширенный алгоритм назовем вычислительным.*

Заметим также, что в построенной теории можно вместо всей системы рассматривать некоторую ее часть. Однако при оценке времени реализации алгоритма следует учитывать все рассматриваемые функциональные устройства.

Рассмотрим совокупность каналов связи вычислительной системы. Тогда s — число всех каналов, z_j — загруженность j-го канала, N — суммарное число всех обменов, T — время занятости каналов. Каналы считаем простыми функциональными устройствами; тогда $z_{(j)} = R_{(j)}$ — среднее число операций. Покажем, что

$$\sum_{j=1}^{s} z_{(j)} = \frac{N}{T}.$$
(4.3)

Действительно, по определению обмен представляет собой опе-

рацию, которая производится за единицу времени. За время T производится $T \cdot z_{(j)}$ операций j-м каналом. Всего производится $T \cdot \sum_{j=1}^s z_{(j)}$ операций (в данном случае, это — обмены), т.е. последнее выражение равно N. Формула (4.3) установлена.

Определение 4.3. Пропускной способностью j-го канала называется максимальное число обменов за единицу времени (таким образом, пропускная способность совпадает с максимальной загруженностью канала, т.е. с его пиковой производительностью $p_{(j)}$).

Если канал является простым функциональным устройством, то в соответствии с предыдущим его пропускная способность равна единице, $p_{(j)}=1$.

Пропускной способностью системы каналов называется ее пиковая производительность P_1 .

Отсюда легко заключить, что $P_1 = \max N/T$, и из (4.3) нетрудно вывести соотношение $P_1 = \sum_{j=1}^s p_{(j)}$. Очевидно, что если все каналы системы — простые функциональные устройства, то их пропускная способность равна их числу, $P_1 = s$.

Теорема 4.2. Пусть все функциональные устройства конвейерной вычислительной системы связаны с памятью каналами с пропускной способностью q. Пусть на этой системе реализуется некоторый алгоритм за время T, требующий N операций C суммарным числом C входных и выходных данных, причем достигается ускорение C. Предположим, что C максимальное число ступеней конвейерных функциональных устройств. Тогда справедливы неравенства

$$qT \ge M, \quad \frac{U}{q} \le \alpha \frac{N}{M}.$$
 (4.4)

Доказательство. Первое из неравенств (4.4) очевидно, ибо M входных и выходных данных требуют хотя бы M обращений к каналам, а qT — максимальное число обращений.

Для доказательства второго неравенства обозначим T_0 общую стоимость выполненных работ; тогда, очевидно, $T_0 \leq \alpha N$, ибо αN — стоимость работ, если считать, что каждая из N операций полностью загружает конвейерное функциональное устройство с α ступенями. Отсюда $T_0/T \leq \alpha N/T$; последнее умножаем на уже доказанное неравенство $1/q \leq T/M$. Учитывая, что $U = T_0/T$, находим второе из неравенств (4.4).

Определение 4.4. Функциональное устройство называется безусловным, если результаты его работы определены при любых допустимых значениях аргументов. Функциональное устройство называется условным, если некоторые или все его результаты определены не всегда и в случае неопределенности такого рода вырабатывается соответствующий сигнал.

Замечание. Функциональными устройствами могут служить триггеры, регистры, сумматоры и ЭВМ вычислительных систем. К базовым операциям будем относить операции передачи данных между устройствами и операции связи с памятью.

Глава 5. АЛГОРИТМЫ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1. О соотношении графов алгоритма и вычислительной системы

Вычислительные системы будем представлять графами, вершинам которых поставлены в соответствие функциональные устройства, а направленные дуги соответствуют направлениям передачи информации от одного устройства к другому. В отличие от вычислительного алгоритма граф вычислительной системы может иметь контуры.

Вычислительную систему описывают три основные компоненты:

- множество функциональных устройств;
- коммуникационная сеть, обеспечивающая обмен информацией между устройствами;
- множество допустимых программ работы всей совокупности функциональных устройств.

Будем предполагать, что все временные затраты определяются затратами на обеспечение функционирования рассматриваемых функциональных устройств, работающих по заданной программе; время на передачу информации от одного функционального устройства к другому не принимается во внимание (последнее предположение не уменьшает общности рассмотрения, ибо в случае необходимости канал передачи можно рассматривать как функциональное устройство).

Замечание. Одна и та же вычислительная система может реализовывать как различные алгоритмы, так и один и тот же алгоритм, но в различных временных режимах.

Для указания конкретной реализации алгоритма необходимо задать программу работы всей совокупности устройств, а именно:

- перед каждым срабатыванием любого функционального устройства определены функциональные устройства, поставляющие данные и потребляющие результат;
- указаны моменты включения функциональных устройств (моменты начала выполнения каждой операции);
- в момент включения каждого функционального устройства определены тип операции и время ее выполнения (эта характери-

стика нужна лишь в случае, если данное функциональное устройство в состоянии выполнять различные операции или одну и ту же операцию за различное время).

Возникают две основные задачи; рассмотрим каждую из них. Задача 1. Даны:

- ориентированный граф алгоритма реализации;
- спецификация операций, тождественных с его вершинами;
- перечень устройств, выполняющих в совокупности все операции алгоритма.

Требуется:

- в пределах выделенных лимитов выбрать состав функциональных устройств;
 - построить ориентированный граф вычислительной системы;
- указать программу или множество программ, обеспечивающих реализацию данного алгоритма за приемлемое время.

Задача 2. Даны:

- ориентированный граф, описывающий вычислительный алгоритм;
 - спецификация операций, отождествляемых с его вершинами;
- ориентированный граф, описывающий вычислительную систему;
- спецификация устройств, отождествляемых с его вершинами.

Требуется:

- выяснить, можно ли реализовать алгоритм на данной системе;
- если можно, то указать программу или множество программ, обеспечивающих реализацию алгоритма за приемлемое время.

Первая задача связана с проектированием вычислительных систем, а вторая — с использованием существующих систем.

Определение 1.1. Задачи 1 и 2 называются *задачами отображения* алгоритма на вычислительную систему.

Остановимся вначале на второй задаче. Ей можно дать другую, эквивалентную формулировку.

Задача 2'. Требуется установить взаимно однозначное соответствие между вершинами графа алгоритма и множеством моментов срабатываний функциональных устройств вычислительной системы, при котором происходит реализация алгоритма за приемлемое время.

§ 2. Базовая вычислительная система

В реальной ситуации при указанном соответствии после запуска системы происходит одно из двух: либо система срабатывает и реализует алгоритм, либо система срабатывает не до конца и останавливается. Последнее может происходить по различным причинам технического характера (слишком большое время реализации, слишком низкая загруженность системы и т.д.); сюда же можно отнести отсутствие желаемой эффективности. Поэтому переходят к решению задачи: среди множеств программ указать приемлемую.

Пусть G — граф рассматриваемого алгоритма (сам алгоритм будем обозначать тем же символом G). Формально заменим его вершины функциональными устройствами, которые могут выполнять соответствующие операции, а кроме того, заменим его дуги соответствующими связями для передачи данных. В результате формально получается вычислительная система G' — реализация графа G.

Вычислительная система G' называется $\mathit{базовой}$ для алгоритма G. Очевидно, граф вычислительной системы G' изоморфен графу G.

Всю совокупность P_G программ, каждая из которых реализует G на системе G', также будем называть базовой совокупностью (программы упомянутой совокупности также называем базовыми).

Определение 2.2. Перенумеруем вершины графа G' и обозначим t_i момент включения i-го функционального устройства. Вектор $t = (t_1, t_2, \ldots)$ называется *временной разверткой* базовой вычислительной системы.

Нетрудно видеть, что вектор t взаимно однозначно определяет программу из базовой совокупности программ; в дальнейшем вектор t будем называть также программой из базовой совокупности.

Отметим следующие свойства:

- 1) временны́х разверток t базовой вычислительной системы алгоритма G существует бесконечно много;
 - 2) время T реализации алгоритма определяется по формуле

$$T = \max_{i} (t_i + \tau_i) - \min_{i} t_i,$$

где τ_i — время реализации самой длинной из начинающихся в момент t_i операций;

3) по временной развертке однозначно определяется порядок операций;

4) временная развертка однозначно определяет параллельную форму алгоритма; для ее построения следует объединить в ярусы операции, начинающиеся в один и тот же момент, а сами ярусы упорядочить по возрастанию времени.

Теорема 2.1. Для любого вектора t имеется альтернатива: либо базовая система G' срабатывает и реализует алгоритм G, либо работа системы G' останавливается.

Доказательство. Очевидно, что для i-го функционального устройства системы может случиться одно из двух: а) в момент времени t_i все данные для его работы поступили; б) в момент t_i данные не поступили. В первом случае функциональное устройство срабатывает, во втором случае происходит отказ и система останавливается.

Теорема 2.2. Для того чтобы программа t по базовой системе G' реализовывала алгоритм G, необходимо и достаточно, чтобы для любых (i,j), для которых существует дуга, ведущая из i-й вершины в j-ю, разность t_j-t_i была не меньше времени срабатывания i-го функционального устройства.

Доказательство очевидно, ибо к моменту срабатывания j-го функционального устройства должны быть готовы данные для него; это означает, что для всех дуг (i,j), ведущих в j-е функциональное устройство, должно выполняться условие: разность t_j-t_i не меньше времени срабатывания i-го функционального устройства. \blacksquare

Следствие 2.1. Если путь ведет из i-й вершины в j-ю, то условие теоремы 2.2 эквивалентно тому, чтобы разность t_j-t_i была не меньше суммы времен срабатывания всех функциональных устройств на этом пути, кроме j-го.

Замечание. Совокупность всех базовых программ, реализующих G на системе G', полностью описывается теоремой 2.2.

Развертку t можно корректировать во время ее выполнения. Это происходит весьма эффективно, если эта коррекция выполняется самими функциональными устройствами, начинающими свою работу только после того, как вычислены все аргументы. Этим будет достигнуто наиболее эффективное выполнение алгоритма (если, конечно, его работу не задерживают входные данные). Эта ситуация представляет типичный пример, когда результаты выполнения алгоритма управляют работой вычислительной системы.

 ${\rm K}$ существенным недостаткам системы G' следует отнести:

- а) большое (часто огромное) число функциональных устройств, необходимых для конструирования базовой системы G';
- б) чрезвычайная малость загрузки функциональных устройств;
- в) отсутствие возможности использовать конвейерные функциональные устройства.

§ 3. К построению графа вычислительной системы

Ввиду перечисленных в предыдущем параграфе недостатков базовая система обычно неприемлема для практического применения. Поэтому в дальнейшем, используя базовую вычислительную систему G', будем строить другие системы, реализующие алгоритм G. Основной аппарат таких построений — гомоморфизмы графов.

Граф вычислительной системы следует строить, руководствуясь следующими правилами:

- 1) граф вычислительной системы получается гомоморфизмом φ из графа алгоритма G (или, что то же самое, из графа G') с помощью операции простого гомоморфизма для однотипных вершин;
- 2) если в базовой вычислительной системе G' функциональное устройство F'_j получает информацию от устройства F'_i , то в графе $\varphi G'$ вычислительной системы образ $\widetilde{F}_j \stackrel{\text{def}}{=} \varphi F'_j$ устройства F'_j может получить соответствующую информацию только от образа $\widetilde{F}_i \stackrel{\text{def}}{=} \varphi F'_i$ устройства F'_i ;
- 3) в случае необходимости сохранить результаты к функциональным устройствам подключается внешняя память нужного размера с мгновенным доступом; внешняя выборка не может происходить во время работы функционального устройства;
- 4) каждому функциональному устройству разрешается брать в качестве данных результаты срабатывания другого функционального устройства, связанного с ним линией связи, а некоторым из них разрешается брать и входные данные; переключения связей осуществляются программой.

Теорема 3.1. Пусть задан граф алгоритма G. Разобьем множество его вершин любым способом на непересекающиеся подмножества и объединим вершины каждого из подмножеств в одну вершину с помощью операции простого гомоморфизма. Возьмем полученный граф в качестве графа вычислительной системы G^* ,

поместив в каждой вершине простое или конвейерное функциональное устройство (вообще говоря, с памятью), которое может выполнять все те же операции и за то же время, что и функциональные устройства базовой системы, соответствующее сливаемым вершинам. Тогда на системе G^* можно реализовывать те базовые программы $t \in P_G$, для которых разность последовательных моментов включения любых двух функциональных устройств базовой системы, соответствующих сливаемым вершинам, по модулю не меньше числа δ . Здесь δ равно единице, если функциональное устройство построенной системы конвейерное и сливаемые вершины не связаны дугой, и равно времени срабатывания базового функционального устройства, включаемого раньше, — во всех остальных случаях.

Доказательство достаточно очевидно. Поскольку замена произошла на конвейерные устройства, то отпадают те программы, в которых слитые (базовые) функциональные устройства начинали работы одновременно: любые две операции поступавшие на слитые (базовые) функциональные устройства, теперь должны быть разнесены во времени не менее чем на 1, а если они связаны дугой, то — во времени срабатывания базового функционального устройства, включаемого раньше, т.е. находящегося в начале дуги (ибо функциональное устройство в конце дуги может начать работу лишь после срабатывания функционального устройства, находящегося в начале дуги). •

Замечание. Разнесенность во времени сливаемых функциональных устройств — условие возможности их слияния; однако эта разнесенность может служить причиной потери эффективности реализации алгоритма.

Теорема 3.2. В условиях теоремы 3.1 загруженность каждого функционального устройства построенной вычислительной системы G^* равна сумме загруженностей функциональных устройств, соответствующих сливаемым вершинам.

Доказательство очевидно.

Замечание. Задача совместной оптимизации числа функциональных устройств, их загруженности и времени реализации алгоритма обычно оказывается исключительно сложной.

Теорема 3.3. Пусть разбиение вершин графа G', проведенное в согласии с условием теоремы 3.1, таково, что для каждого подмножества все его вершины связаны одним путем. Тогда на

построенной системе G^* реализуются все программы базовой совокупности P_G .

Доказательство. этого утверждения с учетом теоремы 3.1 состоит в том, чтобы убедиться, что моменты включения функциональных устройств базовой системы разнесены во времени в достаточной степени, в данном случае это гарантируется тем, что эти функциональные устройства находятся на одном пути и операции на нем выполняются последовательно одна за другой.

Замечание. sl Разбиение множества вершин графа алгоритма на подмножества вершин, лежащих на одном пути, дает конструктивный способ конструирования математических моделей вычислительных систем. Таких систем может быть много, но все они лучше по основным параметрам (кроме размера памяти). Они содержат меньшее число функциональных устройств, загруженность каждого функционального устройства больше, число линий связей меньше, причем на них реализуются все программы базовой совокупности P_G . Здесь опять можно ставить задачу оптимизации, пытаясь разбить новое множество вершин на подмножества и уменьшить их число путем слияния.

Теорема 3.4. Пусть вычислительная система строится так, как указано в теореме 3.1. Предположим, что граф алгоритма направленный и проекции сливаемых вершин на направляющий вектор различны. Поставим в соответствие k-му срабатыванию функционального устройства ту из сливаемых вершин графа, которая имеет k-ю по порядку проекцию на направляющий вектор. Тогда соответствие гарантирует правильную выполняемость алгоритма.

Доказательство представляется весьма очевидным.

Теорема 3.5. Пусть граф G алгоритма направленный. Спроектируем (ортогонально) его на гиперплоскость, перпендикулярно направляющему вектору. Если эту проекцию взять в качестве графа вычислительной системы, то будут выполняться условия теоремы 3.4.

Доказательство. Сливаемые вершины находятся на прямых, параллельных направляющему вектору, поэтому их проекции на направляющий вектор очевидно различны; тем самым условия теоремы 3.4 выполнены. •

Замечание. При ортогональном проектировании удобно считать, что дуги исходного графа прямолинейны, ибо в противном

случае могут получиться петли и кратные дуги, которые, по существу, нужно будет отбросить.

Теорема 3.6. Пусть граф алгоритма связный и строго направленный. Предположим, что длина проекции каждой из дуг на направляющий вектор пропорциональна времени выполнения операции, находящейся в начале дуги, а времена выполнения операций, соответствующих вершинам с совпадающими проекциями, одинаковы. Тогда на вычислительной системе, построенной в соответствии с теоремой 3.5, можно реализовывать алгоритм за минимально возможное время.

Доказательство. Время включения каждого функционального устройства однозначно определяется положением проекций, а крайние проекции соответствуют начальным и конечным значениям времени работы системы. Очевидно, что в указанных условиях их разность минимальна. •

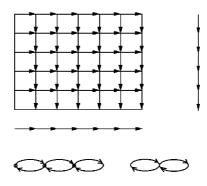


Рис. 11. Строго направленный граф.

Теорема 3.7. Пусть алгоритм реализуется на некоторой вычислительной системе. Если после его реализации исключить незадействованные функциональные устройства и лишние связи, то останется подграф, который получается из графа алгоритма с помощью операций простого гомоморфизма.

Доказательство очевидно.

Приведем пример построения графа вычислительной системы. Рассмотрим алгоритм со строго направленным графом, изображен-

ным на рис. 11 (здесь предполагается, что все операции однотипны).

Граф вычислительной системы может быть получен несколькими способами: а) объединением вершин по горизонталям; б) объединением вершин по вертикалям; в) объединением вершин по диагонали (см. рис. 11).

Случай а) является наиболее простым, но учет ввода входных данных может заставить предпочесть другой вариант.

Глава 6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ

§ 1. Программы реализации алгоритмов

1.1. Условия реализуемости алгоритмов

Реализация алгоритма на вычислительной системе — это реализация базовой программы эквивалентным способом. Поэтому (явно или неявно) должны быть определены:

- функция, устанавливающая взаимно однозначное соответствие между вершинами графа алгоритма и отдельно срабатываниями функциональных устройств вычислительной системы;
- потоки информации между функциональными устройствами системы;
 - моменты включения функциональных устройств.

Имеются две основные стратегии при решении этих задач:

- статическая;
- динамическая.

При статической стратегии решение принимается заранее на основе анализа алгоритма и вычислительной системы, а при динамической стратегии решение принимается в процессе реализации.

Динамическая стратегия характеризует так называемые потоковые линии. Иногда используют смешанные стратегии.

Принято на этой стадии исследования идеализировать ситуацию, предполагая, что система не может сработать и выдать неправильный результат (т.е. результат, относящийся к другому алгоритму): либо система срабатывает и реализует алгоритм, либо система не срабатывает. Этот подход на самом деле во многих случаях весьма далек от истины: например, при решении той или иной вычислительной задачи обычно предполагается, что указанные в алгоритме арифметические действия выполняются точно; однако, при реальных вычислениях компьютерная система реализует "машинную арифметику", так что результат фактически относится к реализации другого алгоритма (причем реализуемый алгоритм, как правило, остается неизвестным).

Соответствие, которое устанавливает упомянутая выше функция между алгоритмом и срабатываниями системы, чрезвычайно важна: ее неудачный выбор может оказаться первой причиной несрабатывания алгоритма. Важно также, чтобы класс "удачных"

функций был достаточно широк; иначе, например, может случиться, что в этом классе нет приемлемой функции, которая дает программу с допустимым временем реализации.

Теорема 1.1. Для того чтобы при заданной функции соответствия между вершинами графа алгоритма и отдельными срабатываниями функциональных устройств вычислительной системы алгоритм был реализуем, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух вершин, выполняемых на одном функциональном устройстве и связанных путем, более позднее срабатывание соответствовало той вершине, которая находится в конце пути.

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 2.2 предыдущей главы. \blacksquare

Замечание. Здесь вопрос подачи входных данных в систему, а также вопросы присоединения и использования памяти не обсуждаются.

Для того, чтобы обсуждать эффективность алгоритма, нужно привлечь дополнительные данные.

Если перенумеровать функциональные устройства нашей системы натуральными числами, а также перенумеровать натуральными числами моменты нашего (дискретного) времени, то информация о моментах включения функциональных устройств можно поместить в первом квадранте целочисленной решетки на плоскости. Граф алгоритма размещается в *s*-мерном пространства так, что его вершины находятся в целочисленных точках (решетчатый граф). Задача состоит в построении отображения этого графа на целочисленную решетку плоскости, удовлетворяющую определенным условиям.

На плоскости можно представить себе фишки, представляющие собой носители информации; они содержат в себе всю необходимую информацию об адресате, а также о результате срабатывания функционального устройства. Фишки передвигаются к своим адресатам, и очередное функциональное устройство срабатывает только после того, как у него соберутся все необходимые фишки. Срабатывание порождает новые фишки с новыми адресами. Здесь предполагается, что первоначальное распределение фишек произведено до начала вычислительного процесса; оно проводится не обязательно по узлам вычислительной системы на плоскости и может быть проведено на графе алгоритма. При фиксации функции мо-

жет быть проведена определенная оптимизация.

Теорема 1.2. Пусть установлена такая функция соответствия между вершинами графа алгоритма и срабатываниями функционального устройства, при которой алгоритм может быть выполнен. Для того чтобы при этой функции алгоритм выполнялся за минимальное время, достаточно, чтобы каждый момент включения функционального устройства совпадал с моментом получения последнего аргумента выполняемой на данном включении операции.

Доказательство. Поскольку дана функция соответствия, при которой алгоритм может быть выполнен, то следовательно зафиксирована некоторая параллельная форма алгоритма, ярусы которой и будем использовать в доказательстве.

Для данного функционального устройства при его первом срабатывании соответствующую ему вершину поместим в s-й ярус, если в нее ведет путь максимальной длины s-1, а при повторном срабатывании поместим ее в ярус, номер которого не меньше номера яруса предыдущего срабатывания и больше ведущего в нее пути максимальной длины.

Рассмотрим два режима включения функционального устройства. Пусть первый режим соответствует утверждению теоремы (т.е. функциональное устройство включается в момент поступления к нему всех необходимых данных), а второй режим пусть обеспечивает минимальное время реализации алгоритма. Сравним оба режима по длительности. Будем считать, что у обоих режимов совпадают начала работы системы функциональных устройств. Первый режим единственный (по способу построения); поэтому все функциональные устройства первого яруса включаются в один момент. Длительность второго режима не изменится, если мы предположим, что все функциональные устройства первого яруса у него тоже включаются в один момент. Но тогда у обоих режимов будут в один момент включаться все устройства первых ярусов. Для второго режима устройства второго яруса не могут включаться ранее, чем устройства второго яруса первого режима (ввиду его определения). Теперь аналогичным рассуждением приходим к выводу, что все устройства второго яруса в обоих режимах включаются одновременно.

Продолжая эти рассуждения приходим к выводу, что первый режим включения функционального устройства реализует

1.2. О времени выполнения алгоритмов

Рассмотрим теперь любую упорядоченную последовательность вершин графа алгоритма, в которой для каждой пары последовательных вершин следующая вершина либо связана дугой с предыдущей, либо обе операции, соответствующие этим вершинам, выполняются на одном функциональном устройстве. Ясно, что операции для этой последовательности вершин могут выполняться лишь последовательно. Значит, при фиксированном соответствии графа алгоритма и соответствующих срабатываниях функционального устройства время реализации алгоритма не меньше, чем минимальное время выполнения (на избранной системе и при том же соответствии) последовательности упомянутых операций.

Определение 1.1. Последовательности с максимальным из минимальных времен выполнения называются максимальными последовательностиями.

Благодаря теореме 1.2 легко устанавливаем следующее утверждение

Теорема 1.3. Пусть установлена функция соответствия между вершинами графа алгоритма и срабатываниями, при которых алгоритм выполним. Тогда минимальное для этой функции время реализации алгоритма равно времени выполнения максимальных последовательностей.

Следствие 1.1. Для того чтобы режим включения функциональных устройств обеспечивал минимальное время реализации
алгоритма при данной функции соответствия между вершинами графа алгоритма и срабатывания функциональных устройств,
необходимо и достаточно, чтобы время реализации алгоритма
было равно минимальному времени выполнения при этой функции
соответствия хотя бы одной упорядоченной последовательности
операций, каждая из которых либо получает аргумент предыдущей, либо выполняется вместе с предыдущей на одном функциональном устройстве.

Доказательство очевидно.

Сформулированное следствие полезно при установлении того, что режим включения обеспечивает минимальное время реализации алгоритма: для этого достаточно найти цепочку указанного рода, минимальное время выполнения которой совпадает со време-

нем реализации алгоритма.

Замечание. Понятие минимальной последовательности можно рассматривать как обобщение понятия критического пути графа на случай системы с ограниченными возможностями (напомним, что критический путь графа алгоритма характеризует минимально возможное время его реализации на системе с неограниченными возможностями).

С точки зрения моментов включения функциональных устройств различают два основных режима: синхронный и асинхронный.

Определение 1.2. Режим называется *синхронным*, если моменты включения функциональных устройств создают равномерную сетку на оси времени, и *асинхронным* — в противном случае.

Стремление реализовать алгоритм за минимальное время обычно приводит к асинхронному режиму (в особенности, если операции производятся за различное время или на конвейерных функциональных устройствах), однако если время операций одинаково и они производятся на простых функциональных устройствах, то при реализации алгоритма за минимальное время те операции, которые соответствуют максимальной последовательности, будут выполняться в синхронном режиме.

Заметим также, что синхронный режим обычно свойствен процессам, обеспечивающим максимальную загруженность оборудования. Действительно, если система, например, состоит лишь из конвейерных функциональных устройств и работает с полной загруженностью, то включение функциональных устройств обычно происходит с шагом единица.

1.3. Уравновешенность базовой системы. Режим максимального быстродействия

Определение 1.3. Базовая система называется уравновешенной, если для любого ее функционального устройства суммы времен срабатывания функциональных устройств, находящихся на различных путях системы, связывающих входы системы и входы данного функционального устройства, одинаковы, а также одинаковы аналогичные суммы времен на всех путях, связывающих входы и выходы системы.

Определение 1.4. Уравновешенную систему, у которой все функциональные устройства имеют одинаковые времена выполне-

ния операций или являются конвейерными, называют cunxponusu-posanhoù.

Теорема 1.4. Любую базовую вычислительную систему можно сделать уравновешенной с помощью добавления функциональных устройств, осуществляющих операцию задержки во времени.

Доказательство. Рассмотрим каноническую параллельную

форму базовой системы. Проведем индукцию по ярусам. Предположим, что для некоторого k и любого $l,\,1\leq l\leq k$, равны суммы времен срабатывания всех функциональных устройств, находящихся на любых путях, связывающих входы базовой системы с любым фиксированным входом функционального устройства l-го яруса. Это очевидно для k=1.

Предположим, что утверждение верно для некоторого k. Рассмотрим (k+1)-й ярус и возьмем максимальную сумму, соответствующую (k+1)-му ярусу. Все дуги, лежащие на путях с меньшей суммой и ведущие с k-го яруса на (k+1)-й, разомкнем и вставим функциональное устройство задержки равной разности максимальной суммы и рассматриваемой. Теперь будут равными суммы времен срабатывания всех функциональных устройств, находящихся на любых путях, связывающих входы базовой системы и входы любого функционального устройства (k+1)-го яруса. Теорема доказана.

Замечание. Вставка функционального устройства задержки может рассматриваться как присоединение максимальной памяти специального вида или как присоединение функционального устройства, осуществляющего тождественное преобразование информации.

Определение 1.5. Пусть режим работы вычислительной системы состоит в том, что очередное срабатывание функционального устройства возможно, когда результат предыдущего срабатывания этого функционального устройства уже использован или используется в момент подачи команды на срабатывание, причем сами команды подаются без задержки по мере готовности аргументов. Такой режим называется режимом максимального быстродействия. Режим максимального быстродействия может нарушать выполнение исходного алгоритма.

Замечание. Заставляя синхронизированную систему работать

в режиме максимального быстродействия, мы получаем возможность максимально быстро реализовывать поток однотипных алгоритмов. При этом каждое функциональное устройство загружено полностью и система автоматически работает в синхронном режиме. На получение первого результата необходимо столько времени, сколько необходимо для реализации алгоритма за минимально возможное время, а разность получения времен результатов соседних групп равна единице, если функциональные устройства — конвейерные, и равна времени выполнения одной операции, если функциональные устройства — простые.

Большинство решаемых вычислительных задач требует многократной реализации однотипных алгоритмов (так например, задачи математической физики требуют многократного применения метода прогонки), и потому конвейерное вычисление для них может быть исключительно эффективным.

 $\Pi pumep$. Пусть вычисляется выражение $(a+b)^2c$, причем операции сложения и умножения проводятся за один такт.

На рис. 12 представлены графы двух систем: слева — базовая система, а справа — уравновешенная базовая система.

Здесь светлым кружком представлена операция задержки.

Обе схемы работают одинаково, если реализуется одиночный алгоритм. Если же имеется поток однотипных алгоритмов с данными a_i, b_i, c_i , то в режиме максимального быстродействия после i-го такта на левой системе на входах последней операции получим $(a_i + b_i)(a_{i-1} + b_{i-1})c_{i-1}$.

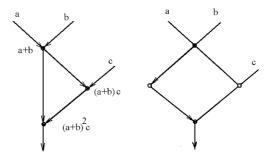


Рис. 12. Базовая система и уравновешенная базовая система.

§ 2. Матричные представления графов алгоритмов

2.1. Матрицы инциденций и смежности

Рассмотрим ориентированный граф G=(V,E) без петель и кратных дуг. Пусть все вершины занумерованы числами $i=1,2,\ldots,n$, а дуги перенумерованы числами $j=1,2,\ldots,k$.

Определение 2.1. Прямоугольная матрица $A=(a_{ij})$ размеров $n \times k$

$$a_{i,j} = \begin{cases} +1, & \text{если} \ \ j\text{-}я \ \text{дуга выходит из } i\text{-} \ \text{й вершины}, \\ -1, & \text{если} \ \ j\text{-}я \ \text{дуга входит в } i\text{-} \ \text{ю вершину}, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях}, \end{cases}$$

называется матрицей инциденций графа G.

Определение 2.2. Квадратная матрица $B=(b_{ij})$ размеров $n \times k$

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если из } i\text{-} \Bar{u} \text{ вершины в } j\text{-} \Bar{u} \text{ идет дуга}, \\ 0 & \Bar{u} \text{ в противном случае}, \end{cases}$$

называется матрицей смежности графа G.

Пример. Рассмотрим граф алгоритма сложения чисел a и b, изображенного на рис. 13 (кружками отмечены вершины графа, внутри кружков — номера вершин, а номера ребер находятся в ромбиках).

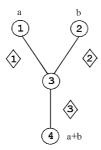


Рис. 13. Граф алгоритма сложения чисел.

Очевидно, здесь $n=4,\,k=3;$ матрица инциденций имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix},$$

$$a_{11} = 1$$
, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$,
 $a_{21} = 0$, $a_{22} = 1$, $a_{23} = 0$,
 $a_{31} = -1$, $a_{32} = -1$, $a_{33} = 1$,
 $a_{41} = 0$, $a_{42} = 0$, $a_{43} = -1$.

Итак,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0, \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что матрица смежности такова:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что в каждом столбце матрицы A инциденций графа G лишь два элемента отличны от нуля; они равны +1 и -1. Поскольку по предположению граф G не имеет кратных дуг, то матрица A не имеет одинаковых столбцов. Число ненулевых элементов в строке произвольно. В каждом столбце и в каждой строке матрицы смежностей B, вообще говоря, может находиться любое число ненулевых элементов, но ввиду того, что нет петель, все диагональные ее элементы равны нулю, а внедиагональные элементы могут быть либо нулем, либо +1 (кроме того, поскольку нет кратных дуг, то из соотношения $b_{ij}=1$, следует соотношение $b_{ji}=0$).

2.2. О реализации алгоритма с данной матрицей инциденций

Предположим, что алгоритм с матрицей инциденций A реализуется на некоторой вычислительной системе. Рассмотрим векторстолбец $t=(t_1,\ldots,t_k)^T$ временной развертки (здесь t_i — момент включения функционального устройства, начинающего выполнять операцию, находящуюся в i-й вершине графа алгоритма; верхний индекс T означает транспонирование). Рассмотрим кроме этого вектор реализации $h=(h_1,\ldots,h_k)^T$, где h_i — время выполнения

операции, находящейся в начале j-й дуги. Согласно сделанным ранее предположениям будем всегда считать векторы h и t целочисленными и неотрицательными.

Замечание. При формулировке некоторых утверждений будем использовать термин система без ограничений в отношении системы, у которых принимаются во внимание лишь ограничения, явно указанные при формулировке того или иного утверждения; при этом на остальные параметры системы никаких ограничений не накладывается (предполагается, что по тем или иным причинами они не оказывают влияния на реализацию алгоритма). Такая точка зрения оправдана, ибо, с одной стороны, она акцентирует внимание на определенном аспекте ситуации, а с другой стороны, способствует упрощению рассмотрений. Кроме того, она не уменьшает общности рассмотрений, позволяя распространить их на все интересующие стороны ситуации обычными приемами (подключением дополнительных функциональных устройств).

Теорема 2.1. Для того чтобы алгоритм с матрицей инциденций A был реализуем на данной системе с вектором временной развертки t и вектором реализации h, необходимо, а в случае базовой системы и достаточно выполнение неравенства

$$-A^T t \ge h. (2.1)$$

Доказательство. Поскольку реализация алгоритма означает реализацию одной из его базовых программ, то осталось заметить, что строки неравенства (2.1) представляют собой не что иное, как условия теоремы 2.2.

Действительно, в j-й строке матрицы A^T находятся элементы $a_{ij},\ i=1,2,\ldots,n,$ указывающие, является ли i-я вершина одним из концов рассматриваемой дуги, и если является (т.е. $a_{ij}\neq 0$), то служит ли она входом (в этом случае $a_{ij}=+1$) или выходом (тогда $a_{ij}=-1$) для этой вершины. Как было замечено ранее, в каждой строке имеется лишь два ненулевых элемента (их абсолютная величина равна единице, а знаки противоположны).

Пусть в рассматриваемой j-й строке

$$a_{i'j} = 1$$
, $a_{i''j} = -1$, $a_{ij} = 0$ для $i \neq i', i''$.

Таким образом, j-я дуга исходит из вершины с номером i'=i'(j) (начало дуги) и входит в вершину i''=i''(j) (конец дуги). Ска-

лярное умножение на вектор временной развертки очевидно дает разность $t_{i'(j)} - t_{i''(j)}$, так что неравенство (2.1) принимает вид

$$-(t_{i'(j)} - t_{i''(j)}) \ge h_j.$$

Последнее означает, что момент времени начала операции в конце дуги должен быть больше момента времени начала операции в начале дуги не менее чем на величину времени реализации операции, указанной в начале дуги. ■

Замечание. По матрице A, векторам t и h определяются многие характеристики процесса реализации алгоритма; в частности:

1) время T выполнения алгоритма равно (см. § 8 из первой главы)

$$T(t) = \max_{i} (t_i + \tau_i) - \min_{i} t_i, \qquad (2.2)$$

где τ_i — время реализации операции в i-й вершине;

- 2) порядок выполнения операций алгоритма соответствует упорядочению по возрастанию координат вектора t;
- 3) если какие-то координаты вектора t одинаковы, то это означает, что соответствующие операции выполняются параллельно на разных функциональных устройствах;
- 4) если перенумеровать подряд все группы равных координат вектора t и провести топологическую сортировку вершин графа алгоритма, помечая одним индексом вершины, относящиеся к равным компонентам t_k , то эта сортировка определит параллельную форму алгоритма, реализуемую при временном режиме, соответствующем вектору t;
- 5) синхронность или асинхронность работы функциональных устройств связывается c равномерным или неравномерным распределением (различных) координат вектора t.

2.3. Об использовании памяти для хранения промежуточных результатов

В графе G выделим множество L вершин, $L \subset V$ (например, L может быть множеством вершин, соответствующих операции сложения). Обозначим $q_L(t,\tau)$ число координат t_i вектора t, равных τ и таких, что t_i — момент включения функционального устройства, реализующего операцию в i-й вершине, лежащей в L. Теперь число

 π_L устройств, необходимых для реализации операций, соответствующих множеству L, определится формулой

$$\pi_L = \max_{\tau > 0, t_i = \tau} q_L(t, \tau). \tag{2.3}$$

Рассмотрим какую-либо строку соотношения (2.1), и пусть эта строка соответствует дуге, идущей из вершины v_s в вершину v_r , причем в вершине v_s операция выполняется за время $h_{(s)}$ (номер s здесь, вообще говоря, не означает порядковый номер компоненты вектора h и связан с номером вершины — начала рассматриваемой дуги). Если $t_r - t_s > h_{(s)}$, то это означает, что в момент времени $t_s + h_{(s)}$ операция будет выполнена, и результат ее должен где-то храниться до момента t_r прежде, чем он будет использован при выполнении операции, соответствующей вершине v_r .

Поэтому вектор $h+A^Tt$ определяет режим использования памяти вычислительной системы для хранения промежуточных результатов. В частности, нужное число ψ каналов записи в память и число θ каналов чтения из памяти находятся по формулам *

$$\psi = \max_{\tau \ge 0, \ t_r - t_s > h_{(s)}} q_v(t + h^*, \tau),$$

где h^* — вектор длительностей $h_{(i)}$ операции в i-й вершине, $i=1,2,\ldots,n,$

$$\theta = \max_{t_v = \tau} q_v(t, \tau). \tag{2.4}$$

В первой формуле вычисляется количество координат вектора t равных $t_s+h_{(s)}$, для которых $t_r-t_s>h_{(s)}$ (или, иначе, число дуг, для которых включение очередного устройства задерживается) и берется максимум по подобным дугам, а во второй — максимальное число устройств, использующих задержанные результаты по всем моментам времени.

2.4. Задача отображения алгоритмов на вычислительные системы как задача минимизации функционала

Теперь видно, что неравенство (2.1) определяет все ограничения и требования, проистекающие из-за внутренних особенностей

 $^{^*}q_v(t+h^*, au)$ — число компонент (вершин), для которых $t_i+h_i= au$; из них выделены лишь те вершины, где $t_r-t_s>h_{(s)}$. Это можно написать в виде $\psi=\max q_v(t, au)$ при условиях $t_s+h_{(s)}= au,\ t_r-t_s>h_{(s)}$.

алгоритма. Дополнительные условия, связанные с вычислительной системой, следует добавить в (2.1). Например, ограничения на число каналов связи, на количество типов функциональных устройств и т.п. накладываются на функции (2.3), (2.4).

Таким образом, задача отображения алгоритмов на вычислительные системы может быть описана как задача минимизации функционала T(t), определяемого формулой (2.2) на множестве решений системы (2.1) с упомянутыми дополнительными ограничениями.

Обычно это задача гигантской сложности.

Отметим следующие трудности:

- написание дополнительных ограничений вида (2.3), (2.4);
- написание матрицы инциденций;
- решение результирующей экстремальной задачи.

Перечисленные трудности располагаются в порядке возрастания. Матрица инциденций алгоритма практически никогда не приводится: ее размеры огромны. Ограничения обычно носят нелинейный характер и невыпуклы. Поставленная задача относится к задачам нелинейного программирования и очень сложна.

Рассмотрим случай, когда не учитываются никакие дополнительные ограничения, т.е. предполагается, что система имеет неограниченные ресурсы и возможности (нечто вроде концепции неограниченного параллелизма). Тогда задача сводится к минимизации функционала (2.2) на множестве, описываемом неравенством (2.1).

Фактически эта задача эквивалентна отысканию максимальной параллельной формы алгоритма или критического пути графа; она представляет собой задачу линейного программирования. Действительно, добавим к графу G две условные вершины v_0 и v_{n+1} . Из вершины v_0 проведем дуги во все начальные вершины графа, а из всех конечных вершин графа проведем дуги в вершину v_{n+1} . Будем считать, что операции, соответствующие вершинам v_0 и v_{n+1} выполняются мгновенно. Модифицировав соответствующим образом матрицу инциденций A и вектор реализации h, получим аналогичную задачу, но для линейного функционала T(t),

$$T(t) = t_{n+1} - t_0.$$

Теорема 2.2. Пусть задана некоторая вычислительная система. Если при временной развертке t алгоритм реализуется за

минимальное для данной системы время, то хотя бы одна строка векторного неравенства (2.1) обращается в точное равенство.

Доказательство. От противного. Если все строки в (2.1) являются строгими неравенствами, то это означает, что каждый результат выполнения операций записывается в память. В этом случае очевидно, что время выполнения алгоритма можно уменьшить, если начинать выполнение операций сразу после получения последнего аргумента.

Следствие 2.1. Если при временной развертке t алгоритм реализуется за минимально возможное время, то обращаются в равенства те строки неравенства (2.1), которые соответствуют дугам критических путей графа алгоритма c матрицей инциденций A.

Замечание. Обращение какой-либо строки (2.1) в равенство говорит о том, что для соответствующей пары операций результат выполнения одной из них сразу же используется как аргумент для другой. Если все строки (2.1) представляют собой равенства, то это означает, что при реализации алгоритма не используется память для хранения результатов промежуточных вычислений.

Теорема 2.3. Для того чтобы при реализации на вычислительной системе данного алгоритма не использовалась память для хранения промежуточных результатов, необходимо и достаточно, чтобы вектор t временной развертки удовлетворял равенству

$$-A^T t = h (2.5)$$

и ограничениям, накладываемым вычислительной системой.

Следствие 2.2. В условиях выполнения равенства (2.5) алгоритм реализуется за минимально возможное время при заданных длительностях выполнения операций.

Из предыдущего видно, что исследование реализаций алгоритма, наилучших с точки зрения быстродействия и к тому же не требующих памяти для хранения результатов промежуточных вычислений, связано с исследованием множества решений системы (2.5). Критерий существования упомянутых реализаций — разрешимость системы (2.5) на множестве временных разверток, удовлетворяющих ограничениям вычислительной системы.

Как известно, для существования хотя бы одного решения системы (2.5) на множестве всех векторов t с вещественными компонентами, необходимо и достаточно, чтобы правая часть h была

ортогональна всем решениям системы Az=0.

Пусть
$$z = (z_1, \ldots, z_k)^T$$
 — решение системы

$$Az = 0. (2.6)$$

Это означает, что линейная комбинация векторов-столбцов матрицы A с коэффициентами z_1,\ldots,z_k представляет собой нулевой вектор-столбец. Каждый вектор-столбец является образом некоторой дуги графа алгоритма. Это дает основание говорить о линейной комбинации дуг, о линейно независимых дугах и т.п. В целях упрощения и большей наглядности перейдем от исходного к изоморфному графу.

${f 2.5.}$ О представлении графа алгоритма в пространстве ${\cal R}^n.$ Условия существования циклов

Рассмотрим n-мерное арифметическое пространство R^n и отождествим вершины v_1,\ldots,v_n графа G с единичными координатными векторами e_1,\ldots,e_n из R^n . Каждой дуге (v_i,v_j) этого графа поставим в соответствие вектор e_i-e_j пространства R^n . Поскольку по предположению исходный граф G не имеет петель и не имеет кратных дуг, то очевидно, что построенный граф изоморфен графу G. В дальнейшем, для обоих графов будем использовать одни и те же обозначения; это не приведет к путанице. Теперь (v_i,v_j) и v_i-v_j — различные обозначения одной и той же дуги, а v_i и v_j можно считать координатными векторами.

Предположим, что в графе G имеется некоторый цикл

$$v_{i_1}, \dots, v_{i_s}, v_{i_1},$$
 (2.7)

где s>1, вершины проходятся слева направо в последовательности (2.7), а ориентация дуг пока что не принимается во внимание.

Теперь учтем ориентацию дуг следующим образом: если при указанном обходе цикла (2.7) сначала встречается начальная вершина дуги, а потом — конечная, то будем говорить, что эта дуга обходится в положительном направлении, а если сначала встречается конечная вершина, а потом — начальная, то будем говорить, что дуга обходится в отрицательном направлении. Ввиду отсутствия кратных дуг для каждой пары $(v_{i'}, v_{i''})$ соседних вершин последовательности определено либо положительное, либо отрицательное направление обхода.

Цикл (2.7) естественно может иметь повторяющиеся вершины (дублирование v_{i_1} в конце списка (2.7) не считается); обход некоторых его ребер может совершаться неоднократно. Если при обходе цикла m-е ребро графа проходится r_m раз в положительном направлении и s_m раз — в отрицательном, то m-му ребру ставим в соответствие число

$$z_m = r_m - s_m. (2.8)$$

Остальным ребрам графа поставим в соответствие число 0.

Определение 2.3. Вектор

$$z = (z_1, \dots, z_k) \tag{2.9}$$

называется *вектор-циклом*. Вектор-цикл, соответствующий элементарному циклу (т.е. такому, у которого в последовательности (2.7) все вершины различны), называется *элементарным вектор-циклом*.

Из определения вектор-цикла z следует, что $z \neq 0$.

Компоненты элементарного вектор-цикла всегда равны либо +1, либо -1, либо 0.

Теорема 2.4. Любой вектор-цикл z является решением уравнения (2.6).

Доказательство. Для вектор-дуг любого цикла имеем очевидное равенство

$$(v_{i_2} - v_{i_1}) + (v_{i_3} - v_{i_2}) + \ldots + (v_{i_1} - v_{i_s}) = 0.$$
 (2.10)

Стоящие в скобках выражения представляют собой вектор-дуги с точностью до множителя ± 1 . Этот множитель равен +1, если дуга в цикле (2.7) проходится в положительном направлении (сперва встречается ее начало, а затем — конец) и этот множитель равен -1, в противном случае.

Итак, (2.10) представляет собой линейную комбинацию всех вектор-дуг графа G (т.е. столбцов матрицы A) с множителями z_1, z_2, \ldots, z_k соответственно.

Теорема доказана. ■

Следствие 2.3. Если A — матрица инциденций графа c элементарными циклами, то существуют такие неотрицательные решения z уравнения (2.6), компоненты которых равны 0, +1, -1.

Следствие 2.4. Если A — матрица инциденций графа c элементарными контурами, то существуют такие нетривиальные решения z уравнения (2.6), компоненты которых равны 0 или +1.

Следствие 2.5. *Если столбцы матрицы А линейно независимы, то граф не имеет элементарных циклов.*

Замечание. Если в графе имеется цикл, то в нем имеется элементарный цикл, таким образом, слово "элементарный" в предыдущих утверждениях можно отбросить.

Теорема 2.5. Пусть некоторая линейно зависимая система L столбцов матрицы инциденций A графа G обладает тем свойством, что при исключении любого столбца, оставшаяся система столбцов линейно независима. Тогда совокупность дуг, соответствующих рассматриваемым столбцам, образует элементарный цикл u не содержит никаких других циклов.

Доказательство. Любая система столбцов определяет некоторый подграф G' исходного графа (ибо столбец определяет дугу). Ввиду предположений теоремы нулевой столбец можно представить в виде нетривиальной линейной комбинации K столбцов из L, причем в нее войдут все столбцы из L с ненулевыми коэффициентами (если хотя бы один коэффициент нулевой, то ввиду линейной независимости оставшихся столбцов, все коэффициенты — нулевые, что противоречит нетривиальности взятой линейной комбинации).

Предположим, что среди вершин подграфа G' есть одна висячая. Тогда координата вектора висячей вершины не может обратиться в нуль при ненулевых коэффициентах. Это означает, что висячая вершина невозможна. Итак, каждая вершина принадлежит более, чем одному ребру. Но тогда есть циклы в рассматриваемом подграфе G', а им соответствовали бы нетривиальная комбинация столбцов из L, которая равна нулю. Но с точностью до множителя, существует единственная нетривиальная комбинация этих столбцов, а именно указанная выше комбинация K. Итак, имеется лишь один цикл; очевидно, что этот цикл элементарен, ибо иначе существовали бы другие циклы. Теорема доказана. \blacksquare

Следствие 2.6. Если система (2.6) имеет нетривиальное решение, то в G существует по крайней мере один элементарный вектор цикл.

Теорема 2.6. Пусть A — матрица инциденций графа G, имеющего циклы. Тогда в пространстве решений z однородной системы (2.6) можно выбрать базис, целиком состоящий из

элементарных вектор-циклов.

Доказательство. Рассмотрим какое-нибудь нетривиальное решение z системы (2.6) (такое имеется, так как G по предоложению имеет цикл). Обозначим L_z систему столбцов матрицы A, соответствующую ненулевым компонентам вектора z. Из них выберем совокупность L столбцов, удовлетворяющих теореме 2.5. Пусть w — соответствующий. Подберем число α так, чтобы вектор z — αw имел меньше ненулевых компонент, чем вектор z (такое α подобрать можно, ибо по построению ненулевые компоненты вектора w могут быть разве лишь на месте ненулевых компонент вектора z).

С полученным вектором $z-\alpha w$ повторим упомянутую процедуру (из соответствующей ему системы столбцов $L_{z-\alpha w}$ выберем подсистему, удовлетворяющую теореме 2.5 и т.д.)

В результате конечного числа шагов получим искомое представление вектора z в виде линейной комбинации элементарных циклов. Нетрудно видеть, что система элементарных циклов определяется независимо от выбора вектора z. Теорема доказана. \blacksquare

Теорема 2.7. Для того чтобы система (2.5) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы ее правая часть h была ортогональна всем элементарным вектор-циклам.

Доказательство вытекает из альтернативы Фредгольма и теоремы 2.6. \blacksquare

Следствие 2.7. Если граф G имеет контуры, то система (2.5) не имеет решений ни при каком векторе h с положительными координатами.

Доказательство. Если в G имеются контуры, то в G имеется хотя бы один элементарный цикл, а значит, и соответствующий ему вектор-цикл; тогда согласно следствию 2.4 существует нетривиальное решение с компонентами 0 или +1. Ввиду теоремы 2.7 ясно, что система (2.5) решений не имеет.

Следствие доказано.

Теорема 2.8. Для того чтобы при реализации алгоритма G на вычислительной системе не использовалась память для хранения промежуточных вычислений, необходимо, а если нет дополнительных ограничений, то и достаточно, чтобы при обходе любого элементарного цикла графа алгоритма сумма времени выполнения операций, соответствующих дугам, проходимым в положительном направлении, равнялась сумме времени выполнения операций, соответствующих дугам, проходимым в отрицательном

направлении.

Доказательство. Если нет дополнительных ограничений, то достаточно воспользоваться теоремой 2.7: сформулированное в теореме 2.8 условие эквивалентно ортогональности h всем элементарным циклам.

Теорема 2.9. Если граф алгоритма связный и система (2.5) совместная, то множество ее решений представляет прямую линию с направляющим вектором $\mathbf{e} = (1, 1, \dots 1)$.

Доказательство. Зафиксируем какую-либо координату вектора t. Тогда в силу связности графа все остальные компоненты определяются из системы (2.5) однозначно. Поскольку в каждой строке матрицы A^T имеется только два ненулевых элемента, равных +1 и -1, то разность любых двух решений системы пропорциональна вектору ${\bf e}$.

Следствие 2.8. Если граф алгоритма G имеет p компонент связности, то множество ее решений представляет плоскость размерности p.

Следствие 2.9. Если граф алгоритма имеет p компонент связности, n вершин и m дуг, то он имеет m-n+p независимых векторов циклов.

Замечание 1. Если граф алгоритма связный, то вся неоднозначность решений системы (2.5) определяется выбором момента начала выполнения алгоритма. Поэтому исследование реализаций алгоритма, наилучших с точки зрения времени выполнения и не требующих памяти для хранения промежуточных результатов, весьма просто. Сначала проверяют условия теоремы 2.8, далее находят какое-нибудь решение задачи (2.5) и сдвигают его на вектор, пропорциональный вектору е. Среди подобных сдвигов отыскивают те, которые удовлетворяют дополнительным ограничениям, накладываемым вычислительной системой.

Замечание 2. До настоящего времени формально можно считать, что исследовался специальный случай отсутствия памяти для промежуточных результатов. Однако, если добавить в каждую дугу графа по вершине, указывающей на обращение к памяти, понимая под этим устройство задержки (не меняющее информацию, но требующее некоторое время для срабатывания), мы придем снова к задаче вида (2.5). Однако теперь в полученном векторе h некоторые компоненты (а именно те, которые соответствуют введенным устройствам) не определены; их следует подобрать в зависимости

от требований, налагаемых вычислительной системой на решение задачи.

Следующая теорема иллюстрирует роль матрицы смежности.

Теорема 2.10 Пусть G=(V,E) ориентированный граф без петель и пусть B — его матрица смежности. B графе G контуры отсутствуют тогда и только тогда, когда существует такая матрица перестановок P, что матрица P^TBP — верхнетреугольная.

Доказательство. Переход от матрицы B к матрице P^TBP соответствует определенной перенумерации вершин.

Если в G контуры отсутствуют, то существуют параллельные формы. Возьмем одну из них и перенумеруем вершины подряд сначала в первом ярусе, затем во втором и т.д. При такой нумерации дуги будут всегда идти от вершины с меньшим номером к вершине с большим номером. А это означает, что у матрицы смежности P^TBP ненулевыми будут лишь элементы $b_{ij}^{\prime},\ i< j,$ т.е. матрица будет верхнетреугольной.

Обратно, если P^TBP — верхнетреугольная, то это означает, что существует перенумерация, при который все дуги идут от меньших номеров вершин к большим, т.е. циклов в графе нет. \blacksquare

Справедливо также следующее утверждение.

Теорема 2.11. Ациклический ориентированный граф c матрицей смежностей B имеет параллельную форму высоты l и ширины s тогда и только тогда, когда существует матрица перестановкой P такая, что P^TBP является блочной правой треугольной блочного порядка l c нулевыми квадратными диагональными блоками порядка не выше s.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы, если ярусы параллельной формы рассматривать как макрооперации, а блоки как элементы соответствующей матрицы смежностей.

\S 3. Об NP-сложности задачи отыскания графа вычислительной системы из графа алгоритма

3.1. Memod nepeбopa

Предыдущие построения показали принципиальную возможность из графа алгоритма получить граф вычислительной систе-

мы, реализующий этот алгоритм в той или иной степени эффективно, причем эти рассмотрения проводились в достаточно общей ситуации.

Конечно, желателен был бы эффективный общий метод решения подобных задач, однако опыт развития методов показывает, что эффективность метода и его общность находятся в противоречии друг к другу. Поэтому для создания эффективных методов приходится разбивать множество задач на довольно узкие классы и находить эффективные методы для этих классов, учитывая их специфику.

Поскольку рассматриваемые задачи являются конечномерными, то их решение возможно методом перебора: для построения параллельной формы алгоритма, граф которого содержит n вершин, требуется по крайней мере n^2 действий. Однако, в рассматриваемой ситуации даже полиномиальная сложность, как правило, велика для практической реализации, ибо n— число вершин графа алгоритма является в то же время числом операций в алгоритме, а это число в большинстве случаев чрезвычайно велико. Таким образом, построение параллельной формы оказывается значительно более сложной задачей, чем реализация алгоритма; поэтому ее построение имеет смысл делать упомянутым методом лишь в том случае, когда алгоритм будет реализован большое число раз.

Чаще всего конкретную вычислительную задачу можно рассматривать как элемент определенного семейства задач, параметризованных натуральным параметром k и приближающих интересующий физический процесс при $k \to +\infty$. В этом случае число n операций в алгоритме является функцией параметра k, n=n(k). Хотя для конкретной задачи в первую очередь важно знать число n(k) операций в алгоритме при фиксированном k, однако, с ростом требований к точности вычислений и с увеличением технических возможностей для проведения вычислений весьма существенными оказываются асимптотические оценки функции n(k).

Если $n(k) \approx k^{\alpha}$, $\alpha > 0$, то говорят о задаче полиномиальной сложности (P-сложная задача); в противном случае задача имеет более высокую (неполиномиальную) сложность.

Таким образом, по сложности решения все дискретные задачи делятся на задачи полиномиальной сложности (P-сложные задачи) и задачи более высокой сложности, чем полиномиальные (NP-сложные задачи).

Все переборные задачи (без направленного перебора) относятся к NP-сложным задачам. В классе NP-сложных задач выявлены универсальные, к которым полиномиально сводятся любые задачи из некоторых классов. Если бы удалось доказать, что универсальная задача имеет полиномиальную сложность, то тем самым было бы доказано, что все задачи соответствующего класса имеют полиномиальную сложность.

3.2. О сужении класса задач

Среди рассмотренных выше задач имеются NP-сложные. Рассмотрим следующую задачу: для двух данных графов $G_1=(V_1,E_1)$ и $G_2=(V_2,E_2)$ требуется указать, можно ли получить из графа G_1 граф G_2 с помощью операции простого гомоморфизма. Эта задача является NP-сложной даже в простейших случаях (например, когда граф G_2 представляет собой треугольник).

Следовательно, нет никаких оснований надеяться на то, что можно получить решение общей задачи отображения графов алгоритмов на архитектуру вычислительных систем с помощью универсального метода.

Причина этой ситуации кроется в том, что класс рассматриваемых алгоритмов слишком широк; сузить же этот класс трудно по двум причинам: 1) недостаточно ясно, какие алгоритмы необходимо включить в этот класс (ибо мы плохо представляем те задачи, которые собираемся решать), 2) трудно дать удобную формализацию интересующего нас класса. Заметим еще, что сужая класс рассматриваемых алгоритмов, нужно следить за тем, чтобы не выбросить интересующие нас алгоритмы.

Таким образом, NP-сложность задачи о "гомоморфизме графов" связана с излишне большим количеством рассматриваемых ситуаций.

Глава 7. ПАРАЛЛЕЛИЗМ ПРИ ОБРАБОТКЕ ИНФОРМАЦИИ

§ 1. Конвейерные вычисления

1.1. Безусловные конвейерные вычислители

Наиболее эффективным способом параллельной обработки вычислений является конвейерный.

Для упрощения обсуждения конвейеризации вычислений условимся о следующем:

- на первом этапе откажемся от рассмотрения смыслового содержания операций, выполняемых отдельными функциональными устройствами;
- рассмотрим по возможности минимальное число характеристик конвейерных вычислений;
 - ограничимся наиболее важными задачами.

Будем предполагать, что имеется три этапа обработки данных:

- короткий подготовительный этап, определяющий настройку конвейерного устройства, связанный с нестандартными вычислениями;
 - длинный, в котором происходит основная обработка;
- короткий, заключительный, определяющий вывод полученных результатов и выполняющий нестандартные вычисления в конце процесса.

В связи с этим считаем, что на втором этапе:

- данные обрабатываются однозначно;
- отсутствует поиск и подкачка данных;
- фиксирована коммутация функциональных устройств.

Кроме того, будем считать, что:

- имеется полная или почти полная загруженность оборудования конвейерного устройства;
- результаты обработки любого функционального устройства могут быть переданы для дальнейшей обработки без обращения к общей памяти;
- все функциональные устройства имеют одинаковую номинальную производительность.

Определение 1.1. Конвейерное устройство, удовлетворяющее перечисленным требованиям, будем называть конвейерным вычислителем.

В дальнейшем часто будем считать, что все функциональные устройства конвейерного вычислителя простые. Это предположение обосновано тем, что любое конвейерное функциональное устройство может быть представлено в виде линейной цепочки простых функциональных устройств.

К функциональным устройствам могут быть отнесены те устройства, которые обеспечивают подачу входных данных либо передачу или хранение данных для дальнейшего использования.

Число входов и выходов функциональных устройств не регламентируется, причем функциональные устройства, выполняющие одиночные по смыслу операции, могут иметь различное число выходов.

Определение 1.2. Конвейерные вычислители, которые не имеют в своем составе функциональных устройств, реализующих условные операции, называются безусловными конвейерными вычислителями.

Поскольку на втором этапе работы конвейерного вычислителя коммутация фиксирована, то можно ввести следующее определение.

Определение 1.3. Сопоставим отдельным функциональным устройствам вершины графа, а имеющимся связям между функциональными устройствами — дуги. Полученный граф называется $\it графом$ конвейера.

Приведем примеры безусловных конвейерных вычислителей:

- -любое конвейерное функциональное устройство (соответствующий граф конвейера будет представлять простой путь),
- любая вычислительная базовая система, работающая в режиме максимального быстродействия (если базовая система синхронизирована, то граф конвейера в этом случае совпадает с графом реализуемого алгоритма).

Рассмотрим конвейерный вычислитель из s функциональных устройств с длительностями выполнения операций $\tau_1,\,\tau_2,\,\ldots,\,\tau_s.$

Пусть конвейерный вычислитель полностью загружен в некоторый момент времени, так что в этот момент все его функциональные устройства готовы начать работу. Начиная с данного момента, наиболее естественный режим работы конвейерного вычислителя— это синхронный режим со временем цикла

$$\tau = \max_{1 \le i \le s} \tau_i. \tag{1.1}$$

Теорема 1.1. Асимптотическая загруженность z любого безусловного вычислителя, работающего в режиме синхронного выполнения операций функционального устройства c циклом τ , равна

$$z = \frac{1}{s\tau} \sum_{i=1}^{s} \tau_i. \tag{1.2}$$

Доказательство. Воспользьзуемся следствием 2.2 главы 4, согласно которому загруженность равна среднему арифметическому загруженностей отдельных устройств, а загруженность каждого из них равна τ_i/τ . Теорема доказана.

Следствие 1.1. Для того чтобы при синхронном режиме с циклом τ асимптотическая загруженность безусловного конвейерного вычислителя была равна 1, необходимо и достаточно, чтобы время срабатывания всех используемых функциональных устройств было одинаковым.

Доказательство вытекает из формул (1.1), (1.2) и равенства $\tau_i/\tau=1$. \blacksquare

Теорема 1.2. Пусть вычислительная система имеет s безусловных независимых функциональных устройств одинаковой пиковой производительности с длительностями выполнения операций, равными τ_1, \ldots, τ_s . Если граф вычислительной системы связный, то при любом режиме функционирования асимптотическая загруженность z системы удовлетворяет неравенству

$$z \le \frac{1}{s\tau} \sum_{i=1}^{s} \tau_i. \tag{1.3}$$

Доказательство. Обозначим N_i число операций, выполненных на i-м функциональном устройстве за время T. Пусть i-я вершина связана с j-й цепью длины r. Поскольку один из аргументов j-го функционального устройства связан с i-м функциональным устройством путем (так что либо j-е функциональное устройство влияет на i-е, либо наоборот, а режим работы установился), то абсолютная величина разности между количествами операций, проведенных этими устройствами не превосходит r, и потому справедливо неравенство $N_j - r \le N_i \le N_j + r$, а поскольку $r \le s$, то верно соотношение $N_j - s \le N_i \le N_j + s$. Согласно формуле (2.5)

главы 4 имеем

$$\sum_{i=1}^{s} z_{i} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{s} \tau_{i} N_{i},$$

откуда для любого j-го устройства на упомянутом пути

$$\sum_{i=1}^{s} z_i \le \frac{N_j + s}{T} \sum_{i=1}^{s} \tau_i. \tag{1.4}$$

Очевидно, $N_j \leq \frac{T}{\tau_j}$. Пусть теперь j — номер функционального устройства с максимальным временем срабатывания; обозначим это время τ , так что $\tau = \max \tau_i$, где максимум берется по номерам устройств, находящихся на рассмтриваемом пути. Тогда $N_j \leq \frac{T}{\tau}$, и потому

$$\frac{N_j + s}{T} \le \frac{\frac{T}{\tau} + s}{T} = \frac{T}{\tau} \cdot \frac{1 + s\tau T^{-1}}{T},$$

так что из правой части неравенства (1.4) находим

$$\sum_{i=1}^{s} z_i \le \frac{1 + s\tau T^{-1}}{\tau} \sum_{i=1}^{s} \tau_i.$$

Переходя к пределу при $T\to\infty$ и принимая во внимание, что согласно следствию 2.2 главы 4 загруженность системы равна среднему арифметическому загруженностей ее функциональных устройств, получаем неравенство (1.3). Теорема доказана. \blacksquare

Следствие 1.2. Пусть вычислительная система состоит из простых безусловных функциональных устройств и граф системы связный. Если асимптотическая загруженность хотя бы одного функционального устройства равна 1, то:

- это функциональное устройство имеет максимальную длительность выполнения операций;
 - выполняется равенство (1.2).

Доказательство вытекает из того, что в этом случае осуществляется синхронный режим с циклом $\tau = \max_i \tau_i$. Осталось воспользоваться теоремой 1.1. •

Из сказаного следует, что для обеспечения асимптотически полной загруженности оборудования безусловного конвейерного вычислителя нужно стремиться к тому, чтобы время срабатывания всех используемых функциональных устройств было одинаковым. Этого можно добиться, например, заменой долго работающих

функциональных устройств либо эквивалентной цепочкой быстро работающих функциональных устройств, либо совокупностью параллельно работающих функциональных устройств с циклической подачей на них обрабатываемых данных.

Синхронный режим наиболее целесообразен, поэтому будем считать в дальнейшем, что безусловный конвейерный вычислитель работает синхронном режиме с циклом 1, а данные поступают на входы безусловных конвейерных вычислителей единовременно в последовательные моменты времени (с шагом 1).

Таким образом, начиная с установления режима безусловного конвейерного вычислителя реализация алгоритма происходит с получением в каждый момент времени данных на входы и выдачей результатов на все выходы.

Для того чтобы вывести безусловный конвейерный вычислитель на режим счета, необходимо обеспечить данными все его функциональные устройства. Это производится в период загрузки безусловного конвейерного вычислителя. В отличие от работы в установившемся режиме, в период загрузки данные поступают не только через входы безусловного конвейерного вычислителя (которые будем называть основными), но и через так называемые дополнительные входы, работающие только в период загрузки. В частности, если безусловный конвейерный вычислитель имеет контуры, то без дополнительных входов обойтись невозможно, ибо нельзя для них подать информацию через основные входы.

Опишем процесс загрузки, который в дальнейшем будем называть стандартным. Каждой дуге графа поставим в соответствие число, равное длине элементарного минимального пути графа из какого-либо входа безусловного конвейерного вычислителя в ту вершину, для которой эта дуга является выходной. Для j-й вершины рассмотрим множество целых чисел, соответствующих ее входам; наименьшее из них обозначим через m_j . Пусть l_{ij} — входная дуга, а M_{ij} — соответствующее ей число. Если $M_{ij} > m_j$, то дугу l_{ij} разомкнем и по образовавшемуся дополнительному входу подадим данные последовательно $M_{ij} - m_j$ раз, после чего дополнительный вход устраним (дугу замкнем). Подобную закачку данных произведем для всех дуг с указанным свойством $M_{ij} > m_j$. Процесс разрезания дуг и подключения дополнительных входов фактически означает уравновешивание использующихся неуравновешенных циклов. Таким образом, имеется общее между процессом загрузки и процес

сом уравновешивания графа базовой вычислительной системы.

Замечание 1. Вообще говоря, безусловный конвейерный вычислитель реализует целое множество алгоритмов. Эти алгоритмы порождаются:

- различными способами загрузки;
- числом (и характером) обрабатывания данных;
- способом окончания работы безусловного конвейерного вычислителя.

Замечание 2. Процесс окончания работы безусловного конвейерного вычислителя, вообще говоря, не требует размыкания каких-либо дуг; можно считать, что в момент окончания работы к безусловному конвейерному вычислителю подключаются дополнительные выходы, не оказывающие влияния на работу безусловного конвейерного вычислителя.

1.2. Развертка безусловного конвейерного вычислителя

Обозначим au некоторый момент времени, $au \geq 0$. Будем считать, что работа безусловного конвейерного вычислителя начинается при au = 0.

Пусть $G(\tau)$ граф алгоритма, содержащего операции, которые могут быть выполнены без привлечения данных, поступающих с основных или дополнительных входов в моменты времени $\tau' > \tau$.

Теорема 1.3. Граф $G(\tau)$ является подграфом графа $G(\tau')$, $\tau' > \tau$.

Доказательство очевидно.

Определение 1.4. Семейство графов $\{G(\tau)\}_{\tau \geq 0}$ будем называть разверткой безусловного конвейерного вычислителя.

Заметим, что иногда разверткой безусловного конвейерного вычислителя называют граф $G_{\infty} = \cup_{\tau > 0} G(\tau)$.

Перенумеруем функциональные устройства безусловного конвейерного вычислителя числами $1, 2, \ldots, s$. В прямоугольной системе координат на плоскости ось абцисс будем считать осью времени τ (напомним, что рассматриваются только целые числа на этой оси, ибо наше время дискретно), а на оси ординат будем откладывать номер устройства. Если в момент времени $\tau>0$ работает устройство с номером k, то объявим точку (τ,k) вершиной графа. Тем самым устанавливается соответствие между вершинами графа

и моментами срабатывания k-го функционального устройства. Дуги введем в соответствие с направлением передачи информации, их будем изображать векторами.

Изображение на рис. 14 демонстрирует периодичность начиная с некоторого момента τ_0 .

Предположим, что данные по дополнительным входам безусловного конвейерного вычислителя подавались в последний раз в момент t_0 . Развертка графа естественным образом разбивается на две части: одна часть соответствует процессу загрузки, а вторая часть — установившемуся режиму работы, носящему периодический характер.

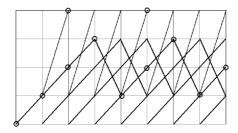


Рис. 14. Загрузка и установившейся режим работы системы.

Нетрудно видеть, что часть, соответствующая периоду, является основной, ибо из нее можно получить непериодическую часть, удаляя некоторые дуги, которые теперь начинают играть роль дополнительных входов.

Отсюда можно сделать вывод, что основным аспектом теории является изучение бесконечных периодических графов.

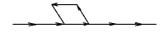
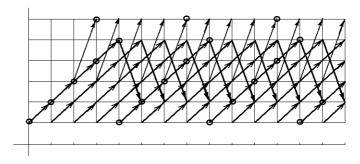


Рис. 15. Граф безусловного конвейерного вычислителя.

На рис. 15 изображен граф безусловного конвейерного вычислителя, соответствующий второму этапу обработки данных.

При загрузке дуга, соединяющая точки 5 и 2, размыкается и подряд четыре раза подаются входные данные, а затем она смыкается.



 $Puc.\ 16.$ Развертка графа безусловного конвейерного вычислителя.

На рис. 16 представлена развертка графа этого безусловного конвейерного вычислителя, где начиная с $\tau=\tau_0$ появляется периодическая часть.

§ 2. Векторные вычислительные машины

2.1. Векторные операции и векторная память

Многие вычислительные методы широко используют операции с векторами, которые характеризуются однотипностью и естественной параллельностью арифметических действий. Поэтому вычислители, ориентированные на быстрое выполнение векторных операций, традиционно называют векторными. Векторные операции представляют собой совокупность независимых скалярных операций над координатами векторов с согласованными номерами. Поскольку операции однотипные, то для их реализации естественно применить конвейерные функциональные устройства. Особенностью ситуации состоит в том, что на конвейерное функциональное устройство нужно быстро подавать данные и быстро считывать результаты на каждом такте. Это достаточно трудно осуществлять,

если конвейерные функциональные устройства взаимодействуют с общей памятью, поэтому векторные вычислители снабжаются сверхбыстрой памятью, с которой в основном взаимодействуют упомянутые функциональные устройства. Эту сверхбыструю память можно считать промежуточной между функциональными устройствами и основной (сравнительно медленной) памятью.

Определение 2.1. Сверхбыстрая память, подключенная к функциональному устройству в векторном вычислителе, называется *векторной памятью*.

Векторная память служит для хранения координат обрабатываемых векторов. Конструктивно ее оформляют в виде блоков, каждый из которых служит для хранения координат одного вектора.

Пример 1. В системе CRAY-1 векторная память представлена в виде восьми "векторов" размерности 64 каждый. Вся основная обработка информации осуществляется векторами размерности не выше 64. Каждый вход и выход функционального устройства подключается только к одному "вектору" сверхбыстрой памяти.

 Π ример 2. Предположим, что нам нужно вычислить вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, где \mathbf{a} , \mathbf{b} — векторы размерности n, а также — вычислить вектор \mathbf{d} , равный произведению вектора \mathbf{c} на число γ .

Для удобства "векторы" сверхбыстрой памяти будем обозначать теми же буквами, что вычисляемые векторы и векторы начальных данных, а также одинаково будем обозначать координаты векторов и соответствующие ячейки "векторов" памяти.

Предположение (А):

- имеются конвейерные буфер и умножители, каждый из которых состоит из пяти ступеней;
- на включение конвейера дополнительное время не требуется, но требуется один такт для считывания результата.

Сначала рассмотрим векторную операцию $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, сводящуюся к однотипным независимым операциям над компонентами $c_i = a_i + b_i, i = 1, 2, \dots, n$ (рис. 17).

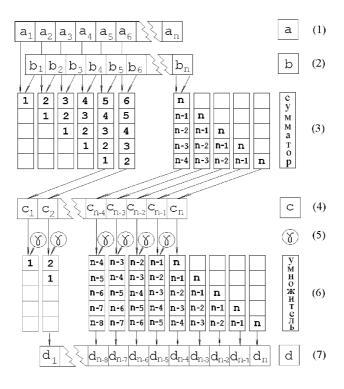
В верхней части представленного рисунка приведена схема реализации этой векторной операции, где исходные векторы **a** и **b** размещены сначала в "векторах" (1) и (2) быстрой памяти, а затем поступают на сумматор (3) покоординатно. На рисунке сумматор представлен в виде многократного образа, демонстрирующего изменения сумматора по тактам (слева направо) и по ступеням

(сверху вниз).

Цифра в соответствующем прямоугольнике означает номер обрабатываемой на данной ступени координаты векторов ${\bf a}$ и ${\bf b}$.

Ввиду предположения (A) первый результат — компонента c_1 — появляется на шестом такте, компонента c_2 — на седьмом такте и т.д., а последний результат появляется на (n+5)-м такте.

Подсчитаем загруженность z_6 сумматора, т.е. отношение стоимости реально выполненной работы и максимально возможной стоимости работ за рассматриваемый промежуток времени T.



Puc. 17. Изменения сумматора по тактам.

Поскольку вся работа будет выполняться за n+5 тактов, то

выберем T=n+5. Как было отмечено выше, за это время будет обработано n произведений, каждое за 5 тактов. Итак, стоимость реально проведенных операций определяется числом 5n. С другой стороны, согласно теореме 2.1 главы 4 максимально возможная стоимость работ равна произведению времени T на число ступеней конвейера, так что упомянутая стоимость определяется числом 5T=5(n+5).

Итак,

$$z_6 = \frac{5n}{5(n+5)} = \frac{1}{1+5/n}. (2.1)$$

На гипотетическом простом функциональном устройстве вектор ${\bf a}+{\bf b}$ можно отыскать за время $T_0=5n$ тактов, так что ускорение $R_s=T_0/T$ равно

$$R_s = \frac{5n}{(n+5)} = 5\frac{1}{1+5/n}. (2.2)$$

Заметим, что если конвейерное функциональное устройство имеет r ступеней, то его загруженность и ускорение определяются формулами

$$z = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-1}, \quad R = r\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-1}.$$
 (2.3)

Отсюда видно, что с ростом n загруженность приближается к единице, а ускорение при достаточно большом n практически пропорционально числу ступеней. Следовательно, размерность "векторов" быстрой памяти следует выбирать возможно большей. В системе CRAY-1 векторная память, как было указано в примере 1, состоит из 8 "векторов" размерности n=64.

$2.2.\ O$ зацеплении конвейерных устройств

Вернемся к примеру 2; в нем помимо сложения векторов требуется получить еще и вектор ${\bf d}$, умножив вектор ${\bf c}$ на число γ . Это умножение продемонстрировано в нижней части рис. 17. Ситуация здесь практически не отличается от предыдущей, так как по предположению умножитель имеет то же число ступеней конвейера, что и сумматор, имеется лишь одно (несущественное сейчас для нас) отличие: для хранения числа γ нужна одна ячейка. Для изображения тактовых изменений умножитель и ячейка γ используют многократные образы. Как и в предыдущем случае (см. (2.1),

(2.2)), при умножения на число γ получаем формулы, аналогичные (2.3):

$$z_m = \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{-1}, \quad R_m = 5\left(1 + \frac{5}{n}\right)^{-1}.$$
 (2.4)

Следует отметить, что если векторную операцию $\mathbf{d} = \gamma(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ реализовывать, как последовательность операций $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ и $\mathbf{d} = \gamma \mathbf{c}$, то загруженность совокупности устройств сумматор + множитель будет вдвое меньше, чем при отдельной реализации (2.4) каждой из упомянутых операций. Причиной этого является перегруженность умножителя во время работы с сумматором. Для того чтобы повысить загруженность упомянутой совокупности устройств, естественно начинать умножение сразу после поступления первого результата от сумматора и далее продолжить умножение конвейерно с использованием конвейерно поступающих результатов сложения от сумматора.

Определение 2.2. Работа двух конвейерных функциональных устройств в режиме, при котором результаты первого функционального устройства "подхватываются" сразу вторым функциональным устройством, называется зацеплением конвейерных устройстве.

Теорема 2.1. Пусть в режиме зацепления на векторах длины n работают s конвейерных функциональных устройств c числом ступеней $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ соответственно, причем функциональные устройства включаются последовательно друг за другом. Тогда загруженность z системы этих функциональных устройств u достигаемое ускорение равны

$$z = \left(1 + \frac{s - 1 + \sum_{j=1}^{s} \alpha_j}{n}\right)^{-1}, \quad R = z \sum_{i=1}^{s} \alpha_i.$$
 (2.5)

Доказательство. Легко видеть, что первый результат на выходе первого функционального устройства получается на (α_1+1) -м такте, первый результат на выходе второго функционального устройства — на $(\alpha_1+\alpha_2+2)$ -м такте и т.д.; поэтому весь процесс получения первого результата осуществляется за время $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s+s$. Процесс получения второго результата закончится через $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s+s+1$ такт и т.д., наконец, последний n-й результат будет получен через время

$$T = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s + s + n - 1. \tag{2.6}$$

В соответствии с § 2 главы 4 стоимость реально выполненных операций на конвейерном функциональном устройстве равна произведению числа операций на число ступеней этого функционального устройства. Всю их совокупность, очевидно, можно рассматривать как одно объединенное функциональное устройство, числом ступеней которого является сумма числа ступеней всех рассматриваемых функциональных устройств. Поскольку через объединенное функциональное устройство прошло n операций, причем сработали все $\sum_{j=1}^s \alpha_j$ его ступеней, стоимость реально выполненных операций за время T в данном случае равна

$$n\sum_{j=1}^{s} \alpha_j. \tag{2.7}$$

В силу теоремы 2.1 главы 4 максимальная стоимость выполнения операций на этом объединенном функциональном устройстве равна произведению времени T (как обычно, измеряемому в тактах) на максимальную длительность операций на этом функциональном устройстве. В нашем случае длительности операций на нашем функциональном устройстве одинаковы и равны числу его ступеней, т.е. сумме $\sum_{j=1}^{s} \alpha_{j}$. Итак, максимальная стоимость выполнения операций в наших условиях равна

$$T\sum_{j=1}^{s} \alpha_j. \tag{2.8}$$

Отношение величин (2.7) и (2.8) дает загруженность z,

$$z = n/T, (2.9)$$

так что с учетом соотношения (2.6) формула (2.9) приводит к первому из равенств (2.5). Переходя к доказательству второго из равенств (2.5), напомним, что по определению 4.1 (см. § 4 главы 4) ускорение R определяется формулой

$$R = T_0/T, (2.10)$$

где T_0 — время выполнения всех операций на таком гипотетическом простом функциональном устройстве, на котором имеется возможность выполнять каждую операцию за то же время, что и на кон-

вейерном функциональном устройстве, которое в нашем случае является объединенным. Поэтому

$$T_0 = \sum_{j=1}^s n\alpha_j,\tag{2.11}$$

и из формул (2.6), (2.10) и (2.11) находим

$$R = \frac{n \sum_{j=1}^{s} \alpha_j}{s + n - 1 + \sum_{j=1}^{s} \alpha_j} = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \left(1 + \frac{s - 1 + \sum_{j=1}^{s} \alpha_j}{n} \right)^{-1},$$

откуда из доказанной ранее первой формулы в (2.5) найдем $R=z\sum_{j=1}^s\alpha_j$, что совпадает со второй формулой в (2.5). Теорема доказана.

Замечание. Здесь и далее подразумевается, что длины рассматриваемых векторов не больше величин, допускаемых векторной памятью.

Следствие 2.1. Пусть для достижения загруженности z в автономном режиме i-му функциональному устройству требуется проведение вычислений c векторами длины не меньше n_i , $i=1,\ldots,s$. Тогда для достижения той же загруженности z всей системы в режиме зацепления требуется проводить вычисления c векторами длины $n \geq \sum_{i=1}^{s} n_i$.

Доказательство. Применим первую из формул (2.5) к случаю, когда система состоит из одного, а именно i-го функционального устройства; тогда в ней придется взять s=1 и $n=n_i$. В результате найдем

$$z = \left(1 + \frac{\alpha_i}{n_i}\right)^{-1},$$

$$n_i = \frac{z\alpha_i}{1 - z}.$$
(2.12)

откуда

Используя снова первую из формул (2.5) для s устройств, найдем

$$z\left(1 + (s - 1 + \sum_{j=1}^{s} \alpha_j)/n\right) = 1,$$

так что

$$\frac{s-1+\sum_{j=1}^{s}\alpha_j}{n}=\frac{1-z}{z},$$

откуда

$$n = \left(s - 1 + \sum_{j=1}^{s} \alpha_j\right) \frac{z}{1 - z}.$$

Теперь ясно, что с помощью соотношения (2.12) получится неравенство

$$n \ge \sum_{j=1}^{s} \frac{z\alpha_j}{1-z} = \sum_{j=1}^{s} n_j,$$

что и требовалось установить.

Следствие 2.2. Пусть в автономном режиме для достижения ускорения $z\alpha_i$, $0 \le z \le 1$, i-му функциональному устройству требуется проведения вычислений с векторами длины не менее n_i . Тогда в режиме зацепления для достижения ускорения всей системы функциональных устройств, равного сумме ускорений отдельных функциональных устройств, требуется проводить вычисления с векторами, длина которых не меньше $\sum_i n_i$.

§ 3. Систолические массивы

3.1. Понятие о системах с жестко заданной конфигурацией. Систолические ячейки и систолические массивы

В этом параграфе пойдет речь о вычислительных системах с жестко заданной конфигурацией. Появление таких систем связано со значительным продвижением в области технологии компьютерного производства, с одной стороны, и с потребностью решения огромного количества однотипных задач — с другой. В результате были разработаны стандартные вычислительные функциональные устройства, геометрия которых позволила помещать их близко друг от друга, что избавило от необходимости иметь специальную коммуникационную сеть для их соединения. Функциональные устройства удалось соединить между собой непосредственно. Это привело к созданию вычислительных систем, имеющих предельно простую структуру, в которых практически отсутствует коммуникационная сеть. Поскольку упомянутая сеть обычно задерживает работу вычислительной системы (из-за различных задержек при передачи информации от одного функционального устройства к другому, в том числе и из-за того, что скорость распространения электронного сигнала не превосходит скорость света), удалось значительно увеличить быстродействие всей системы. Следует отметить, что каждая такая система позволяет решать задачи лишь из весьма узкого класса.

Остановимся на идее конструирования рассматриваемых систем более подробно. Пусть в нашем распоряжении имеется достаточно большое число функциональных устройств, которые могут реализовывать операции одного или нескольких типов.

(А) Предположим, что входы и выходы этих функциональных устройств выведены на их поверхность, так что соединение функциональных устройств между собой можно выполнять непосредственно, располагая их вплотную друг к другу (например, в виде некоторого многоугольника).

Определение 3.1. Функциональные устройства со свойством (A) называются систолическими ячейками (или процессорными элементами, или элементарными процессорами, или чипами).

Определение 3.2. Массив систолических ячеек, расположенных вплотную с соединенными соседними элементами, так, что полученная система способна выполнять определенный алгоритм, называется систолическим массивом, соответствующим заданному алгоритму (или просто систолическим массивом).

 $\Pi pumep$. Пусть требуется построить специализированную вычислительную систему, на которой достаточно быстро реализуется операция вычисления матрицы

$$D = C + AB, (3.1)$$

где A, B, C — ленточные матрицы порядка $n \times n$ следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица A имеет нули вне ленты, состоящей из главной диагонали, одной наддиагонали и двух поддиагоналей. Матрица B имеет нули вне ленты, состоящей из главной диагонали, двух наддиагоналей и одной поддиагонали. Наконец, матрица C имеет нули вне ленты, состоящей из главной диагонали, трех наддиагоналей и трех поддиагоналей.

Предположим, что имеется достаточно большое количество функциональных устройств, реализующих скалярную операцию

$$d = c + ab (3.2)$$

и осуществляющих одновременно передачу данных.

Предполагается, что рассматриваемые функциональные устройства обладают свойствами:

- $(B_1$) каждое функциональное устройство имеет три входа $\vec{a},$ $\vec{b},$ \vec{c} и три выхода $\,a_{\cdot},\,\,b_{\cdot},\,\,c_{\cdot}$.
 - $(B_2$) входные и выходные данные связаны соотношением

$$\underline{c} = \vec{c} + \vec{a}\vec{b}, \quad \underline{b} = \vec{b}, \quad \underline{a} = \vec{a}.$$
 (3.3)

 (B_3) конструктивно каждое функциональное устройство выполнено в виде правильного плоского шестиугольника (рис. 18), с

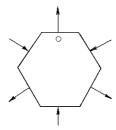


Рис. 18. Функциональное устройство в виде шестиугольника.

 (B_4) если в момент выполнения операции какие-то данные не поступили, то они доопределяются нулями.

Предположим также, что:

- (C_1) полученная в результате система (систолический массив) сконструирована согласно следующей схеме: она определена семействами прямых, расположенных под углами 60^o друг к другу и образующих решетку (систолический массив находится в области, которую можно считать ромбом);
- (C_2) данные располагаются в узлах упомянутой решетки; этим определяется исходное состояние системы,
- (C_3) система работает по тактам и за каждый такт данные перемещаются в соседние узлы на один шаг.

На следующем такте все данные переместятся на один шаг, так что числа $a_{11},\,b_{11},\,c_{11}$ окажутся в одном функциональном устройстве. Следовательно, будет вычислено выражение

$$c_{11} + a_{11}b_{11}. (3.4)$$

За этот же такт данные a_{12} и b_{21} приблизятся на расстояние одного шага к функциональному устройству, находящемуся в вершине ромба, упомянутого в предположении C_1 . На следующем такте все данные снова переместятся на один узел, и в рассматриваемом функциональном устройстве окажутся числа a_{12} , b_{21} и результат (3.4) предыдущего срабатывания функционального устройства.

Таким образом, будет вычислено выражение

$$c_{11} + a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21},$$

которое представляет собой элемент d_{11} матрицы D,

$$d_{11} = c_{11} + a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}. (3.5)$$

Продолжение этого процесса будет давать через каждые три такта элементы матрицы D на выходах функциональных устройств, соответствующих верхней границе систолического массива. При этом на каждом выходе будут появляться элементы одной и той же диагонали.

Нетрудно видеть, что загруженность систолических ячеек функционального устройства равна 1/3.

Возникают следующие вопросы.

- Какова роль выбранной формы (правильный шестиугольник) систолических ячеек?
- Обязательно ли для решения данной задачи систолический массив должен иметь вид, представленный в нашем описании?
 - С чем связано указанное выше упорядочение данных?
- Чем объясняется сравнительно низкая загруженность функциональных устройств?
- Для каких алгоритмов можно строить систолические массивы?
- Полезно ли рассматривать пространственные аналоги систолических массивов?
- Возможно ли разработать общую методику отображения алгоритмов на систолические массивы?

Нами рассмотрен лишь один пример систолического массива для решения конкретной задачи. К настоящему времени разработано много систолических массивов в основном для решения матрично-векторных задач.

3.2. Исходные предположения. Принцип близкодействия

В дальнейшем будем придерживаться использованной ранее схемы:

— не будем (как правило) принимать во внимание смысловое содержание операций, выполняемых функциональным устройством;

- ограничимся анализом лишь некоторых характеристик систолических массивов;
 - будем рассматривать довольно ограниченный круг задач.

Итак, будем предполагать, что:

- систолические ячейки представляют собой простые или конвейерные функциональные устройства;
- входы и выходы соседних систолических ячеек всегда соединены непосредственно (без использования коммутаторов или устройств передачи данных);
- вся совокупность систолических ячеек работает в общем синхронном режиме, тем самым систолический массив является безусловным конвейерным вычислителем, таким образом, применима вся теория безусловных конвейерных вычислителей;
- загрузка систолического массива может осуществляться нестандартным образом.

Из сказанного не следует, что систолические массивы не нужно изучать. Специфические особенности этих вычислителей находят отражение в соответствующих дополнениях к теории конвейерных вычислителей и соответственно — в изображающих их графах.

Наиболее характерными особенностями систолических массивов являются:

- однообразие их элементов (систолических ячеек);
- отсутствие дополнительных линий связей;
- организация передачи данных в соответствии с геометрическим расположением их элементов (передача данных возможна лишь между инцидентными элементами).

Последнее выделяют особо, называя такую организацию передачи данных "принципом близкодействия".

Плотное расположение элементов систолического массива порождает разбиение некоторой области (на плоскости или в пространстве) на подобласти, которые будем считать гомеоморфными кругу или шару (соответственно) и будем называть клетками. Граф получаемой таким образом вычислительной системы (систолического массива) тесно связан с упомянутым подразделением и определяется им в большой степени. Различные варианты вычислительных систем могут быть получены размещением элементов на различных поверхностях, например, на сфере или на торе.

Определение 3.3. Граф называется *двумерным*, если он размещен на некоторой двумерной поверхности, и никакие его ребра

(дуги) не имеют общих точек, кроме разве лишь концевых.

Двумерный граф называется *плоским*, если он размещен на плоскости. Граф называется *планарным*, если он изоморфен некоторому плоскому графу.

3.3. *Клеточные подразделения. Характеристика Эйлера*

Введем понятия трехмерных, двумерных, одномерных и нульмерных клеток.

Определение 3.4. Трехмерной клеткой называется множество в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , гомеоморфное открытому шару (в \mathbb{R}^3). Двумерной клеткой называется множество в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , гомеоморфное открытому кругу (в \mathbb{R}^2). Одномерной клеткой назовается множество (евклидова пространства \mathbb{R}^3), гомеоморфное конечному открытому интервалу в \mathbb{R}^1 . Нульмерной клеткой назовем точку.

Замечание. Из определения видно, что клетками могут быть и неограниченные множества, например, множество

$$\mathbb{R}^{1}_{+} \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x > 0\}$$

является одномерной клеткой, ибо существует взаимно однозначное и непрерывное (в обе стороны) отображение между \mathbb{R}^1_+ и открытым конечным интервалом $(0, \pi/2)$, а именно $y = \operatorname{arctg} x : \mathbb{R}^1_+ \longmapsto (0, \pi/2)$.

Определение 3.5. Подразделение некоторого множества $G \in \mathbb{R}^3$ называется (правильным) клеточным подразделением на G, если G представлено в виде объединения непересекающихся клеток, причем граница трехмерных клеток состоит из клеток более низкой размерности (например, размерностей 2,1,0), граница двумерных клеток состоит из клеток размерностей 1 и 0, а граница одномерных клеток состоит из клеток размерности 0 (они также называются вершинами подразделения).

Для правильных клеточных подразделений справедлива формула Эйлера

$$\chi(G) = \sum_{k=0}^{3} (-1)^k \alpha_k, \tag{3.6}$$

где

 α_0 — число нульмерных клеток (вершин),

 α_1 — число одномерных клеток,

 α_2 — число двумерных клеток,

 α_3 — число трехмерных клеток.

Число $\chi(G)$ называется характеристикой Эйлера, оно не зависит от рассматриваемого правильного клеточного подразделения на G.

Заметим, что если G — двумерное множество, то очевидно, что $\alpha_3=0,$ и (3.6) принимает вид

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \chi(G). \tag{3.7}$$

Рассмотрим двумерную сферу S^2 и ее разбиение на треугольники, вырезаемые координатными октантами (рис. 19).

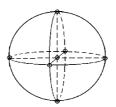


Рис. 19. Триангулированная сфера.

Очевидно, что получается правильное клеточное подразделение при

$$\alpha_0 = 6, \quad \alpha_1 = 12, \quad \alpha_2 = 8.$$
 (3.8)

Согласно формуле (3.7) находим

$$\chi(S^2) = 2. \tag{3.9}$$

Поскольку число (3.9) не меняется с изменением клеточного подразделения сферы, то для любого правильного клеточного подразделения сферы S^2 справедлива формула

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2. \tag{3.10}$$

Обратимся к трехмерному случаю. Проиллюстрируем его на примере клеточного подразделения шара B^3 (рис. 19).

Очевидно, к числу нульмерных клеток подразделения сферы следует добавить 1 (ибо добавляется вершина 0), к числу одномерных клеток нужно добавить 6 (шесть отрезков — радиусов шара, исходящих из точки 0), к числу двумерных клеток следует добавить 12 (двенадцать криволинейных треугольников, соответствующих координатным плоскостям); наконец, появляется 8 трехмерных клеток.

Итак, обозначая $\overline{\alpha}_k$ число k-мерных клеток нашего подразделения шара B^3 , имеем

$$\overline{\alpha}_0 = 7$$
, $\overline{\alpha}_1 = 18$, $\overline{\alpha}_2 = 20$, $\overline{\alpha}_3 = 8$.

Теперь по формуле (3.6) найдем эйлерову характеристику шара B^3 ,

$$\chi(B^3) = 1. (3.11)$$

Поскольку число клеток размерности k не меняется при гомеоморфных преобразованиях, то полученный результат справедлив в общем случае, а именно: каково бы ни было конечное множество G, гомеоморфное трехмерному шару для его правильного клеточного подразделения, справедлива формула

$$\overline{\alpha}_0 - \overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 - \overline{\alpha}_3 = 1, \tag{3.12}$$

где $\overline{\alpha}_k$ — число k-мерных клеток рассматриваемого подразделения.

Аналогичные формулы можно получить для правильного клеточного подразделения тела, ограниченного поверхностью тора и т. п.

Иногда удобно следующее утверждение.

Теорема 3.1. Эйлерова характеристика конечного трехмерного тела равна половине эйлеровой характеристике ограничивающей его поверхности. В частности, мы видели, что $\chi(B^3) = \chi(S^2)/2$.

Заметим, что двумерное подразделение порождает двумерный граф, состоящий из одномерных клеток (ребер) и нульмерных клеток (вершин).

Кроме того, объявляя двумерные клетки вершинами и считая смежные клетки смежными вершинами, получим граф, который будем называть сопряженным графом подразделения.

3.4. Систолические массивы и регулярные графы

Возвращаясь к построению систолических массивов, теперь можем размещать систолические элементы в клетках подразделения.

Теорема 3.2. Пусть имеется клеточное подразделение и каждая клетка представляет собой многоугольник на плоскости. Предположим, что систолические элементы заполняют некоторые из этих клеток и в полученном систолическом массиве реализуется принцип близкодействия. Тогда граф систолического массива является плоским.

Доказательство сводится к построению некоторого подграфа, сопряженного к подразделению так, что такой граф также плоский.

Замечание. Стремление к экономному использованию отводимого места и к более компактному размещению систолического массива приводит к покрытию данной области систолическими элементами без пропусков, а это ведет к разработке таких (обычно многоугольных) форм этих элементов, чтобы отводимая область могла быть ими полностью покрыта. Это обычно шестиугольные, прямоугольные или треугольные элементы. Требования их стандартизации приводят к определенной правильности их формы и периодичности в их расположении. Математическое исследование возможных форм и плотного расположения фигур привело к развитию теории покрытий и упаковок.

Систолические массивы как вычислительные системы имеют следующие особенности:

- систолический массив состоит из однотипных функциональных устройств;
- каждое функциональное устройство связано только с соседними;
- за каждый такт каждое функциональное устройство принимает данные, выполняет операцию и отсылает результаты;
- систолический массив принимает входные данные и выдает результаты только через граничные систолические ячейки;
- передача любой информации происходит на фоне выполнения операций.

Для более глубокой характеристики систолических массивов обратимся к регулярным графам.

Определение 3.6. Решетчатый граф называется регуляр-

ным, если его вершинами являются векторы с целочисленными координатами, и из каждой вершины исходит пучек дуг, получаемый параллельным переносом совокупности векторов f_1, \ldots, f_r . Эта совокупность векторов называется базовой, а сами векторы — базовыми; соответствующий граф обозначаем $G(f_1, \ldots, f_r)$.

Теорема 3.3. Пусть векторы $f_1, \ldots, f_l, l \leq r$, линейно независимы и все базовые векторы f_1, \ldots, f_r выражаются через них в виде линейных комбинаций с целочисленными коэффициентами. Тогда на прямой с направляющим вектором, равным одному из базовых векторов, либо нет вершин регулярного графа $G(f_1, \ldots, f_r)$, либо все попадающие на нее вершины связаны одним путем.

Доказательство этой теоремы приводить не будем.

Следствие 3.1. Если граф алгоритма регулярный, то его проекция на гиперплоскость, перпендикулярную одному из базовых векторов, дает граф вычислительной системы, на которой реализуется весь спектр программ для данного алгоритма, в том числе и программы с минимально возможным временем. При этом граф вычислительной системы также регулярен.

Доказательство вытекает из теоремы 7.2 главы 3.

Наиболее важная специфика систолического массива состоит в том, что это конвейерный вычислитель с регулярным графом. Иногда это утверждение кладется в основу определения систолического массива.

Заметим, что систолические массивы могут быть эффективны в основном для реализации алгоритмов с регулярными графами.

Остановимся теперь на вопросе рассылки данных к функциональным устройствам систолического массива.

Имеется два основных способа передачи данных в систолическом массиве от одного функционального устройства к другому.

Если то или иное данное необходимо одновременно ряду функциональных устройств, то применяется шинная связь; эта связь требует специальной организации. Однако такой способ связи в систолических массивах применяют редко, и обычно он применяется для подачи исходных данных и для снятия результатов вычислений.

Второй способ — транспортная связь. Она является основной для систолических массивов и состоит в том, что для передачи данных от одного функционального устройства к другому, не являющихся соседями, применяется цепочка функциональных устройств,

где каждые два последовательных звена представляют собой соседние функциональные устройства. Данные по этой цепочке передаются каждым из составляющих ее функциональных устройств без изменения.

Итак, если в параллельной форме алгоритма данные передаются внутри того или иного яруса, то нужна шинная связь, а если от яруса к ярусу — то следует использовать транспортную связь.

§ 4. Об архитектуре параллельных суперкомпьютеров

4.1. О наиболее мощных современных компьютерах

Потребности решения задач математической физики, обработки больших потоков информации и работы с большими базами данных привели к созданию компьютерных систем, мощности которых поражают воображение. Постоянно обновляемый список ТОР500 содержит перечень наиболее мощных современных компьютеров (его можно увидеть в Интернете по адресу www.top500.org); в этом списке компьютеры располагаются в порядке убывания их мощности. Конечно, "мощность" — понятие условное; она определяется с помощью общепринятых специальных тестов, которые позволяют охарактеризовать различные параметры компьютера, и не всегда объективно отражают его свойства при решении той или иной конкретной задачи.

Приведем наиболее впечатляющие примеры суперкомпьютеров и некоторые их параметры.

Векторно-конвейерный суперкомпьютер CRAY Т932 имеет 32 процессора, каждый с быстродействием 2 миллиарда операций в секунду 8 гигабайт оперативной памяти, 256 терабайт дискового пространства.

Компьютер Т3Е1200 фирмы SGI имеет максимальную производительность 891.500.000.000 операций в секунду на пакете LINPACK и содержит 1080 процессоров; пиковая производительность компьютера равна 1.296.000.000.000 операций в секунду.

Компьютер ASCI Red фирмы Intel имеет максимальную производительность 1.338.000.000.000 операций в секунду на пакете LINPACK и содержит 9152 процессора; пиковая производительность компьютера достигает 1.830.400.000.000 операций в секунду. Компьютер Earth Simulator фирмы NEC имеет максимальную производительность 35.860.000.000.000 операций в секунду на пакете LINPACK и содержит 5120 процессоров; пиковая производительность компьютера достигает 40.960.000.000.000 операций в секунду.

Наконец, наиболее мощный современный компьютер Blue Gene /L фирмы IBM имеет максимальную производительность 280.600.000.000.000 операций в секунду на пакете LINPACK и содержит 131.072 процессора (см. 29-ю редакцию списка TOP500).

4.2. О сложных вычислительных задачах

Как было упомянуто в предыдущем пункте, многие вычислительные задачи требуют использования суперкомпьютеров; приведем примеры таких задач.

Разведка и добыча полезных ископаемых постоянно приводит к такого рода задачам. Для того чтобы разведка и добыча их проводилась наиболее эффективным и дешевым образом, помимо ряда других задач нужно решать начально-краевые задачи для сложных систем уравнений в частных производных.

Предположим, что требуется решить задачу о добыче нефти из пласта, причем технология предусматривает бурение нескольких десятков скважин; через одни скважины выкачивается нефть, а через другие закачивается вода для создания нужного давления и предупреждения обрушения пласта из-за возникающих пустот. Предполагаем, что областью является прямоугольный параллелепипед и что для достижения необходимой точности по каждому направлению нужно следить за сотней отсчетов, приходим к выводу, что необходимо рассмотреть внутри упомянутого параллелепипеда 10^6 точек, в каждой из которых определить от 5 до 25 функций: компоненты скорости, давление, концентрацию компонент воды, газа и нефти и т.п. Для отыскания каждой функции в той или иной точке требуется от 200 до 2000 арифметических действий. Для отслеживания поведения во времени указанных функций нужно сделать несколько тысяч шагов по времени. Итак, придется сделать порядка $10^6 \cdot 15 \cdot 1000 \cdot 1000 = 15 \cdot 10^{12}$ арифметических операций. Это соответствует быстродействию мощного суперкомпьютера.

Заметим также, что в приведенном примере мы ограничились всего сотней отсчетов по каждому направлению, что, скорее всего, не даст той точности, которая необходима на практике; кроме того, мы не приняли во внимание то обстоятельство, что из-за постоян-

ного уточнения исходных данных может понадобится значительное количество подобных расчетов. Кроме того, изменение параметров задачи может увеличить количество необходимых действий в тысячи раз.

Подобные (и на много более сложные) задачи нетрудно представить себе в других областях геологии, а также в метеорологии, в картографии, в астрофизике, при решении задач экологии и, конечно, в военном деле.

Перечень решаемых с помощью суперкомпьютеров проблем легко угадывается по списку учреждений, которые приобрели эти весьма дорогие устройства: Стратегические лаборатории Sandia (США), Ведомство метеорологии в Великобритании, Центр Полетов NASA (США), Центр вычислительной физики (Япония), Лаборатории в Беркли (США), Океанографическое ведомство (США), Служба атмосферы (Канада) и т.д.

4.3. Виды обработки данных

В обработке данных условно можно различать два вида обработки:

- параллельная обработка;
- конвейерная обработка.

Оба вида обработки рассматривались нами ранее.

Как нам известно, идея параллельной обработки состоит в том, чтобы организовать независимую систему процессоров, которые могут одновременно и независимо обрабатывать данный алгоритм.

Эта идея не для всех алгоритмов достаточно эффективна: имеются алгоритмы, которые практически не поддаются распараллеливанию.

Предположим, доля операций, которые нужно выполнять последовательно, равна f, где $0 \le f \le 1$. В частности, при f=0 программа полностью распараллеливается, а при f=1 программа не распараллеливается. Тогда ускорение S, которое можно получить на компьютере, содержащем p процессоров, оценивается неравенством

$$S \le \frac{1}{f + (1 - f)/p}. (4.1)$$

Неравенство (4.1) принято называть законом Амдала. Из этого неравенства следует, что если доля последовательных операций велика, то на значительное ускорение не приходится рассчитывать.

Другая идея состоит в следующем: стремясь максимально загрузить оборудование, приходят к идее конвейерной обработки. Для этого принимают во внимание возможность мысленно раздробить оборудование и программу на мелкие единицы и совместить их так, чтобы единица оборудования обрабатывала соответствующую единицу программы, и чтобы все такие обработки проводились одновременно. Такой подход позволяет минимизировать простои, но он требует специального оборудования — так называемых конвейерных функциональных устройств; последние, как нам известно, можно моделировать последовательно соединенными простыми функциональными устройствами.

Заметим, что само понятие конвейерной обработки весьма относительно. Действительно, переход от последовательной обработки к конвейерной выглядит следующим образом.

Первоначально поток данных разбит на некоторые порции, каждая из которых может обрабатываться некоторым функциональным устройством: на его вход подается упомянутая порция данных, и до окончания обработки этой порции следующая порция данных не может обрабатываться. На некотором этапе изучения этого процесса выясняется, что рассматриваемые порции данных в нашем функциональном устройстве проходят сложную обработку, при которой часть оборудования функционального устройства простаивает. В таком случае имеет смысл представить порцию данных в виде конечной последовательности более мелких порций, а функциональное устройство "раздробить" на более мелкие функциональные устройства с тем, чтобы процесс обработки вести более мелкими порциями на указанной последовательности мелких функциональных устройств. В результате загруженность исходного функционального устройства возрастает, ибо нет необходимости ждать, пока закончится обработка исходной порции, чтобы приступить к обработке следующей. Исходное функциональное устройство, разбитое указанным образом на более мелкие функциональные устройства, называется теперь "конвейерным функциональным устройством", а исходный поток работ, разбитый на мелкие порции, подвергается теперь "конвейерной обработке". Однако нетрудно видеть, что дальнейшим усовершенствованием алгоритма было бы его дальнейшее измельчение с тем, чтобы попытаться выделить в полученных ранее мелких функциональных устройствах простаивающие части и загрузить их способом, описанным выше.

Конечно, при реализации изложенной схемы на самом деле приходится как отыскивать подходящий новый алгоритм, так и конструировать вместо исходного функционального устройства новое устройство, но уже конвейерного типа.

4.4. Об истории развития параллелелизма

Идея распараллеливания вычислений — весьма давняя идея. Она появилась еще в начале XX века — на заре автоматизации вычислений при появлении первых многоразрядных сумматоров (в арифмометрах, в суммирующих механических и электрических устройствах); именно в многоразрядных сумматорах при одном акте сложения параллельно обрабатываются цифры всех разрядов. На упомянутых устройствах нетрудно усмотреть параллелизм и при проведении других арифметических операций. Такой параллелизм наблюдается в работе любых (в том числе и электронных) арифметических процессоров дискретного действия, оперирующих с числами в позиционных системах счисления (как правило, это — двоичная система).

Разрядно-параллельная память и разрядно-параллельная арифметика появились в 1953 году (IBM701), а конвейерный способ выполнения команд применен в 1963 году на ЭВМ ATLAS.

На компьютере CDC 6600 были применены независимые функциональные устройства (время такта 100 нс, производительность 2–3 миллиона операций в секунду, цикл памяти 1 мкс, 10 независимых функциональный устройств).

В 1974 году появляются матричные процессоры (ILLIAC IY): в проекте было заложено 256 процессорных элементов, управляющим устройством служила небольшая ЭВМ, которая управляла матрицей упомянутых элементов, сеть рассылки представляла собой двумерный тор, такт имел длительность 80 нс, производительность составляла 50 миллионов операций в секунду.

Наконец, отметим появление векторно-конвейерных процессоров (CRAY-1) со временем такта 12.5 нс, с пиковой производительностью 160 миллионов операций в секунду, с оперативной памятью в один миллион 64-разрядных слов, с 12 конвейерными функциональными устройствами.

Последние годы отмечены быстрым развитием параллелизма в суперкомпьютерах, что привело к значительному увеличению числа процессоров (до десятков и сотен тысяч) и к увеличению быстродействия (до сотен триллионов операций в секунду с плавающей точкой). Как упоминалось выше (см. также 29-ю редакцию списка TOP500), примерами таких суперкомпьютеров являются компьютер Earth Simulator с производительностью 35.8 Tflops и компьютер Blue Gene /L с производительностью 280.6 Tflops (напомним, что 1 Tflops равен одному триллиону операций в секунду с плавающей точкой).

4.5. Об архитектуре векторно-конвейерной супер-ЭВМ CRAY C90

Общая структура компьютера

ЭВМ СКАУ С90 представляет собой векторно-конвейерный компьютер, в максимальной конфигурации он содержит 16 процессоров над общей памятью со временем такта 4.1 нс, его тактовая частота 250 МГц, пиковая производительность 10^9 операций в секунду.

Разделяемые ресурсы процессора

Оперативная память компьютера разделена на 8 секций, каждая секция разделена на 8 подсекций, подсекция содержит 16 банков 80-разрядных слов, каждое из которых состоит из 64 разрядов данных и 16 разрядов коррекции ошибок. При одновременном обращении к одной секции происходит задержка в 1 такт, при одновременном обращении к одной подсекции — задержка от 1 до 6 тактов. Для ввода/вывода имеется три типа каналов: низкоскоростные — 6 мегабайт в секунду, высокоскоростные — 200 мегабайт в секунду, сверхскоростные — 1800 мегабайт в секунду.

Межспроцессорное взаимодействие

Регистры и семафоры компьютера разбиты на группы (кластеры): кластер из восьми адресных тридцатидвухразрядных регистров, кластер из восьми скалярных шестидесятичетырехразрядных регистров, кластер из 32 однобитовых семафоров.

Вычислительная секция процессора

Вычислительная секция процессора включает регистры, функциональные устройства и коммуникационную сеть, причем возможна обработка трех типов данных: адресов (А-регистры и В-регистры), скаляров (S-регистры и Т-регистры), векторов (V-регистры).

Каждый процессор имеет три набора основных регистров (A-,S-,V-регистры), которые связаны с памятью и с функциональными устройствами.

Адресные А-регистры — 32-разрядные, их 8 штук, они служат для хранения и вычисления адресов, указания величин сдвигов и т.п.; кроме того, имеются 64 штуки адресных В-регистров.

Скалярные S-регистры в количестве 8 штук имеют 64 разряда и служат для хранения аргументов и результатов скалярной арифметики; аналогичны скалярные T-регистры, которых имеется 64 штуки.

Векторные V-регистры в количестве 8 штук на 128 слов длины 64 разряда каждое; эти регистры служат для выполнения векторных команд.

Кроме того, имеются два адресных функциональных устройства для целочисленных сложения, вычитания и умножения адресов, имеются четыре скалярных функциональных устройства для целочисленных сложения, вычитания, логических поразрядных операций и сдвига, имеются от 5 до 7 векторных функциональных устройств, предназначенных только для векторных команд и производящих целочисленные сложение и вычитание, сдвиг, логические операции, умножение битовых матриц; имеется также 3 функциональных устройства для работы с плавающей точкой и производящие сложение, вычитание, умножение и отыскание обратной величины. Последние функциональные устройства предназначены как для векторных, так и для скалярных команд. Заметим, что все функциональные устройства конвейерные, они имеют разное число ступеней конвейера, но каждая ступень срабатывает за один такт, так что при полной загрузке устройства оно может выдавать результат каждый такт.

Секция управления процессора

Команды выбираются из оперативной памяти блоками и заносятся в буфера команд, откуда они затем выбираются для исполнения; если необходимой команды нет в буферах, то происходит выборка очередного блока.

Команды имеют различный формат и могут занимать 1 пакет (16 разрядов), 2 пакета или 3 пакета (поскольку в одном слове 64 разряда, то в нем может содержаться 4 пакета). Максимальная длина программы для CRAY C90 равна одному гигаслову (10^9 бит).

Зацепление векторных устройств

Архитектура CRAY C90 позволяет регистр результатов векторной операции использовать как вход следующей векторной операции, что приводит к зацеплению векторных устройств. Глубина зацепления не ограничивается. Заметим, что перед тем, как векторная операция начинает выдавать результаты, проходит некоторое время, связанное с заполнением конвейера и с подкачкой аргументов: чем больше длина вектора, тем меньше сказывается этот период на времени выполнения программы.

Глава 8. О ТЕХНОЛОГИИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ ОРЕN MP

§ 1. Трудности перехода от последовательных программ к параллельным

Исторически сложилось так, что при численном решении задач пользователи пишут программы на последовательном языке. Если оказалось, что без распараллеливания та или иная программа работает не эффективно, то ее можно попытаться распараллелить с тем, чтобы запустить задачу на параллельной системе. Кроме того, для многих пользователей психологически удобнее программирование начинать с последовательной программы. Поэтому естественно задаться вопросом о возможности автоматического распараллеливания программ транслятором. Однако, решение задачи распараллеливания данной программы достаточно сложно.

Для распараллеливания программы требуется:

- 1) найти участки программы, где распараллеливание возможно.
 - 2) распределить эти участки по вычислительным модулям,
 - 3) обеспечить вычисления правильной синхронизацией.

Особенно трудно выполнить эти требования в случае системы с распределенной памятью. Но даже для системы с разделяемой памятью это достаточно сложно сделать автоматически.

Об этом свидетельствует следующий простой пример.

Задача 1. Пусть имеется фрагмент программы (назовем его фрагмент (А)), состоящий из трех строк:

Вопрос заключается в следующем: какие итерации в этой конструкции независимы и можно ли ее распараллелить?

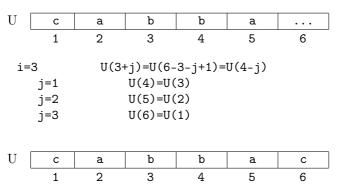
Попытаемся заменить фрагмент (А) фрагментом (В) вида

считая, что внутренние циклы 20 и 30 исполняются на двух параллельно работающих вычислительных модулях.

Можно ли рассматривать эту программу как распараллеливание внутреннего цикла в предыдущей программе?

Для ответа на поставленный вопрос проведем исследование предлагаемых фрагментов моделированием их исполнения. Ограничимся случаем n=3, предполагая, что массив $\,$ U(6) ранее был инициализирован в рассматриваемой программе в соответствии со следующей схемой (многоточие означает, что значения соответствующих элементов массива для дальнейшего несущественны):

1. Сначала рассмотрим работу программного фрагмента (A), демонстрируя результат работы каждой итерации внешнего цикла в виде схемы заполнения массива U.



2. Переходя к демонстрации работы фрагмента (В), повторим его для удобства дальнейших рассмотрений:

Исходя из первоначального состояния массива U

U	С		b1	b	a	
	1	2	3	4	5	6

при работе фрагмента (В) получаем последовательно

На первый взгляд кажется, что результаты работы программного фрагмента (А) и результатов его распараллеливания идентичны.

Заметим, однако, что в данном случае рассмотрен лишь один из восьми возможных при распараллеливании вариантов работы параллельной системы: порядок исполнения внутренних циклов 20 и 30 параллельными модулями предсказать нельзя (этот порядок зависит от работы оборудования и распределения работы имеющегося программного окружения); поэтому для вывода о возможности замены фрагмента (А) распараллеливанием фрагмента (В), необходимо, кроме того, убедиться в совпадении результатов работы каждого из возможных при распараллеливании вариантов обработки фрагмента (В).

3. Следующий вариант обработки (сводящийся к перестановке порядка исполнения внутренних циклов 20 и 30 параллельными модулями лишь на первой итерации внешнего цикла) дает результат, отличный от результата работы фрагмента (А). Действительно, обрабатывая исходный массив U,

133

Итак, полученный здесь результат отличается от результата работы исходного фрагмента (A). Это показывает невозможность замены фрагмента (A) указанным выше распараллеливанием фрагмента (B).

Вывод: Результат работы фрагмента (В) зависит от последовательности срабатыватывания вложенных циклов, поэтому без использования дополнительных средств синхронизации вычислений предложенный вариант распараллеливания применять нельзя.

Рассмотрим теперь следующий фрагмент программы:

где Funct — функция пользователя. Для того, чтобы ответить на вопрос, являются ли итерации цикла независимыми, нужно определить:

- 1) используются ли значения массива U в теле функции Funct, и если нет, то:
- 2) нет ли там вызовов процедур или функций, прямо или косвенно использующих массив U.

В некоторых случаях такая проверка исключительно сложна, особенно в случаях, когда разные части массива используются в разных аспектах: одни для чтения, другие — для присваивания. В таких случаях ответить на поставленный вопрос возможно лишь в процессе исполнения.

Для эффективного анализа ситуации компилятору нужны "подсказки", которые могут выражаться различным образом:

- 1) специальными директивами,
- 2) новыми языковыми конструкциями,
- 3) специальными библиотечными процедурами.

§ 2. Введение в технологию Open MP

В технологии Open MP за основу берется последовательная программа. Для созания параллельной версии пользователю представляются наборы:

- 1) директив,
- 2) процедур,
- 3) переменных окружения.

Стандарт Open MP разработан для языков Fortran и C (Fortran 77, 90, 95 и C, C++) и поддерживается производителями всех больших параллельных систем. Реализации стандарта доступны в UNIX и в среде Windows NT.

Конструкции Open MP в различных языках мало отличаются, поэтому ограничимся языком Fortran.

Распараллеливание программы состоит в том, чтобы весь текст разбить на последовательные и параллельные области.

В начальный момент порождается нить-мастер (или основная нить), которая начинает выполнение программы со стартовой точки. Основная нить и только она исполняет все последовательные области секции программы.

Для поддержки параллелизма используется схема FORK/JOIN.

При входе в параллельную область основная нить порождает дополнительные нити (выполняется операция FORK). После порождения дополнительные нити нумеруются последовательными натуральными числами, причем основная нить имеет номер 0; таким образом, каждая нить получает свой уникальный номер. Все порожденные нити выполняют одну и ту же программу, соответствующую параллельной области. При выходе из параллельной области основная нить дожидается завершения работы остальных нитей (выполняется операция JOIN), и дальнейшее выполнение программы осуществляется основной нитью.

В параллельной области все переменные в программе делятся на два класса:

- 1) общие (shared разделяемые);
- 2) локальные (private собственные).

Общие переменные существуют в одном экземпляре для всей программы и под одним и тем же именем доступны всем нитям.

Объявление локальной переменной приводит к порождению многих экземпляров (по числу нитей) этой переменной под этим именем — по одному собственному экземпляру для каждой нити. Изменение какой-либо нитью значения своего экземпляра локальной переменной никак не влияет на изменение значений экземпляров этой переменной в других нитях.

Понятия областей программы и классов переменных вместе с порождением (расщеплением) и уничтожением (соединением) нитей определяют общую идею написания программы с использованием технологии Open MP.

§ 3. Директивы Open MP. Описание параллельных областей

Все директивы Open MP располагаются в комментариях и начинаются с одной из следующих комбинаций !\$0MP, C\$0MP или *\$0MP (по правилам языка Fortran строки, начинающиеся с символов !,С или *, означают комментарии).

Все переменные окружения и функции, реализующие стандарт Ореп MP, начинаются с префикса OMP_.

Описание параллельных областей: для такого описания используются две директивы

!\$OMP PARALLEL < параллельная область программы > !\$OMP END PARALLEL

Для выполнения фрагмента программы, расположенного между данными директивами, основная нить порождает нити в количестве OMP_NUM_THREADS—1, где OMP_NUM_THREADS— переменная окружения, значение которой пользователь задаёт перед запуском программы. Все порожденные нити исполняют программу, находящуюся между указанными директивами.

На директиве !\$ OMP END PARALLEL происходит неявная синхронизация нитей: сначала все нити достигают директиву !\$ OMP END PARALLEL, и лишь после этого происходит слияние всех нитей в основную нить, которая и продолжает процесс.

§ 4. Параллельные секции и их вложенность

В параллельной области каждой имеющейся нитью может быть порождена параллельная секция (порождение нитью параллельных нитей) и последующее их соединение (с сохранением главенства порождающей нити). Число нитей в параллельной секции можно задавать с помощью функции OMP_SET_NUM_THREADS, которая устанавливает значение переменной OMP_NUM_THREADS (при этом значения переменной OMP_DYNAMIC должно быть установлено в 1 с помощью функции OMP_SET_DYNAMIC).

Стратегию обработки вложенных секций можно менять с помощью функции OMP_SET_NESTED.

Необходимость порождения нитей и параллельного исполнения может определяться динамически в ходе исполнения программы с помощью условия IF:

!\$OMP PARALLEL IF (< условие >).

Если < условие > не выполнено, то директива не выполняется и программа обрабатывается в прежнем режиме.

§ 5. Распределение работы. Программирование на низком уровне

Распределение работы в Open MP можно проводить следующими способами:

- 1) программировать на низком уровне;
- 2) использовать директиву !\$0MP DO для параллельного выполнения циклов;
- 3) использовать директиву !\$0MP SECTIONS для параллельного выполнения независимых фрагментов программы;
- 4) применить директиву !\$0MP SINGLE для однократного выполнения участка программы.

Программирование на низком уровне предусматривает распределение работы с использованием функций

!\$OMP MP_GET_THREAD_NUM,

 $!$OMP OMP_GET_NUM_THREADS$, которые позволяют определять номер данной нити и общее число нитей.

Программа может составляться по схеме

Часть программы между зарезервированными словами THEN и ELSE будет выполняться только нитью с номером 3, а все остальные нити будут выполнять программу между и ELSE и ENDIF.

§ 6. Выполнение операторов цикла

Если в параллельной секции встретился оператор цикла без дополнительных указаний, то он будет выполнен всеми нитями, т.е. каждая нить выполнит все операции данного цикла (заметим, что переменные там могут иметь тип PRIVATE и тогда это — собственность данной нити).

Для распределения итераций между нитями используется директива $\tt !\$OMP = DO$

Данная директива относится к оператору DO, находящимуся между заголовком и хвостовиной директивы (здесь и далее квадратные скобки включают необязательные параметры); в качестве опции может быть использована опция SCHEDULE, которая определяет конкретный способ распределения итераций цикла по нитям; параметрами опции SCHEDULE являются следующие:

- 1) STATIC [,m] блочно-циклическое распределение итераций (квадраратные скобки означают, что содержимое не обязательно); первый блок из m итераций выполняет первая нить, второй блок из m итераций вторая и т.д., а затем распределение начинается снова с первой нити. Если значение m не указано, то множество итераций делится на (непрерывные) куски одинакового размера по числу нитей.
- 2) DYNAMIC [,m] динамическое распределение итераций с фиксированным размером блока: сначала все нити получают порции по m итераций, а затем каждая нить, заканчивающая свою работу получает порцию, содержащую m итераций. Если значение m не указано, то оно принимается равным единице.
- 3) GUIDED [,m] динамическое распределение итераций блоками уменьшающегося размера: сначала блоки берутся максимальных размеров (определяемых реализацией Open MP), а затем эти размеры уменьшаются до тех пор, пока не достигнут значения m (m — минимальный размер блока). Если значение m не указано, оно принимается равным единице.

4) RUNTIME — способ распределения итераций цикла определяется в процессе работы программы в зависимости от значения переменной OMP_SCHEDULE, задаваемой пользователем.

Пример строки для распределения итераций

```
!$OMP DO SCHEDULE (DYNAMIC, 10)
```

Здесь будет использоваться динамическое распределение итераций блоками по 10 итераций.

В конце параллельного цикла происходит неявная барьерная синхронизация: дальнейшее выполнение параллельно работающих нитей начнется только тогда, когда все нити достигнут конца цикла (даже если директива !\$OMP END DO отсутствует).

Если в синхонизации нет необходимости, то завершающей дерективой должна быть

```
!$OMP END DO NOWAIT
```

Она позволяет продолжить выполнение программы каждой нити без синхронизации с остальными.

При организации параллельных циклов должны быть выполнены естественные ограничения:

- 1) работа любой нити не должна зависить от работы остальных нитей.
 - 2) не должно быть побочных выходов из цикла.

Например, пусть в параллельной секции программы встречается фрагмент

Здесь внешний цикл объявлен параллельным, причем указано блочно-циклическое распределение итераций по две итерации в блоке. По отношению к внутреннему циклу никаких указаний нет, так что он будет выполняться (последовательно) каждой нитью.

§ 7. Параллелизм независимых фрагментов

Параллелизм независимых фрагментов выполняется парой директив SECTIONS, END SECTIONS и директивами SECTION, расположенными внутри упомянутой пары.

Структура программы такова:

Такая структура показывает, что фрагменты 1,2,3 можно выполнять параллельно. Каждый из перечисленных фрагментов будет выполняться какой-либо нитью; номера нитей, которые будут использованы, определяются авторами реализации Ореп МР и генерацией системы (для пользователя они представляются случайными). В конце данной конструкции производится неявная синхронизация работы нитей; если в синхронизации нет необходимости, вместо !\$ОМР END SECTIONS должна использоваться директива !\$ОМР END SECTIONS NOWAIT.

Если в параллельной секции какой-либо участок программы должен быть выполнен лишь одной нитью, то его следует поставить между директивами !\$0MP SINGLE и !\$0MP END SINGLE. Чаще всего необходимость в однократном выполнении возникает при работе с общими переменными. Упомянутый участок программы в таком случае будет выполнен одной нитью (выбор нити определяется реализацией).

В конце участка производится неявная синхронизация всех нитей (все нити проводят вычисления до директивы, определяющей конец участка !\$OMP END SINGLE в имеющейся последовательности строк программы). Если синхронизация не требуется, весто !\$OMP END SINGLE следует использовать директиву !\$OMP END SINGLE NOWAIT.

§ 8. Классы переменных

Все переменные, используемые в параллельной области, могут быть либо общими, либо локальными. Общие переменные описываются директивой SHARED (разделяемые), а локальные — директивой PRIVATE (собственные). Общие переменные присутствуют в одном экземпляре и доступны каждой нити данной секции под одним именем, а локальные существуют в числе экземпляров, равном числу нитей: в каждой нити свой экземпляр, и этот экземпляр доступен только одной нити — той, которой он принадлежит. Для иллюстрации работы переменных различного типа приведем следующий пример.

I=OMP_GET_THREAD_NUM ()
PRINT*, I

Предположим, что ранее переменная I была описана как PRIVATE. Если не используется никаких конструкций, которые специализируют выполнение написанного фрагмента, то в результате будут отпечатаны числа от 0 до ОМР_NUM_THREADS-1, причем каждое из этих чисел будет отпечатано один раз, но порядок их следования на листинге предсказать нельзя (он зависит от программы и от реализации Open MP). Если же переменная I описана, как SHARED, то отпечатается ОМР_NUM_THREADS чисел из множества {0,1,...,OMP_NUM_THREADS-1}, но какие из этих чисел будут отпечатаны сказать нельзя. Все нити пошлют в I свой номер, однако, например, перед началом печатания в I может оказаться последний из посланных номеров. При продолжении работы все нити пошлют команду "печатать", но в результате будет отпечатано лишь последнее из полученных значений (так что будет отпечатано ОМР_NUM_THREADS одинаковых чисел).

Таким образом, программист должен предпринимать необходимые меры для поддержания правильной работы при использовании общих переменных.

Рассмотрим следующую программу

PROGRAMM HELLO
INTEGER NTHREADS, TID
С Порождение нитей с локальными переменными
!\$OMP PARALLEL PRIVATE (NTHREADS,TID)

```
C Получение и распечатка своего номера

TID=OMP_GET_THREAD_NUM()

PRINT*, 'Hello World from thread=', TID

C Участок кода для нити-мастера

IF (TID.EQ O) THEN

NTHREADS= OMP_GET_NUM_THREADS()

PRINT*, 'NUMBER of threads=',NTHREADS

C Завершение параллельной секции

!$OMP END PARALLEL

END
```

Каждая нить здесь выполняет фрагмент программы, печатая приветствие и номер нити; кроме этого, основная нить печатает общее число порожденных нитей.

Переменные NTHREADS и TID объявлены локальными; однако, первая переменная (NTHREADS) могла бы быть объявлена общей без нарушения работы программы, ибо она используется лишь в одной нити (в нити-мастере); при этом захватываемая память сократилась бы (не было бы ненужных копий).

Рассмотрим теперь программу сложения векторов.

```
PROGRAM VEC_ADD_DO
         INTEGER N, CHUNK ,I
         PARAMETER (N=100)
         PARAMETER (CHUNK=100)
         REAL A(N), B(N), C(N)
!
      Инициализация массивов
         D0
              I=1,N
            A(I)=I* 1.0
            B(I)=A(I)
         END DO
!$OMP PARALLEL SHARED(A,B,C,N) PRIVATE(I)
!$OMP DO SCHEDULE (DYNAMIC, CHUNK)
         DU
              I=1.N
            C(I)=A(I)+B(I)
         END DO
!$OMP END DO NOWAIT
!$OMP END PARALLEL
         F.ND
```

В этом примере массивы A,B,C объявлены общими; общей объявлена также переменная N. Переменная I является локальной (что вполне естественно). Итерации между нитями здесь распределяются динамически блоками по 100 итераций. В конце параллельного цикла синхронизация производиться не будет из-за директивы !\$ОМР END DO NOWAIT.

§ 9. Критические секции

Критическая секция программы оформляется для того, чтобы нити проходили ее поочередно: в каждый момент времени в критической секции может находиться не более одной нити. Критическая секция оформляется директивами

Если критическая секция выполняется, то нити, выполнившие директиву CRITICAL, останавливаются и ждут, пока упомянутая нить не завершит работу в критической секции. Порядок прохождения нитями критической секции (если на входе в нее стоит несколько нитей) не предопределен и, с точки зрения пользователя, носит случайный характер (определяемый генерацией системы и распределением памяти в момент исполнения).

Рассмотрим следующий пример.

Здесь номера всех нитей будут напечатаны от 0 до OMP_NUM_THREADS-1 независимо от того, объявлена ли переменная I общей или она объявлена локальной. Напомним, что в ранее приведенном примере (без критической секции)

```
I=OMP_GET_THREAD_NUM()
PRINT*,I
```

с переменной I, объявленной как PRIVATE, вывод на печать аналогичен. Однако, между двумя этими примерами имеется существенная разница: без критической секции работа идет параллельно, а с критической секцией — последовательно.

Вывод: критическими секциями нужно пользоваться осторожно, ибо их применение приводит к последовательному (а не к параллельному) выполнению соответствующих участков программы.

§ 10. Другие возможности Open MP

10.1. Синхронизация

Для синхронизации работы нитей в Open MP предусмотрено много возможностей; простейшая из них — использование директивы \$ SMP BARIER.

Нити, дошедшие до этой директивы, останавливаются, поджидая остальные нити; после достижения этой директивы всеми нитями работа продолжается.

10.2. Участок нити-мастера

Фрагмент программы, который должна выполнить лишь основная нить, определяется директивами

!\$OMP MASTER

<участок программы для нити-мастера> !\$ОМР END MASTER

Остальные нити пропускают этот участок программы; синхронизация по умолчанию здесь не проводится.

10.3. Последовательное выполнение отдельного оператора

Директива !\$ OMP ATOMIC относится к непосредственно идущему за ней оператору, и её применение приводит к последовательному выполнению этого оператора всеми нитями. Например, если переменная SUM описана как общая, то при суммировании применение в программе оператора SUM=SUM+expr может привести к неправильному результату: например, могут быть пропущены некоторые

слагаемые (например, после выборки SUM одной нитью (процессором) оказалось, что SUM уже выбрана другой нитью, и в результате к SUM окажется добавленным лишь второе слагаемое, а первое — не добавлено). Эту ситуацию исправляет директива ATOMIC

!\$OMP ATOMIC SUM=SUM+expr

где expr — локальная переменная, вычисляемая каждой нитью.

10.4. Гарантированное поддержание когерентности

Вычислительная система может иметь сложную иерархию различных областей памяти, когерентность которых поддерживается автоматически. Однако, в некоторых случаях пользователь должен иметь особые гарантии того, что память, к которой он обращается, своевременно обновлена (синхронизирована). Для этого служит директива

!\$OMP FLASH[список переменных]

Применение этой директивы приводит к синхронизации перечисленных в списке переменных в том смысле, что все последние изменения этих переменных будут внесены во все их копии (установлена полная когерентность).

$\S 11$. Привлекательные черты технологии Open MP

Привлекательные черты Open MP состоят в следующем.

- 1. Технология Open MP параллельного программирования построена так, что она не противоречит идеологии последовательного программирования: узкие участки последовательной программы можно распараллелить.
- 2. Удобство этой технологии в том, что пользователь имеет возможность начинать свою работу в привычной обстановке разработки последовательной программы, не задаваясь первоначально вопросами, связанными с распараллеливанием.
- 3. На этапе распараллеливания программа лишь расширяется обогащается комментариями текстами, относящимися к программе Open MP.

- 4. После упомянутого расширения, программу по-прежнему можно запускать на последовательном языке с использованием соответствующего транслятора; для транслятора тексты Open MP просто комментарий.
- 5. К достоинствам Open MP несомненно относится возможность последовательно добавлять параллелизм в программу, следя за процессом распараллеливания и за эффектом ускорения ее работы.

Глава 9. О ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТАНДАРТА МРІ

§ 1. Введение

Общеизвестна роль стандартов в развитии взаимодействия человек — ЭВМ. К настоящему времени разработаны стандарты на языки программирования высокого уровня, которые позволяют достаточно быстро освоить эффективное использование компьютера и поддерживают переносимость создаваемых программ. Разработаны стандарты на элементную базу, предназначенную для создания компьютеров. В рамки подобного развития укладывается и создание стандартов на параллельные компьютерные системы и на параллельное программирование. Одним из наиболее распространенных стандартов параллельного программирования является стандарт МРІ, который будет рассмотрен в этом параграфе. Актуальность такого рассмотрения поддерживается идеей о том, что каждая параллельная система должна иметь в своем обеспечении некоторую реализацию этого стандарта.

Аббревиатура MPI расшифровывается как Message Passing Interface, что можно перевести как Интерфейс передачи сообщений. Этот стандарт был развит группой Message Passing Interface Forum (MPIF). Цель его разработки состояла в создании удобных средств параллельного программирования со свойствами эффективности и гибкости при практическом применении. Группа MPIF с участием более 40 организаций начала свою работу в 1992 году; первая (черновая) версия была опубликована в 1994 году, причем работа велась в Исследовательском центре IBM.

Вторая версия появилась в 1997 году (подробности см. по адресу http://www.mpi-forum.org). К числу требований, которые были предъявлены к результирующей версии стандарта MPI, относятся: 1) реализации для языков C и Fortran77 при использовании различных платформ, 2) удобство использования, позволяющее программисту минимальным образом представлять себе архитектуру параллельной системы, 3) высокая степень переносимости и масштабируемости разрабатываемой пользователем программы.

§ 2. Элементы идеологии стандарта MPI

Программа на алгоритмическом языке Фортран с использованием MPI имеет обычный вид, где об использовании MPI говорят только присутствующие в программе вызовы процедур стандарта MPI, оформленных как процедуры библиотеки mpif.h. Приведем простой пример такой программы.

envelope.f

1) PROGRAMM envelope INCLUDE 'mpif.h' 2) CALL MPI_INIT(ierr) 3) 4) CALL MPI_COMM_SIZE(MPI_COMM_WORLD,nprocs,ierr) 5) CALL MPI_COMM_RANK(MPI_COMM_WORLD,myrank,ierr) PRINT *, 'nprocs =', nprocs, 'myrank =', myrank 6) 7) CALL MPI_FINALIZE(ierr) 8) END

Листинг 1. Простой пример программы на Фортране, использующей стандарт MPI.

К объяснению этой программы мы в дальнейшем вернемся.

Принято различать два подхода параллельного программирования:

- идеология SIMD (Single Instruction Multiple Data) одна инструкция много данных;
- идеология МІМD (Multiple Instructions Multiple Data) много инструкций много данных.

Идеология SIMD означает, что параллельно обрабатывается общая инструкция всеми модулями параллельной системы.

Замечание 1. Для ясности заметим сразу, что идеология SIMD не подразумевает тождественности работ всех модулей, что было бы довольно бессмысленно: программа может иметь разветвления в зависимости от номера модуля, так что, конечно, каждый модуль производит обработку по предписанному именно ему алгоритму.

Вторая идеология предполагает обработку различных инструкций разными модулями.

Стандарт MPI скорее относится к первой идеологии, чем ко второй, хотя ввиду сделанного замечания ясно, что, в принципе, указанные подходы сводимы один к другому.

Основными понятиями МРІ являются:

- процесс;
- группа процессов;
- коммуникатор.

Коммуникатор идентифицирует группу процессов, которые с точки зрения данного коммуникатора рассматриваются как параллельно исполняемые последовательные программы; последние, однако, могут на самом деле представлять группы процессов, вложенных в исходную группу.

MPI допускает многократное ветвление программы и создание на базе одного процесса очередной группы процессов, идентифицируемых новым коммуникатором. Таким образом, процесс ветвления может представлять собой дерево; для завершения программы не требуется возвращение к исходному процессу.

Коммуникатор реализует синхронизацию и обмены между идентифицируемыми им процессами; для прикладной программы он выступает как коммуникационная среда. Каждый коммуникатор имеет собственное коммуникационное пространство, а сообщения, использующие разные коммуникаторы, не оказывают влияния друг на друга и не взаимодействуют. Таким образом, каждая группа процессов использует свой собственный коммуникатор, процессы внутри группы нумеруются от 0 до k-1, где k — число процессов в группе (параметр k может принимать различные натуральные значения, задаваемые пользователем, но не превосходящие значения, определяемого реализацией).

MPI управляет системной памятью для буферизации сообщений и хранения внутренних представлений объектов (групп, коммуникаторов, типов данных и т.п.)

В структуре языков Фортран и Си стандарт MPI реализуется как библиотека процедур с вызовами определенного вида. Требуется, чтобы программа, написанная с использованием стандарта MPI, могла быть выполнена на любой параллельной системе без специальной настройки.

Для применения MPI на параллельной системе к программе должна быть подключена библиотека процедур MPI (в приведенной выше программе — это библиотека mpif.h, см. Листинг 1). Перед использованием процедур стандарта MPI следует вызвать процедуру MPI_INIT; она подключает коммуникатор MPI_COMM_WORLD, задающий стандартную коммуникационную сре-

ду с номерами процессов $0,1,\ldots,n-1$, где n — число процессов, определяемых при инициализации системы. При завершении использования MPI в программе должна быть вызвана процедура MPI_FINALIZE; вызов этой процедуры обязателен для правильной работы программы.

Следует представлять себе ситуацию таким образом, что рассматриваемая программа скопирована во все модули параллельной системы. Прокомментируем программу, представленную выше (см. Листинг 1):

- строка 1 не нуждается в объяснении;
- строка 2 подключает библиотеку процедур MPI под именем mpif.h, в которой содержатся такие процедуры, как MPI_INIT, MPI_COMM_WORLD, MPI_FINALIZE и другие (см. список процедур ниже):
 - строка 3 вызывает MPI_INIT для инициализации MPI;
- строка 4 возвращает число процессов **nprocs**, принадлежащих коммуникатору MPI_COMM_WORLD;
- строка 5 возвращает ранг (номер) myrank процесса внутри стандартной коммуникационной среды (в данном случае абстрактно его можно представлять как номер вычислительного модуля, на котором происходит данный процесс);
- строка 6 производит распечатку вычисленных параметров nprocs и myrank для данного процесса (в данном случае можно представлять себе дело таким образом, что каждый вычислительный модуль параллельной системы имеет свой принтер, на котором и производится распечатка); в результате каждый вычислительный модуль сообщит номер процесса, которым он занят;
- строка 7 вызывает процедуру MPI_FINALIZE, завершающую работу с библиотекой MPI (вызов ее обязателен и после ее вызова взаимодействие с MPI невозможно).

Приведенные комментарии дают определенное представление о работе процедур MPI_INIT, MPI_COMM_WORLD, MPI_FINALIZE, а также процедур MPI_COMM_SIZE, MPI_COMM_RANK; более подробные их описания будут даны дальше.

§ 3. О реализации разветвлений на параллельной системе

В соответствии с концепцией, принятой в MPI, каждый процессор обрабатывает одну и ту же программу, но поскольку его деятельность может быть поставлена в зависимости от его номера, то возможно делать поведение различных процессов различным и наблюдать за их работой. Например, если после трансляции программы envelope(см. Листинг 1) получился загрузочный модуль a.out, то после запуска последнего получим на (общем) принтере распечатку:

```
0: nprocs = 3 myrank = 0
1: nprocs = 3 myrank = 1
2: nprocs = 3 myrank = 2
```

Листинг 2. Распечатка результатов работы параллельной программы, представленной на Листинге 1. Рассмотрим теперь несколько бо-

лее сложную программу:

```
1)
           PROGRAMM bcast
 2)
           INCLUDE 'mpif.h'
           INTEGER imsg(4)
3)
4)
           CALL MPI_INIT(ierr)
           CALL MPI_COMM_SIZE(MPI_COMM_WORLD,nprocs,ierr)
 5)
           CALL MPI_COMM_RANK(MPI_COMM_WORLD,myrank,ierr)
6)
7)
           IF (myrank=0) THEN
8)
            D0 i=1,4
9)
              imsg(i)=i
10)
            END DO
11)
           ELSE
12)
            D0 i=1,4
13)
              imsg(i)=0
14)
            END DO
15)
           ENDIF
16)
           PRINT *, 'Before:', imsg
17)
           CALL MPI_BCAST(imsg,4,MPI_GATHER,
18)
          $0,MPI_COMM_WORLD,ierr)
19)
           PRINT *, 'after:', imsg
```

20)	CALL	<pre>MPI_FINALIZE(ierr)</pre>
21)	FND	

Листинг 3. Пример программы на языке Фортран, использующей процедуру MPI_BCAST стандарта MPI (заметим, что символ \$ — символ продолжения строки программы).

В соответсвии с принятой MPI в концепцией, процессы в MPI, вообще говоря, равноправны (нет заранее выделенного процесса): программист вправе рассматривать любой из них основным. В программе bcast.f процесс с рангом rank=0 назовем корневым (ибо он в определенном отношении отличается от остальных: именно в нем будет получен окончательный результат). Корневой процесс заполняет целочисленный массив imsg ненулевыми значениями, в то время как остальные процессы заполняют его нулями. Процедура MPI_BCAST вызывается в строках 17, 18; при этом она рассылает четыре числа из корневого процесса в другие процессы коммуникатора MPI_COMM_WORLD. Заметим, что роль идентификатора imsg в корневом процессе и в некорневых различна: в корневом процессе он используется как обозначение посылающего буфера, а в некорневых процессах как обозначение получающего буфера.

Результат работы только что приведенной программы будет следующим.

```
0:
      Before: 1
      Before: 0
1:
      Before: 0 0 0 0
2:
                   3
                2
0:
      after: 1
1:
      after: 1
                2
                    3
      after: 1
2:
```

Листинг 4. Распечатка результатов работы параллельной программы, представленной на Листинге 3.

§ 4. О программировании вычислений на параллельной системе. Процедура MPI_REDUCE

Для проведения вычислений с использованием MPI предназначена процедура MPI_REDUCE. Иллюстрацией ее применения для вычисления суммы элементов массива a(i) служит нижеследующая программа:

reduce.f

```
1)
           PROGRAMM reduce
 2)
           INCLUDE 'mpif.h'
           REAL a(9)
 3)
 4)
           CALL MPI_INIT(ierr)
 5)
           CALL MPI_COMM_SIZE(MPI_COMM_WORLD, nprocs, ierr)
 6)
           CALL MPI_COMM_RANK(MPI_COMM_WORLD,myrank,ierr)
 7)
           ista = mvrank*3+1
 8)
           iend = ista +2
9)
           DO i = ista, iend
10)
             a(i) = i
11)
           END DO
12)
           sum = 0.0
13)
           DO i = ista, iend
14)
             sum = sum + a(i)
15)
           END DO
16)
           CALL MPI_REDUCE(sum,tmp,1,MPI_REAL,MPI_SUM,0,
         $MPI_COMM_WORLD,ierr)
17)
           sum=tmp
18)
           IF (myrank=0) THEN
19)
             PRINT *, 'sum=', sum
20)
           ENDIF
21)
           CALL MPI_FINALIZE(ierr)
22)
           END
```

Листинг 5. Пример программы на языке Фортран, использующей процедуру MPI_REDUCE стандарта MPI и вычисляющей сумму элементов массива a(i), i=1,2,...,9.

В этой программе предполагается, что имеется три процесса, вовлеченные в вычисления, и каждому процессу поручается одна треть массива a(i). Каждый процесс вычисляет частичные суммы в строках 13–15, а в строках 16–17 эти частичные суммы складываются, и результат посылается в корневой процесс (в данном случае таковым является процесс с номером 0). Вместо девяти сложений получается три сложения плюс одна глобальная сумма. В этом случае пятый аргумент в MPI_REDUCE указывает характер проводимых операций, а четвертый — на тип данных.

Замечание 2. Поскольку порядок вычислений может быть изменен по сравнению с возможной последовательной программой, то из-за ошибок округления результат может быть другим.

§ 5. Перечень основных процедур стандарта MPI

Процедуры управления группой

Исходной нумерацией n процессов в группе являются числа $0,1,2,\ldots,n-1$. Для определения числа процессов в группе и номера данного процесса служат процедуры MPI_GROUP_SIZE(group,size) и MPI_GROUP_RANK(group,rank).

Процедура MPI_GROUP_SIZE(group, size) присваивает параметру size значение, равное числу процессов группы с именем group.

Процедура MPI_GROUP_RANK(group,rank) присваивает параметру rank значение, равное номеру процесса в группе с именем group.

Однако иногда такая нумерация является неудобной; поэтому есть возможность изменять нумерацию в группе. В частности, если необходимо использовать топологию n-мерных кубов (или торов), то используется процедура MPI_CART_CREATE; обращение к ней имеет вид:

где

comm_old — исходный коммутатор;

ndims — размерность создаваемой решетки;

 ${\tt dims-} {\tt maccub} \ pазмерности \ {\tt ndims}, \\ {\tt задающий} \ pазмер \ {\tt в} \ {\tt каждом} \\ {\tt направлении};$

periods — массив размерности ndims, каждый элемент которого принимает значения FALSE или TRUE; если элемент имеет значение TRUE, то направление — nepuodureckoe (это направление замыкается кольцевой связью) и FALSE — в противном случае;

reorder — параметр, принимающий значения FALSE или TRUE; нумерация будет сохранена в случае значения FALSE, или назначена другой — в случае значения TRUE;

 ${\tt comm_cart}$ — вновь созданный коммутатор с декартовой топологией.

Процедуры обмена между двумя процессами

Основными процедурами для целей обмена двух процессов служат процедура посылки сообщения MPI_SEND и процедура приема сообщения MPI_RECV; обращения к этим процедурам имеют вид

MPI_SEND(buf0,count0,datatype0,dest,tag0,comm),

 ${\tt MPI_RECV(buf1,count1,datatype1,source,tag1,comm,status)}\,,$ ${\tt rge}$

buf0, buf1 — начальные адреса передающего и принимающего буферов (соответственно);

 ${\tt count0}$, ${\tt count1}$ — числа элементов данных в передающем и в принимающем буферах;

 ${\tt datatype0}$, ${\tt datatype1}$ — типы передаваемых и получаемых данных;

dest — номер принимающего процесса;

source — номер посылающего процесса;

tag — тэг сообщения (тэг служит для указания типа сообщения и может принимать целочисленные значения от 0 до натурального числа UB, значение которого зависит от реализации);

сотт — коммуникатор группы.

Кроме этих процедур имеются также процедуры MPI_ANY_SOURCE и MPI_ANY_TAG для приема сообщений от любых источников с любыми тэгами.

Коллективные обмены между процессами

Основными процедурами для коллективных обменов между процессами являются барьерная процедура MPI_BARRIER, широковещательная процедура MPI_BCAST, процедура сбора данных MPI_GATHER, процедура раздачи данных MPI_SCATTER, процедура сбора и раздачи данных всем процессам MPI_ALLGATHER.

Барьерная синхронизация всей группы процессов осуществляет процедура MPI_BARRIER с обращением вида MPI_BARRIER(comm), где comm — коммуникатор группы.

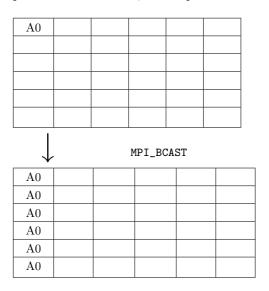
После вызова этой процедуры процесс останавливается до тех пор, пока все процессы группы не произведут вызов этой процедуры; это позволяет синхронизировать процессы, продолжая их с момента, когда будет произведен последний вызов этой процедуры.

Передачу сообщения от одного процесса ко всем остальным процессам группы называют широковещательной (broadcast) передачей; она реализуется процедурой MPI_BCAST с помощью вызова

MPI_BCAST(buffer,count,datatype,root,comm),

```
buffer — начальный адрес буфера;
count — число элементов в буфере;
datatype — тип передаваемых элементов;
root — номер передающего процесса;
comm — коммуникатор группы.
```

Наглядное представление о широковещательной передаче дает Листинг 6, где по горизонтали изображены процессы группы параллельной системы, а по вертикали — находящиеся в них данные.



Листинг 6. Работа процедуры MPI_BCAST: передача сообщения от одного процесса остальным процессам группы.

Сбор данных со всех процессов группы в один процесс этой группы осуществляет процедура MPI_GATHER с использованием вызова

```
MPI_GATHER(sendbuffer,sendcount,sendtype,recbuffer, reccount,rectype, root,comm), где
```

```
sendbuffer — начальный адрес посылающего буфера; sendcount — число элементов в посылающем буфере; sendtype — тип посылаемых элементов; recbuffer — начальный адрес принимающего буфера;
```

```
reccount — число элементов в принимающем буфере; rectype — тип принимаемых элементов; root — номер передающего процесса;
```

сотт — коммуникатор группы.

Аналогично предыдущему, наглядное представление о сборе данных дает Листинг 7, где по горизонтали изображены процессы группы параллельной системы, а по вертикали — находящиеся в них данные.

A0							
A1							
A2							
A3							
A4							
A5							
A5 MPI_GATHER							
\downarrow	MI	PI_GATH	ER				
↓ A0	A1	PI_GATH	ER A3	A4	A5		
A0				A4	A5		
A0				A4	A5		
A0				A4	A5		
A0				A4	A5		

Листинг 7. Работа процедуры MPI_GATHER: сбор данных из всех процессов группы в один процесс.

В обратном направлении работает процедура MPI_SCATTER, осуществляющая раздачу данных во все процессы группы из одного процесса этой группы; такая раздача производится с использованием вызова

MPI_SCATTER(sendbuffer,sendcount,sendtype,recbuffer, reccount,rectype, root,comm),

где

sendbuffer — начальный адрес посылающего буфера; sendcount — число элементов в посылающем буфере; sendtype — тип посылаемых элементов; recbuffer — начальный адрес принимающего буфера;

reccount — число элементов в принимающем буфере;

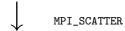
rectype — тип принимаемых элементов;

root — номер передающего процесса;

сотт — коммуникатор группы.

Наглядное представление о раздаче данных дает Листинг 8, где как и выше, по горизонтали изображены процессы группы параллельной системы, а по вертикали — их данные.

A0	A1	A2	A3	A4	A5



A0			
A1			
A2			
A3			
A4			
A5			

Листинг 8. Работа процедуры MPI_SCATTER: раздача данных из одного процесса во все процессы группы.

Сбор данных из всех процессов группы и размещение результата во всех процессах группы позволяет реализовать процедура $MPI_ALLGATHER$ с помощью обращения

MPI_ALLGATHER(sendbuffer,sendcount,sendtype,recbuffer, reccount,rectype, root,comm), где приняты прежние обозначения.

Наглядное представление о работе этой процедуры дает Листинг 9, где по-прежнему по горизонтали изображены процессы группы параллельной системы, а по вертикали — находящиеся в них данные.

A0							
A1							
A2							
A3							
A4							
A5							
A5 MPI_ALLGATHER							
\downarrow	MI	PI_ALLG	ATHER				
A0	A1	PI_ALLG	ATHER A3	A4	A5		
A0 A0		_		A4 A4	A5 A5		
	A1	A2	A3		-		
A0	A1 A1	A2 A2	A3 A3	A4	A5		
A0 A0	A1 A1 A1	A2 A2 A2	A3 A3 A3	A4 A4	A5 A5		

Листинг 9. Работа процедуры MPI_ALLGATHER: сбор данных из всех процессов группы и размещение результата во всех процессах группы.

A0	A1	A2	A3	A4	A5
В0	B1	B2	В3	B4	B5
C0	C1	C2	СЗ	C4	C5
D0	D1	D2	D3	D4	D5
E0	E1	E2	E3	E4	E5
F0	F1	F2	F3	F4	F5
I					
$\overline{}$	ME	PI_ALLT	OALL		
↓ A0	B0	C0	D0	E0	F0
↓ A0 A1		_		E0 E1	F0 F1
_	В0	C0	D0	-	_
A1	B0 B1	C0 C1	D0 D1	E1	F1
A1 A2	B0 B1 B2	C0 C1 C2	D0 D1 D2	E1 E2	F1 F2
A1 A2 A3	B0 B1 B2 B3	C0 C1 C2 C3	D0 D1 D2 D3	E1 E2 E3	F1 F2 F3

Листинг 10. Работа процедуры MPI_ALLTOALL: Раздача и сборка данных из всех процессов группы и размещение во всех процессах группы.

Раздачу и сборку данных из всех процессов группы и размещение во всех процессах группы позволяет реализовать процедура MPI_ALLTOALL (см. Листинг 10) с помощью обращения

MPI_ALLTOALL(sendbuffer,sendcount,sendtype, recbuffer,reccount,rectype, root,comm).

Кроме перечисленных процедур имеются глобальные операции редукции: сложение, максимум, минимум и т.п.; результат глобальной операции передается в один или во все процессы (в качестве примера см. процедуру MPI_REDUCE на Листинге 5).

Всего библиотека MPI содержит несколько десятков процедур (обычно конкретная реализация кроме стандартных процедур MPI имеет еще некоторое количество их модификаций, однако стандартный набор должен обязательно присутствовать). Если принципиальная структура MPI освоена (хотя бы в рамках изложенного материала), то изучение новых процедур труда не представляет, так как в системе обычно имеется достаточно подробная инструкция.

Глава 10. ТЕХНОЛОГИЯ ПРОГРАММИРОВАНИЯ DVM

§ 1. Основные принципы

Модель Digital Virtual mashine (DVM) положена в основу Fortran-DVM и C-DVM, разработанных в Институте прикладной математики Российской Академии Наук (ИПМ РАН).

При проектировании реализованы следующие принципы.

- 1. Система базируется на высокоуровневой модели выполнения программы, которая привычна для прикладного программиста.
- 2. Спецификации параллелилизма остаются невидимыми для обычных компиляторов Fortran-77 и С.
- 3. Языки распараллеливания предлагает программисту модель программирования, близкую к модели исполнения.
- 4. Основная работа по реализации модели выполняется системой поддержки распараллеливания DVM.

Система DVM базируется на библиотеке MPI (Message Passing Interface) для обеспечения высокой степени переносимости программ. Для повышения надежности работы в настоящее время разрабатывается поддержка DVM-программ с помощью стандарта Open MP.

Все DVM-директивы оформлены в виде строк, начинающихся любым из символьных сочетаний CDVM\$, *DVM\$ или !DVM\$.

Синтаксис и семантика директив в языках Fortran-DVM и C-DVM практически совпадают.

Модель выполнения DVM-программы описывается следующим образом.

- 1. DVM-программа выполняется на виртуальной многопроцессорной системе (MPI-машине, PVM-машине и т.п.).
- 2. Виртуальная многопроцессорная система представляется в виде многомерной решетки процессоров.
- 3. В момент запуска DVM-программа начинает свое выполнение сразу на всех процессорах виртуальной вычислительной системы, причем в это же время присутствует единственный поток управления (единственная ветвь).
 - 4. DVM допускает ограниченную иерархию параллелизма:
- на верхнем уровне описывается то или иное число независимых ветвей (задач), которые могут выполняться параллельно (независимые по данным крупные блоки программы);

- в конце ветвей может быть выполнена глобальная операция редукции;
- в каждой ветви могут дополнительно выделяться параллельные пиклы.

Никакие другие вырианты иерархии параллелизма не допускаются.

- 5. При входе в параллельную конструкцию поток управления разбивается на ряд параллельных потоков, каждый из которых управляет процессом вычислений на своем процессоре.
- 6. Все переменные репродуцируются по всем процессорам: в каждом процессоре появляется локальная переменная того же типа и с тем же именем; исключением являются специально указанные "распределенные массивы", способ расположения которых определяется соответствующей директивой.
- 7. Любой оператор присваивания выполняется по правилу "собственных вычислений": он выполняется тем процессором, на котором распределена переменная, стоящая в левой части оператора присваивания.

Замечание. Множество задач характеризуется вектором задач T, компоненты которого T(i) однозначно определяют i-ю задачу.

§ 2. Распределения массивов

Для распределения массивов используется директива DISTRIBUTE; эта директива может быть размещена в описательной части программы.

В частности, для распределения одномерного массива по процессорам пишут

CDVM\$ DISTRIBUTE <имя массива>,<формат> [ONTO(n)], где квадратные скобки, как и прежде, означают, что находящееся в них выражение не является обязательным.

Поле <формат> может принимать одно из следующих значений:

- 1. ВLОСК отображения равными блоками,
- 2. $WGT_BLOCK(WB,NWB)$ отображение, вообще говоря, неравными (взвешенными) блоками (см. ниже),
 - 3. *- отображение целым измерением.

Рассмотрим каждый из случаев подробнее.

1. При отображении равными блоками соответствующее измерение массива разбивается на NP равных блоков (где NP — число

виртуальных процессоров), причём i-й блок отображается на i-й виртуальный процессор.

- 2. При отображении взвешенными блоками указывается вектор весов WB размера NWB, (NP процессоров разбиваются на группы (приблизительно) по NP/NWP процессоров и в каждой і-й группе распределяется часть массива, соответствующая весу WB(i) упомянутого вектора, i=1,2,...,NWP).
- 3. Отображение целым измерением означает, что данное измерение не будет распределяться между процессорами (оно будет отнесено одному процессору).

Замечание 1. Если присутствует опция ONTO T(n), то массив отображается на ту часть процессоров, на которую отображена n-я задача вектора задач T.

Замечание 2. Распределение многомерного массива осуществляется независимым распределением каждого его измерения.

§ 3. Выравнивание массивов

В ряде случаев требуется согласованное распределение массивов между процессорами; например, это требуется для присваивания по "правилу собственных вычислений".

Для согласованного отображения нескольких массивов используется директива ALLIGN (выровнять).

Рассмотрим фрагмент программы.

```
REAL A(N),B(N)
CDVM$ DISTRIBUTE A(BLOCK)
CDVM$ DISTRIBUTE B(BLOCK)
......
DO {i}=n1,n2
B({i})=A(f({i}))
END DO
```

Пусть OWN(B(i)) — номер виртуального процессора, на котором распределён элемент B(i). Ввиду "правила собственных вычислений" оператор на i-й итерации будет выполняться на процессоре OWN(B(i)). Если элемент A(f(i)) распределить на процессор OWN(B(i)) для каждой итерации, то все данные будут находиться на одном процессоре.

Для обеспечения указанной локализации вместо директивы CDVM\$ DISTRIBUTE B(BLOCK)

необходимо применить директиву выравнивания массивов

CDVM\$ ALIGN B(i) WITH A(f(i))

В результате элементы B(i) и A(f(i)) будут распределены на один и тот же процессор.

3амечание. Есть возможность динамически изменять текущее распределение данных c помощью директив REDISTRIBUTE u REALIGN.

§ 4. Параллельное выполнение циклов

Директива параллельного выполнения циклов имеет вид CDVM\$ PARALLEL $(i_1,...,i_m)$ ON A $(L_1,...,L_n),$ где

 i_j — управляющие параметры циклов (тесно вложенных и следующих сразу после этой директивы),

 $L_k = \mathtt{a}_k * \mathtt{i}_\mathtt{j} + \mathtt{b}_k$ — линейная функция (от управляющего параметра),

 \mathtt{A} — идентификатор массива данных или вектора задач (секции процессоров).

Замечание 1. Все управляющие параметры циклов должны перечисляться в том порядке, в каком расположены циклы в тексте программы.

Действие директивы: итерация многомерного цикла $(i_1,...,i_m)$ будет выполняться тем процессором, на который отображён элемент массива $\mathtt{A}(\mathtt{L}_1,...,\mathtt{L}_n).$

```
CDVM$ PARALLEL (i) ON B(i)

DO i=n1,n2

CALL F(A,B,i)

END DO
```

В результате і-ая итерация будет выполнена на процессоре, на который распределён элемент В(і).

Замечание 2. В случае присваиваний вида A(i)=B(i) теоретически могло бы быть два варианта действий:

- 1) если нет распределения итераций по процессорам (нет директивы PARALLEL), то по умолчанию операции присваивания выполняются на том процессоре, где находится присваиваемый элемент распределённого массива, а в случае наличия распределения — в соответствии с упомянутым распределением;
- 2) операция присваивания распределённым массивам всегда производится на процессоре, где распределён данный массив (т.е. принято неукоснительное выполнение "правила собственных вычислений").

В DVM-языках принимается второй вариант действий; при этом явное указание распределения итераций многомерного цикла должно находиться в строгом соответствии с "правилом собственных вычислений" и служит лишь для оптимизации вычислительного процесса. Для пояснения рассмотрим фрагмент:

Если перед этим циклом нет директивы PARALLEL, то цикл будет выполняться по "правилу собственных вычислений" (по умолчанию).

Если же перед циклом есть директива PARALLEL, то прежде всего, она должна соответствовать "правилу собственных вычислений"; опять-таки цикл будет выполняться в соответствии с упомянутым правилом.

Разница между этими случаями состоит в том, что при отсутствии директивы PARALLEL система отслеживает принадлежность элемента массива процессору перед каждой операцией, а при наличии явного указания о распределении такое отслеживание не проводится, так что в последнем случае экономится время вычислений.

§ 5. Отображение задач

Набор задач, обрабатываемых системой, задается вектором за- $\partial a v$ T, n-я компонента которого определяет задачу с номером n.

Для отображения задач на секции решетки виртуальных процессоров используется директива MAP в следующем виде

CDVM\$ MAP T(n) ONTO
$$P(i'_1:i''_1,\ldots,i'_n:i''_n),$$

где T(n) — n-я компонента вектора T, а $P(i_1':i_1'',\ldots,i_n':i_n'')$ — секция решетки виртуальных процессоров.

Положим $\mathbf{i}' = (\mathbf{i}_1', \dots, \mathbf{i}_n'), \ \mathbf{i}'' = (\mathbf{i}_1'', \dots, \mathbf{i}_n'').$ При упомянутом применении директивы MAP n-я задача будет выполняться на секции процессоров P_{α} , мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ которых удовлетворяет условиям $\mathbf{i}' \leq \alpha \leq \mathbf{i}''$ (или в эквивалентном виде $\mathbf{i}_j' \leq \alpha_j \leq \mathbf{i}_j'', j = 1, \dots, n$).

Замечание. Все массивы, сопоставленные задаче T(n), будут автоматически переданы на ту же секцию виртуальных процессоров, на которую отображена задача T(n).

Для сопоставления блоков программы задачам существует две формы отображения: статическая и динамическая.

Статическая форма аналогична параллельной секции в Open MP (аналогично директиве SECTIONS), и здесь она выглядит так

В динамической форме каждая операция цикла отображается на задачу (на секцию процессоров). Например,

Замечание. В отличие от обычной директивы параллельного цикла, где на каждом процессоре решетки виртуальных процессоров выполняется непрерывный диапазон итераций цикла, здесь каждая итерация цикла выполняется на своей секции данной решетки (секции могут меняться).

§ 6. Соседние общие данные

Общими данными в системе DVM считаются те данные, которые вычисляются на одних процессорах, а используются на других.

Общие данные делятся на четыре группы:

- 1) соседние (общие) данные (shadow),
- 2) удаленные (общие) данные (remote),
- 3) редукционные (общие) данные (reduce),
- 4) пересеченные (общие) данные (across).

Ниже рассмотрим использование соседних общих данных. Пример ("присваивание в цикле").

```
CDVM$ PARALLEL (i) ON B(i), SHADOW_RENEW(A(d1:d2))

DO i=1+d1, N-d2

B(i)=A(i-d1)+A(i+d2)

END DO
```

Спецификация SHADOW_RENEW указывает на то, что в данном цикле требуются значения общих данных из массива A, причем d1 — размер требуемых данных от "левого соседа", а d2 — размер требуемых данных от "правого соседа".

Для доступа к данным, размещенным на других процессорах, используются так называемые теневые грани массива.

Теневую грань можно представить себе буфером (хотя в действительности он может и не быть таковым), содержащим в себе "непрерывное"продолжение локальной секции массива, находящегося в памяти процессора.

Перед выполнением цикла требуемые данные автоматически пересылаются с соседних процессоров в теневые грани массива A на каждом процессоре. Доступ к этим данным при выполнении цикла ничем не отличается от доступа к данным, первоначально размещенным на процессоре.

§ 7. Удаленные данные

Иногда доступ к удаленным данным требует заведения специального буфера.

Пример.

```
DIMENTION A(100,100), B(100,100)
CDVM$ DISTRIBUTE (*,BLOCK)::A
CDVM$ ALIGN B(I.J) WITH A(I.J)
CDVM$ REMOTE_ACCESS (A(50,50))
С замена А(50,50) ссылкой на буфер на всех
С процессорах OWN(X) и рассылка значения A(50,50) по
С всем процессорам с последующим присваиванием
            X=A(50,50)
CDVM$ REMOTE_ACCESS (B(100,100))
С пересылка значения В(100,100) в буфер
С процессора OWN(A(1,1)) с последующим присваиванием
            A(1,1)=B(100,100)
CDVM$ PARALLEL (I,J) ON (A(I,J)) REMOTE_ACCESS (B(I,n))
C рассылка значений B(I,n) по процессорам OWN(A(i,j))
           DO I=1,100
             DO J=1,100
               A(I,j)=B(I,J)+B(I,n)
             END DO
           END DO
```

Первые две директивы REMOTE_ACCESS описывают удаленные ссылки для отдельных операторов. Директива REMOTE_ACCESS в параллельном цикле специфицирует удаленные данные (элементы n-го столбца матрицы В) для всех процессоров, на которых выполняется цикл. При этом на каждый процессор будет переслана только необходимая ему часть столбца матрицы В.

§ 8. Редукционные данные

Редукционные данные применяются при выполнении глобальных операций вычислительной системой. Сначала операция выполняется на каждом процессоре с использованием тех данных, которые на нём размещены; затем результат заносится в редукционную переменную процессора. По редукционным переменным вычисляется результат глобальной операции. Рассмотрим достаточно красноречивый пример использования редукционной переменной.

```
CDVM$ PARALLEL (I) ON B(I), REDUCTION(SUM(S))

DO I=1,N

S=S+B(I)

END DO
```

В этом примере для каждого процессора заводятся локальные (редукционным) переменные S, в которых при выполнении будут храниться частичные суммы. После выполнения всех сложений, полученные частичные суммы складываются, что даст искомую сумму в переменной S.

Замечание. Если при суммировании важна последовательность сложений (для уменьшения результирующей ошибки округления), то указанный выше приём использовать нельзя, так как при его применении теряется контроль за последовательностью вычислений.

§ 9. Пересечённые данные

Пересечённые данные (астоѕ data) используются для конвейерного исполнения операций над массивом на ВС. Например, если результаты вычислений массива на I процессоре используются на II процессоре, а полученные результаты на III процессоре и т.д. и если этот процесс может быть организован, так что вычислительная система обрабатывает массив конвейерно, то используется директива ACROSS.

```
CDVM$ PARALLEL (I) ON B(I), ACROSS(B[d1,d2])

DO I=1+d1, N-d2

B(I)=B(I-d1)+B(I+d2)

END DO
```

Замечание. В отличие от соседних общих данных здесь в правой и левой частях присваивания имеется массив В, т.е. присутствует зависимость по данным. Поэтому теневые грани массива статически (т.е. перед выполнением цикла) огранизовать нельзя. Здесь такие грани поддерживаются динамически в процессе работы цикла.

§ 10. Пример программы. Отладка. Заключительные замечания

Отметим некоторые характерные черты технологии DVM:

- 1) DVM-программа может выполняться на любом числе процессоров, начиная с одного процессора;
- 2) директивы DVM-программы не зависят от количества процессоров;
 - 3) нет зависимости DVM-программы от номеров процессоров;
- 4) пользователь должен описать явно массив виртуальных процессов с помощью директивы MAP; это количество не должно превышать числа процессоров, задаваемых при запуске программы с помощью встроенной функции NUMBER_OF_PROCESSORS().

Пример (параллельная программа, реализующая метод Якоби для сеточных уравнений).

```
PROGRAM JAC_DVM
         PARAMETER(L=8, ITMAX=20)
         REAL A(L,L), B(L,L)
CDVM$ DISTRIBUTE (BLOCK, BLOCK)::A
CDVM$ ALIGN B(I, J) WITH A(I, J)
         PRINT*, '***TEST_JACOBI***'
CDVM$ PARALLEL (J,I) ON A(I,J)
         DO J=2, L-1
           DO I=2, L-1
             A(I,J)=B(I,J)
           END DO
         END DO
CDVM$ PARALLEL (J,I) ON B(I,J), SHADOW_RENEW(A)
         DO J=2, L-1
           DO I=2, L-1
             B(I,J)=(A(I-1,J)+A(I,J-1)+A(I+1,J)+A(I,J+1))/4
           END DO
```

```
END DO
OPEN(Z, FILE='JACOBI.DAT', FORM='FORMATTE')
WRITE(Z, B)
CLOSE(Z)
END
```

Дадим некоторые пояснения:

- 1) массив A отображается на двумерную решётку процессоров (смотри (BLOCK, BLOCK));
- 2) согласно директиве ALIGN элемент B(I, J) будет размещён на том же процессоре, где находится A(I, J);
- 3) для второй директивы PARALLEL описываются общие "теневые" данные, ширина теневых данных определятся разницей индексных выражений элементов массивов, расположенных в левой и в правой частях оператора присваивания (в данном случае ширина теневых граней равна 1);
- 4) обе директивы PARALLEL описывают распределение итераций цикла, согласованное с распределением массивов A и B: итерация цикла (I, J) будет выполняться на том процессоре, где размещены элементы A(I, J) и B(I, J).

Замечание. Перестановка индексов I и J связана с особенностью распределения памяти при трансляции с языка Fortran: внутренний цикл лучше заставить перебирать элементы столбца, т.к. двумерные массивы в Фортране расположены в памяти по столбцам.

Для отладки делаются следующие шаги:

- 1) производится отладка программы, которая на этом шаге рассматривается как последовательная программа;
 - 2) программа запускается для проверки DVM-директив;
- на третьем шаге программа запускается в режиме сравнения результатов парадлельного выполнения с эталонами, полученными при последовательном выполнении;
- используются средства трассировки для фиксации последовательности обращений к переменным и для определения их значений;
- 5) применяется анализатор производительности для определения узких мест программы с целью выяснения эффективности распараллеливания.

Предварительную оценку ситуации можно провести на однопроцессорном компьютере, ибо имеется специальное матобеспечение, позволяющее на таком компьютере смоделировать параллельную систему и предсказать ее производительность для рассматриваемой задачи.

Система DVM может использоваться на параллельных системах SGI, HP, IBM, SUN и персональных компьютерах с системами UNIX, Windows 95/98/2000.

Более подробную информацию о DVM можно посмотреть по адресу www.keldysh.ru/dvm.

Глава 11. ПРОГРАММИРОВАНИЕ НА mpC

§ 1. Введение

Язык mpC является расширением языка C и предназначен для проведения параллельных вычислений на неоднородных сетях.

Особенности программирования на mpC:

- программист не указывает, сколько процессов работает в программе и на каких компьютерах они выполняются;
- для группы процессов, выполняющих некоторый параллельный алгоритм в mpC, вводится понятие сети. В простейшем случае сетью является группа виртуальных процессоров;
- задав сеть, программист определяет отображение виртуальных процессоров на реальные процессы параллеьной программы, и это отображение сохраняется на все время функционирования сети.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующую программу.

```
#include<mpc.h>
#define N 3
int [*] main(){net SimpleNet(N) mynet
[mynet] MPC_Printf("Hallo, word! \n");}
```

В данной программе сначала определяется сеть mynet, состоящая из N виртуальных процессоров, а потом на этой сети (на сети [mynet]) вызывается библиотечная функция MPC_Printf.

Выполнение программы состоит в параллельном вызове функции MPC_Printf теми N процессами программы, на которые отображены виртуальные процессоры сети mynet.

В результате каждый процесс пошлет сообщение "Hallo, world!" на терминал пользователя, с которого запущена программа, так что в результате пользователь получит приветствие "Hallo, world!" в количестве N штук — по одному от каждого процесса.

§ 2. Базовые и узловые функции

Вернемся к последней программе предыдущего параграфа. Спецификатор [*] перед именем main говорит, что код этой программы обязательно должен быть выполнен всеми процессами программы.

Функции, которые обязательно вызываются всеми процессами параллельной программы, называются базовыми.

Функции, которые не требуют вызова всеми процессами, называются узловыми. В нашем примере узловой функцией является MPC_Printf.

Узловые функции не связаны явно с заданием параллелизма или со взаимодействием процессов. Они могут вызываться как отдельным процессом, так и группой процессов.

```
#include<mpc.h>
#include<sys/utsname.h>
#define N 3
int[*] main()
{net SimpleNet(N) mynet;
struct utsname[mynet]un;
[mynet]unname(&un);
[mynet] MPC_Printf("Hello, world!
I'm on 705 \n",un.modename);}
```

Рассматриваемая программа выводит на терминал пользователся сообщения:

- "Hello, world!"
- имя компьютера, на котором процесс выполняется.

При этом определяется структура un, распределенная по сети mynet (то есть по всем процессам сети). Эти же процессы выполняют вызов функции unname, а поле nodename структуры un будет содержать ссылку на имя того же компьютера, на котором выполняется процесс.

Локальные копии распределенных переменных называются проекциями этих переменных на процессорах (или на процессах).

§ 3. Автоматические сети

Область видимости сети mynet ограничена блоком, в котором эта сеть определяется. При выходе из этого блока процессы программы, захваченные под виртуальные процессоры сети mynet, освобождаются и могут быть использованы для создания других сетей. Такие сети называются автоматическими.

Сети, время жизни которых ограничено лишь временем выполнения программы, называются статическими.

Статические и автоматические сети полностью аналогичны статическим и автоматическим переменным языка С.

Рассмотрим различия между статическими и автоматическими сетями. Вот программа, иллюстрирующая автоматическую сеть:

```
# include<mpc.h>
# include<sys/utsname.h>
# define Nmin 3
# define Nmax 5
int[*]main(){repl n;
for (n=Nmin; n<=Nmax; n++){
  auto net SimpleNet(n) anet;
  struct utsname[anet]un;
  [anet]unname(&un);
  [anet] MPC_Printf("An automatic network of % d;
  I'm on %s. \n",[anet]n,un.modename);
}
</pre>
```

При входе в блок на первом витке цикла создается автоматическая сеть из трех виртуальных процессоров (n=Nmin=3). При выходе из этого витка она уничтожается. При входе в блок цикла на втором витке создается новая автоматическая сеть из (теперь!) четырех виртуальных процессоров, которая также прекращает существование при выходе из блока. К моменту начала выполнения очередного витка цикла эта сеть уже не существует. На последнем витке создается сеть из пяти виртуальных процессоров (n=Nmax=5).

Поскольку каждый раз сеть создается заново, то имена компьютеров, распечатываемые функцией MPC_Printf, могут быть совершенно различными.

Замечание. Переменная n распределена по всем компьютерам. Ключевое слово repl (сокращение от replicated) информирует компилятор о том, что значения этой переменной у разных процессов параллельной системы равны между собой.

Переменные, значения которых равны для различных процессов сети, в mpC называются pазмазанными, а их значения называются pазмазанными значениями.

Компилятор контролирует свойство размазанности и предупреждает обо всех случаях, когда оно может быть нарушено.

§ 4. Статическая сеть

Начнем с примера статической сети:

```
# include <mpc.h>
# include<sys/utsname.h>
# define Nmin 3
# define Nmax 5
int[*] main()
{repl n;
for (n=Nmin; n<=Nmax; n++){
   static net SimpleNet(n) snet;
   struct utsname[snet]un;
   [snet]unname(&un);
   [snet] MPC_Printf("A static network of %d;
   I'm on %s.\n",[snet]n,un.modename);
   }
}</pre>
```

При входе в блок здесь на первом витке цикла создается сеть из трех виртуальных процессоров. При выходе из блока она не уничтожается, а становится невидимой, так что блок является не областью существования, а областью видимости сети (как и предписывается в языке C).

При выполнении блока на последующих витках новые сети не создаются, а становится видна та статическая сеть из трех виртуальных процессоров, которая была создана при первом вхождении в блок (на первом витке цикла), и которая, тем самым, не зависит от параметра n.

В результате работы программы несколько раз будет напечатан один и тот же набор имен компьютеров.

§ 5. Тип сети

Обязательной частью определения сети является ее тип. В рассмотренных ранее примерах определение сетевого типа SimpleNet находится среди прочих стандартных определений языка mpC в файле mpc.h, который включается в программу с помощью директивы #include.

Тип SimpleNet является простейшим параметризованным сетевым типом, который соответствует сетям, состоящим из n виртуальных процессоров, упорядоченных в соответствии со своим номером.

Рассмотрим программу

```
# include <mpc.h>
# define N 5
int[*]main()
{net SimpleNet(N) mynet;
  int [mynet]my_coordinate;
  my_coordinate=I coordof mynet;
  if (my_coordinate%2==0))
  [mynet] MPC_Printf("Hello, even world! \n");
  else
  [mynet] MPC_Printf("Hello, odd world! \n");
}
```

Из этой программы видно, как можно программировать выполнение вычислений различными виртуальными процессорами с различными координатами. В данной программе используется бинарная операция coordof, левым операндом в которой является координатная переменная I, а правым — сеть mynet. После присваивания my_coordinate = I coordof mynet значения проекций переменной my_coordinates будут равны координатам соответствующих виртуальных процессоров в сети mynet. В данном случае процессоры с четными номерами выдадут на терминал пользователя сообщение "Hello, even world!", а процессоры с нечетными номерами — "Hello, odd world!".

§ 6. Родитель виртуальной сети. Виртуальный хост-компьютер

Родитель создаваемой сети — это то звено, куда передаются результаты вычислений в случае прекращения существования виртуального хост-процессора. Рассмотрим фрагмент программы.

```
# include <mpc.h> nettype AnotherSimpleNet(int n){
   coord I=n;
   pount[0];
```

```
}
# define N 3 int[*] main(){net AnotherSimpleNet(N);
[host] mynet;
[mynet] MPC_Printf("Hallo, world! \n");
}
```

Здесь неявная спецификация сети заменена на явную. По умолчанию родитель имеет нулевые координаты в сети (иначе, например, parent [n-1]).

§ 7. Синхронизация работы сети

Рассмотрим следующую программу.

```
# include <mpc.h>
# define N 5
int[*] main()
{net SimpleNet(N) mynet;
  [mynet]:
  {int my_coordinate;
  my_coordinate=I coordof mynet;
  if (my_coordinate %2==0)
  MPC_Printf("Hallo, even world! \n");
  [(N)mynet] MPC_Barrier();
  if (my_coordinate %2==1)
  MPC_Printf("Hallo, odd world! %n");
  }
}
```

Эта программа выводит сообщение от виртуальных процессоров с нечетными координатами только после того, как будут выведены все сообщения от всех виртуальных процессоров с четными номерами.

Следует заметить, что MPC_Barrier — это сетевая функция. Это означает, что барьер установлен только для процессоров сети mynet.

В то время, как базовые функции выполняются для всех процессов программы (это — обязательное условие), сетевые функции

выполняются лишь для процессов данной сети. Можно рассматривать базовые функции как сетевые функции для сети, состоящей из всех процессов программы (такая сеть помечается именем *).

Таким образом, базовые сетевые и узловые функции различаются степенью интегрированности процессов, исполняющих каждый вид функций. Базовые функции — наиболее интегрированы: все процессы программы обязательно содержат код базовой функции: поэтому нет смысла говорить о параллельном вызове двух базовых функций. С другой стороны, наименее интегрированы узловые функции; они могут выполняться как отдельным процессом, так и группой процессов.

Сетевые функции занимают промежуточное положение между базовыми и узловыми функциями: они описывают вычисления и коммуникации на некоторой (абстрактной) сети, являющейся ее формальным параметром. Если две сетевые функции вызваны одновременно на двух непересекающихся сетях, то они будут выполняться параллельно. Таким образом, аппарат узловых и сетевых функций поддерживает параллелизм задач.

Описание библиотечной функции MPC_Barrier, находящееся в файле mpc.h, выглядит так

int [net SimpleNet(n) w] MPC_Barrier(viod);

Любая сетевая функция имеет специальный сетевой формальный параметр. Этот параметр принимает значение сети, на которой выполняется сетевая функция.

В данном случае описание сетевого параметра имеет вид

net SimpleNet(n) w

Данное описание, наряду с формальной сетью ${\tt w}$, на которой выполняется функция, вводит параметр ${\tt n}$ — число виртуальных процессоров этой сети.

§ 8. Подсети в языке mpC

Объявленное подмножество виртуальных процессоров сети называется подсетью; подсети служат для неявного описания обменов данными.

```
# include <string.h>
# include <mpc.h>
# include <sys/utsname.h>
 nettype Mesh (intm, int n)
  {coord I=m,J=n;
  parent [0,0]
# define MAXLEN 256
  int[*] main()
 {net Mesh (2,3) [host] mynet;
   [mynet]:
   {struct utsname un;
    char me[MAXLEN], neighbour[MAXLEN]
    subnet[mynet: I==0] row 0,
          [mynet: I==1] row 1;
    uname(&un);
    strcpy(me,un.nodename);
    [row 0]neighbour[]=[row 1]me[];
    [row 1]neighbour[]=[row 0]me[];
    MPC_Printf("I'm (%d, %d) from\" %S "\n",
    "My neighbour (%d, %d) is on %S \ln n',
    I coordof mynet, J coordof mynet, me,
    I coordof mynet+1, J coordof mynet, neighbour)
  }
 }
```

Здесь каждый виртуальный процессор сети mynet типа Mesh(2,3) выводит на терминал пользователя имя компьютера, на котором он размещен, а также имя компьютера, на который система поместила ближайший виртуальный процессор соседней строки.

Выполнение присваивания

```
[row 0]neighbour[]=[row 1]me[]
```

состоит в пересылке содержимого строки row 1 проекции массива me на каждый виртуальный процессор в строку row 0 проекции массива neighbour (опять-таки на каждый виртуальный процессор).

В результате получаем проекцию распределенного массива neighbour на виртуальный процессор сети mynet с координатами (0,j), содержащую имя компьютера, на котором размещен виртуальный процессор. Причем проекция распределенного массива me

на виртуальные процессы сети row 0 копируется в проекции распределенного массива neighbour на виртуальные процессы сети row 1.

Замечание. Иногда можно обойтись лишь неявным определением подсетей (без использования объявления subnet). В частности, это можно сделать в приведенном выше примере присваиванием

```
[mynet: \, I== 0]neighbour[]=[mynet: \, I== 1]me[];
[mynet: \, I== 1]neighbour[]=[mynet: \, I== 0]me[];
```

B результате программа упрощается без потери эффективности или функциональных возможностей.

Следует отметить, однако, что без явного определения подсети не всегда можно обойтись; например, сетевые функции нельзя вызывать на неявно определенных подсетях.

§ 9. Управление отображением виртуальных процессоров на реальные процессы параллельной программы

Определение сети приводит к отображению виртуальных процессоров на реальные процессы параллельной программы, которые производит система программирования mpC на основе поступающей к ней информации, минимизируя время выполнения программы. При этом система использует информацию о конфигурации и производительности вычислительной системы и отдельных ее компонентов, а также на информацию об объеме вычислений, которые необходимо выполнить в предъявленной программе.

В тех случаях, когда информация об объемах вычислений отсутствует, система считает, что всем виртуальным процессорам всех определенных сетей предстоит выполнить одинаковые объемы вычислений, и потому распределяет их по реальным процессам программы в соответствии с этим предположением.

Если объемы вычислений между точками синхронизации или обмена данными приблизительно одинаковы, то процессы в этих точках не будут простаивать в ожидании друг друга; таким образом программа окажется сбалансированной.

Однако, в случае значительных различий в объемах вычислений данное распределение заметно замедлит программу.

Рассмотрим следующий фрагмент программы.

```
typedef struct{double length; double width;
               double height;
               double mass;} rail;
        nettype HeteroNet(int n; double v[n]){
               coord I=n;
               node{I>=0: v[I]; };
               parent[0];
               }:
        double MassOfRail(double 1; double w;
                  double h; double delta) {
       double m,x,y,z;
       for(m=0.;x=0.;x<1; x+=delta)</pre>
         for(y=0.;y<w; y+=delta)</pre>
           for(z=0.;z<h; z+=delta)
             m+=Density(x,y,z);
       return m*delta*delta*delta;
int[*]main(int[host]argc,char**[hast]argv){
   repl N=[host]atoi(argv[1])
     static rail [host] s([host]N):
     repl double volumes[N];
     int [host]i:
     repl j;
     [host]InitializeSteelHedgehog(s,[host]N);
     for(j=0;j<N;j++);
       volumes[j]=s[j].length*s[j[.width*s[j].heigth;
     recon MassOfRail(0.2,0.04,0.05,0.005);
        {net HeteroNet(N.Volumes): mvnet:
          [mvnet]:
          {rail r;
           r=s[]:
           r.mass=MassOfRail(r.length,r.width,
                                       r.height,Delta);
           [host]Printf("The total weight is %g kg \n,
           [host]((r.mass)[+]));
          }
        }
      }
```

В данной программе определен сетевой тип HeteroNet. Первый параметр (с именем n) является целым скалярным — это число виртуальных процессоров сети. Второй параметр — \mathtt{v} — состоит из \mathtt{n} элементов типа double. Он используется для спецификации относительных объемов вычислений, выполняемых различными виртуальными процессорами. Определение сетевого типа HeteroNet coдержит необычное объявление node{I>=0: v[i];}, которое означает, что для любого I>=0 относительный обьем вычислений, выполняемый виртуальным процессором с координатой I, задается значением v[I]. Для параллельного вычисления общей точки массы металлической конструкции создается сеть mynet, состоящая из № виртуальных процессоров, каждый из которых вычисляет массу одного "рельса". Вычисление массы производится интегрированием с фиксированным шагом функции плотности Density по объему рельса. Поскольку объем вычислений пропорционален объему рельса, то в качестве второго параметра сети mynet используется "размазанный" массив nolumes, і-й элемент которого содержит объем і-го рельса.

Отображение виртуальных процессоров на компьютеры основывается на информации об их производительности. По умолчанию система mpC использует одну и ту же информацию о производительности всех участвующих в выполении программы процессоров. Эта информация появляется при установке системы mpC выполнением специальной тестовой программы. Однако, подобная информация является довольно грубой и может значительно отличаться от значений, реально достигаемых процессорами при выполнении кода данной программы. Поэтому mpC предоставляет специальный оператор recon, позволяющий программисту изменять оценку производительности компьютеров, настраивая систему на вычисления, которые предполагается выполнить. В примере этот оператор стоит перед определением сети mynet и непосредственно перед процедурой MassofRail с фактическими аргументами 0.2, 0.04, 0.05, 0.005.

В результате время, затраченное каждым процессором, используется для обновления оценки их производительности. Заметим, что основной объем вычислений как раз и приходится на выполнение процедуры MassOfRail, ибо именно он и составляет основные вычисления в сети mynet.

Замечание. Оператор recon позволяет обновлять оценку производительности процессоров во время выполнения программы. Это важно, так как система может быть загружена и другими вычислениями, которые могут повлиять на производительность системы по отношению к данной задаче.

§ 10. Учет затрат на передачу данных

Язык mpC имеет определенные возможности учитывать затраты на передачу данных.

В приведенной ниже программе моделируется движение нескольких групп тел под влиянием гравитационного притяжения.

Сила гравитации быстро уменьшается с увеличением расстояния, так что взаимодействия групп тел в условиях, когда группы удалены друг от друга, может быть заменено взаимодействием удаленных вируальных тел (с заменой каждой группы на виртуальное тело). В этой ситуации распараллеливание вычислений может быть достигнуто созданием для каждой группы своего (параллельного) процесса.

Каждый такой процесс хранит атрибуты всех тел группы, а также суммарную массу и координаты центра масс всех других групп.

Ядро программы составляет следующее определение сетевого типа.

```
nettype Galaxy(m, k, n[m]);
 1)
 2)
        coord I=m;
        node { I \ge 0: bench*((n[I]/k)*(n[I]/k)));};
 3)
        link { I>0: length*(n[I]*sizeof(Body)) [I]->[0];};
4)
 5)
        parent[0];
 6)
        scheme{
7)
          int i:
          par(i=0;i<m;i++)100%%[i];
8)
          par(i=1; i \le m; i++) 100\%[i] -> [0];
9)
      }:
     }:
     void[*]main(int[host] argc, char**[host] argv)
10)
11)
         TestGroup[]=(*AllGroups[0])[];
12)
         recon Update_group(TestGroup, TestGroupSize);
```

```
13) { netGalaxyNet(Nofg, TestGroupSize, NofB)g;
    }
}
```

Система программирования mpC отображает виртуальные процессоры абстрактной сети g на реальные параллельные процессы, составляющие параллельную программу. При этом система использует информацию о конфигурации и производительности физических процессоров и коммуникационных каналов и информацию о параллельных алгоритмах.

Рассмотрим приведенный фрагмент программы по строкам.

- 1) nettype Galaxy(m,k,n[m]) вводится имя Galaxy сетевого типа и список формальных параметров:
 - m, k скалярные величины типа целый;
 - n[m] вектор длины m;
- 2) coord I=m объявляется координатная переменная I, изменяющаяся от 0 до m-1.
- 3) node{ I>=0; bench*((n[I]/k)*(n[I]/k)));}; виртуальные процессоры привязываются к этой системе координат; описываются объемы вычислений, которые должны быть выполнены этими виртуальными процессорами. При этом
- а) в качестве единицы измерения испольуется объем вычислений, необходимый для расчета группы из k тел;
- б) предполагается, что і-й элемент n[i] равен числу тел в группе, обрабатываемых і-м виртуальным процессором;
- в) число операций, необходимых для обработки одной группы, пропорционально квадрату числа тел в группе;
- 4) link { I>0: length * (n[I]*sizeof(Body))[I]->[0]}; специфицируются объемы данных в байтах, передавемых виртуальным процессором во время выполнения; здесь і-й виртуальный процессор посылает данные всех своих тел хосту;
 - 5) parent [0] указание, что родитель имеет координату 0;

```
6) scheme{
7) int i;
8) par(i=0;i<m;i++)100%%[i];
9) par(i=1;i<m;i++)100%%[i]->[0];
};
```

— описываются, какие именно виртуальные процессоры взаимодействуют во время выполнения алгоритма: а) сначала виртуальные процессоры выполняют по 100% вычислений, б) затем виртуальные процессоры (кроме хоста) выполняют по 100% вычислений.

Остановимся еще на нескольких строках.

- 11) TestGroup[]=(*AllGroups[0])[]; инициализируется массив TestGroup
- 12) recon Update_group(TestGroup, \, TestGroupSize); обновление оценки производительности физических процессоров с фактическими параметрами TestGroup и TestGroupSize;
- 13) netGalaxyNet(Nofg, TestGroupSize, NofB)g; определение абстрактной сети g типа GalaxyNet с фактическими параметрами

Nofg — число групп; TestGroupSize — размер группы [массив]; NofB — число тел в і-й группе [массив].

Глава 12. О НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ ЯЗЫКАХ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

§ 1. О языке Оссат ("Бритва Оккама")

Язык разрабатывался для работы с транспьютерами.

Базовыми элементами языка являются $\partial e \kappa napauuu$ и три "процесса":

- присваивание;
- ввод;
- вывод.

Ввод/вывод аналогичны таковым в языке CSP, но каналы глобальны по отношению к процессам и имеют имена. Каждый канал должен иметь одного отправителя и одного получателя. Рекурсия не поддерживается.

Базовые процессы объединяются в обычные процессы с помощью так называемых *конструкторов*; существуют

- *последовательные* конструкторы (SEQ);
- *параллельный* конструктор (PAR);
- защищенный оператор взаимодействия.

В синтаксисе Оссат каждый базовый процесс, конструктор и декларация занимают omdenbhyo строчку; а deкnapaция заканчивается deoemouueм, в записи используются omcmynы.

 Π ример 1.

```
INT x,y:
SEQ
x:=x+1 # последовательное
y:=y+1 # увеличение значений x и y
```

 $\it 3$ амечание. Для параллельного исполнения вместо SEQ можно поставить PAR.

В языке Оссат существуют также конструкторы IF, CASE, WHILE, ALT (для защищенного взаимодействия). Кроме того, имеется механизм, называемый penликатором (похож на квантификатор).

Параллельные процессы создаются с помощью конструктора PAR; они взаимодействуют через каналы с помощью базовых процессов ввода ? и вывода !.

 $\Pi pumep~2.~\Pi$ рограмма вывода с клавиатуры на экран (программа "эхо"):

```
WHILE TRUE
BYTE ch:
SEQ
keyboard?ch
screen!ch
```

Можно написать программу, где имеется один канал с накоплением и два процесса.

Пример 3.

```
CHAN OF BYTE comm:

PAR

WHILE TRUE # процесс вывода с клавиатуры

BYTE ch:

SEQ

keyboard?ch

comm!ch

WHILE TRUE # процесс вывода на экран

BYTE ch:

SEQ

comm?ch

display!ch
```

Замечание. Использование отступов делает ненужным закрывающие ключевые слова.

Конструктор ALT обеспечивает защищенное взаимодействие. Защита состоит из

- 1) процесса ввода или;
- 2) логического выражения и процесса ввода или;
- 3) логического выражения и конструктора ${\tt SKIP}.$

Пример 4. Процедурный вариант копирования

```
PROC Copy(CHAN OF BYTE West, Ask, East)
BYTE c1, c2, dummy:
SEQ
West?c1
WHILE TRUE
ALT
West?c2
SEQ
East!c1
c1:=c2
Ask?dummy # процессу East нужен байт
SEQ
East!c1
West?c1
```

§ 2. О языке CSP

Современные версии языка CSP позволяют его использовать в различных аспектах моделирования приложений:

- протоколов взаимодействия;
- протоколов безопасности;
- протоколов отказоустойчивых систем.

Все взаимодействия происходят в результате *событий*. Основными являются операторы:

- npucoe динения (npe фиксации последовательного выполнения);
 - рекурсии (повторения);
 - защищенного выбора (недетерминированного выбора).

Оператор npucoeduneния используется для задания последовательного порядка событий.

 $\it \Pi pumep~1.~$ Если red и green — события, то светофор, который один раз включает green, а потом red, задается так

```
green --> red --> STOP
```

Здесь STOP — простейший процесс в CSP, который не нуждается во взаимодействии.

Пример 2. Для описания повторения используется рекурсия; в частности, циклическое включение green и red имеет вид

```
LIGHT=green --> red --> LIGHT
```

Для описания взаимодействия процессов друг с другом используются каналы.

Пример 3.

```
COPY1=West?c:char --> East!c --> COPY1 # копирование по символу
```

Пример 4. Программа вычисления НОД:

Здесь используются два взаимно-рекурсивных процесса. Первый GCD ждет события ввода и вызывает второй процесс GCD(). Второй процесс повторяется до выполнения условия x=y, затем выводит результат и запускает первый процесс для ожидания еще одного события ввода.

Пример 5. Следующая программа определяет поведение системы, буферизующей один или два символа.

Второй процесс использует оператор защищенного выбора []:

- защита в первой части ждет ввода из канала West;
- защита во второй части ждет вывода из канала East.

Выбор недетерминирован: возможны оба взаимодействия.

§ 3. О языке Linda

Главной отличительной особенностью языка Linda, является обобщение идеи разделяемых переменных и асинхронной передачи сообщений. Язык Linda предоставляет программистам эффективные средства создания параллельных программ: любой последовательный язык можно дополнить примитивами из Linda и получить параллельный вариант.

Ядром языка являются процедуры (выполняемые асинхронно и называемые кортежами процессов), помеченные записи — кортежи данных, пространство кортежей — пространство совокупностей взаимосвязанных данных, реализуемое в виде разделяемой ассоциативной памяти. Пространство кортежей похоже на единый разделяемый канал связи, но кортежи не упорядочены. Для доступа к пространству кортежей в языке имеются шесть примитивов (операций межпроцессорного обмена данными):

 \mathtt{OUT} — операция помещения кортежа в пространство кортежей (запись — аналог \mathtt{send} ; при этом кортеж помещается в в упомянутый ранее канал);

IN — операция извлечения кортежа из пространства кортежей (чтение — аналог receive: кортеж извлекается из канала);

EVAL — операция создания процесса;

INP — операция ввода (неблокирующая);

RDP — операция чтения (неблокирующая);

RD — операция просмотра (блокирующая).

Пространство кортежей состоит:

- из множества пассивных кортежей;
- из множества активных кортежей.

Каждый кортеж имеет вид

где метка "tag" является строкой (для различения кортежей). Значения (value_1, . . ., value_n) — это нуль или несколько значений данных (целых чисел, действительных чисел или массивов).

Для обработки кортежей служат три $\mathit{basobux}$ не $\mathit{denumbx}$ примитива: OUT, IN, RD.

- помещение кортежа в пространстве кортежей (аналогично оператору ${\tt send},$ но вместо канала рассматривается пространство кортежей).

— извлечение кортежа из пространства кортежей (аналогично оператору receive).

Каждое поле field_i может быть выражением или формальным параметром вида ?var, где var — имя переменной выполняемого процесса.

Аргументы примитива IN называются *шаблоном*. Процесс IN ждет, пока в пространстве кортежей появится хотя бы один кортеж, *соответствующий* шаблону, и удаляет его из пространства кортежей.

Кортеж d coomsemcmsyem шаблону t, если

- 1) их метки идентичны;
- 2) число полей кортежа ${\tt d}$ и шаблона ${\tt t}$ одинаково;
- 3) значение каждого выражения в шаблоне t (если оно указано) равно соответствующему значению в кортеже данных d.

После того, как кортеж будет удален из пространства кортежей формальным параметрам шаблона присваивается соответствующие значения.

Пример 1. Реализация семафора.

Пусть sem — символьное имя семафора. Тогда операция V над семафором (увеличение семафора на единицу) будет иметь вид OUT("sem"), а операция P над семафором (ожидание увеличения семафора на единицу, если он был нуль) будет иметь вид IN("sem").

3амечание. Операции Р и V состоят из следующих неделимых операций: P(s): <await(s>0); s=s-1;>, V(s): <s=s+1;>.

Значение семафора — число кортежей \mathbf{sem} в пространстве кортежей.

Для моделирования массива семафоров используется дополнительное поле, представляющее собой индекс массива, например

```
IN("sems", i); # P[sems[I]]
OUT("sems", i); # V[sems[I]]
```

Базовый примитив RD (блокирующая операция просмотра) используется для просмотра кортежей в пространстве кортежей (без их изъятия из этого пространства — в отличие от примитива IN). Если $\mathbf t$ — шаблон, то RD($\mathbf t$) приостанавливает процесс до тех пор, пока в пространстве кортежей не появится кортеж, соответствующий шаблону $\mathbf t$.

Примитивы INP и RDP выполняют те же действия, что IN и RD, но не являются блокирующими; они кроме того возвращают значение TRUE или FALSE в зависимости от того, присутствует или нет кортеж с данным шаблоном в пространстве кортежей.

Примитив INP служит для извлечения кортежа из пространства кортежей, если он там имеется (с данным шаблоном);

примитив RDP предназначен для чтения кортежа (но, в отличие RD оставляет его в пространстве кортежей, то есть является неблокирующим).

Пример 2. Реализация барьера-счетчика.

```
OUT("barier", 0);
```

- # создание элемента barier в
- # пространстве кортежей с нулевым
- # значением счетчика

Достигнув барьера тот или иной процесс извлекает счетчик из ΠK :

```
IN("barier", ?counter);
# получение кортежа "barier"
OUT("barier", counter=counter+1);
# увеличение счетчика на единицу
```

Далее процесс ждет, пока к барьеру придут все **n** процессов с помощью блокирующего чтения

При появлении указанного кортежа в пространстве кортежей (ПК) процесс продолжает работу.

Шестой (и последний) примитив в языке Linda — примитив, создающий новые кортежи

Среди **expr_i** могут быть процедуры или функции. При создании кортежа они вычисляются, причем все поля кортежа вычисляются *параллельно*. Меткой кортежа становится метка "tag", а полями — значения после вычисления функций и процедур.

 $\Pi puмер 3.$ Рассмотрим параллельный оператор

Ему соответствует С-программа, обогащенная примитивами Linda

```
for(i=1; i<=n; i++)
EVAL("a", i, f(i));</pre>
```

В пространстве кортежей оказывается соответствующие ${\tt n}$ кортежей. Пример 4. Обмен сообщениями "с помощью каналов"

```
OUT("ch", expressions);
— посылка в "канал".

IN("ch", expressions);
— получение из "канала".
```

§ 4. Портфель задач

Реализация параллельных вычислений возможна с использованием так называемого $nopm \phi ens$ задач.

Задача здесь представляет независимую единицу работы. Задачи помещаются в "портфель", разделяемый всеми процессами, работающими по программе

```
while(true) {
    [получить задачу из "портфеля"];
    if([задач больше нет])
        break; # выход из цикла
    fi
}
```

Парадигма портфеля задач имеет следующие положительные черты:

- 1) она весьма проста, так как для работы достаточно соблюсти всего лишь несколько требований:
 - нужно дать представление задач;
 - определить портфель (набор задач);
 - дать программу выполнения задачи;
 - определить критерий ее окончания;
- 2) программы с использованием портфеля задач легко масштабируются простым изменением числа процессов (при этом нельзя забывать, что производительность может не измениться, если число процессов больше числа задач);
- 3) упрощается балансировка нагрузки: освободившиеся процессы берут на себя решение новых задач из портфеля (пока задач в два или три раза больше, чем процессов, загрузка процессов окажется приблизительно одинаковой).

Рассмотрим решение *задачи о генерации простых чисел* (решето Эратосфена) с помощью портфеля задач, используя C-Linda (эта задача уже рассматривалась ранее на языке CSP).

Числа-кандидаты на простое число хранятся в пространстве кортежей. Управляющий процесс собирает результаты и помещает числа-кандидаты в портфель.

Каждый процесс удаляет число-кандидат из портфеля и проверяет, является ли оно простым, деля его на ме́нышие простые числа. Для реализации этой схемы (т. е. для того, чтобы проверить, что все ме́нышие простые числа уже имелись) проверять числа-кандидаты нужно в возрастающем порядке. Возможна приостановка рабочего процесса в ожидании, что другой процесс сгенерирует ме́нышее простое число, но взаимная блокировка двух и более процессов исключается.

Пример. (Генерация простых чисел на языке C-Linda).

РАБОЧИЙ ПРОЦЕСС

```
# include "linda.h"
# define LIMIT 1000
            /* верхняя граница числа простых чисел */
void worker() { /* функция без параметров */
  int primes[LIMIT]={2,3} /* таблица простых чисел */
  int numPrimes=1, i, candidate, isprime;
  /* numPrimes - номер очередного простого числа */
  /* циклическое получение кандидатов и их проверка */
  while(true) {
    if(RDP("stop"))
      /* проверка завершения: появился ли
         в пространстве кортежей "stop" */
      return; /* выход из функции */
    IN("candidate", ?candidate); /* получить кандидата */
    OUT("candidate", candidate+2);
    /* вывод следующего нечетного в качестве
       кандидата погружаем в ПК */
    i=0; isprime=1;
    while(primes[i]*primes[i]<=candidate) {</pre>
      /* далее нет необходимости проверять
         ибо на остальные числа делится не может */
      if(candidate%primes[i]==0){
```

```
isprime=0; break;
}
i++;
if(i>numPrimes) { /* требуется следующее простое */
numPrimes++;
RD("prime", numPrimes, ?primes[numPrimes]);
}
/* сообщаем результат управляющему процессу */
OUT("result", candidate, isprime);
/* погружаем в ПК результат */
}
```

УПРАВЛЯЮШИЙ ПРОЦЕСС

```
real_main(int argc, char*argv[]) {
/* argc - число аргументов командной строки
   (больше или равно единицы)
   char*argv[] - массив символьных указателей,
   в котором каждый элемент
   указывает на аргумент командной строки */
int primes [LIMIT] = {2,3}
   /* локальная таблица простых чисел */
int limit, numWorkers, i, isprime;
int numPrimes=2, value=5;
limit=atoi(argv[1];) /* считать командную строку */
numWorkers=atoi(argv[2]);
   /* создать рабочие процессы и поместить их в портфель
   число пять (первый кандидат): */
for (i=1; i<=numWorkers; i++)</pre>
  EVAL("worker", worker());
   /* создание рабочих процессов в ПК */
OUT("candidate", value); /* - создание кандидата в ПК;
   получить результаты рабочих процессов
   в порядке возрастания: */
while(numPrimes<limit) {</pre>
  IN("result", value, ?isprime); /* извлечь кандидата */
```

```
if(isprime){ /* поместить результат в таблицу и в ПК */
    primes[numPrimes]=value; /* расширить таблицу */
    OUT("prime", numPrimes, value);
    /* -- погрузить простое в ПК */
    numPrimes++;
}
value=value+2;
}
/* завершить рабочие процессы, вывести простые числа */
OUT("stop"); /* погрузить "stop" в ПК */
for (i=0; i<=limit; i++)
    printf("%d\n", primes[i]);
    /* распечатать массив primes */
}</pre>
```

 $\it Замечание. \$ Генерацией новых кандидатов в $\it \Pi K$ занимаются рабочие процессы.

Головная программа сначала выполняет один процесс:

- 1) она *начинает* работу с чтения аргументов командной строки для определения, сколько нужно простых чисел (limit) и сколько процессов можно использовать (numWorkers);
- 2) затем используется примитив EVAL для cosdanus рабочих процессов;
- 3) далее используется примитив **OUT** для *помещения* в пространство кортежей числа-кандидата пять;
- 4) для получения результатов от рабочих процессов используется примитив IN (извлекает простые числа из ΠK), причем результаты получаются в *порядке возрастания* простых чисел;
- 5) получив простое число программа помещает его и его номер в пространство кортежей, а также дополняет таблицу простых чисел:
- 6) работа завершается, когда управляющий процесс real_main получает limit простых чисел: управляющий процесс сообщает об остановке, помещая в ПК кортеж "stop";
 - 7) real_main распечатывает таблицу простых чисел primes.

Что делают рабочие процессы?

- 1) каждый рабочий процесс многократно nonyuaem число-кандидат из ΠK ;
 - 2) проверяет, простое ли оно;

- 3) отправляет его управляющему процессу, помещая в ПК;
- 4) помещает *следующее* нечетное число в ПК (таким образом, в ПК находится не более одного числа-кандидата);
- 5) каждый рабочий процесс *поддерживает локальную табли- чу простых чисел* и дополняет ее, извлекая простые числа из ПК, причем в строго возрастающем порядке;
- 6) на каждой итерации рабочий процесс *проверяет*, не нужно ли ему *остановиться* с помощью неблокирующего примитива RDP, который возвращает значение TRUE, если в ПК есть кортеж "stop".

Замечание. К тому моменту, когда будет получено limit простых чисел, будет проверено больше чисел-кандидатов, чем необходимо. Для исключения этого эффекта необходимо существенно увеличить число передаваемых сообщений.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Алгоритм 17

Архитектура вычислительных систем 11, 127

Асимптотическая загруженность 57

Ациклический граф 43

Асинхронный режим 79

Базовая вычислительная система 68

Безусловный конвейерный вычислитель 98

Безусловное функциональное устройство 65

Висячая вершина 41

Временная развертка базовой вычислительной системы 68

Выравнивание массивов 164

Высота параллельной формы 19

Вычислительный алгоритм 63

Вычислительная секция 127

Гомоморфизм графов 48

Гомоморфный образ 48

Граф 41

Граф конвейера 98

Двумерный граф 116

Директивы Open MP 135

Длина пути 43

Дуга 43

Загруженность устройства 56

Закон Амдала 124

Зацепление векторных устройств 128

Зацепление конвейерных устройств 108

Изолированная вершина 41

Изоморфизм графов 47

Канал в Linda 195

Каноническая параллельная форма 50

Клетка 117

Клеточное подразделение 117

Коммуникатор MPI 150

Конвейерная вычисления 13

Конвейерный вычислитель 97

Конвейеризация 15

Конвейерное функциональное устройство 55

Конструкторы 188

Контур 43

Кортеж *192*

Кратные ребра 41

Кратный элементарный гомоморфизм 48

Критический путь 43

Критические секции 144

Локальные переменные 136

Максимальная параллельная форма 19,50

Межпроцессорное взаимодействие 127

Многопроцессорные системы 14

Мультиграф 42

Направленный граф 51

Независимый гомоморфизм 48

Неограниченная параллельная вычислительная система 21

Нить 136

Нить-мастер 136

Объединение графов 47

Общие переменные 136

Оператор recon 183,186

Параллельные области 136

Параллельная форма 19

Пиковая производительность 57

Планарный граф 116

Подграф 47

Портфель задач 195

Прообраз 48

Пропускная способность канала 64

Простая цепь 41

Простое функциональное устройство 55

Простой граф 42

Простой элементарный гомоморфизм 48

Процесс в MPI 150

Псевдоалгоритм 18

Псевдограф 42

Пустой граф 42

Путь 43

Рабочий процесс в Linda 196

Развертка безусловного конвейерного вычислителя 102

Разделяемые переменные 136

Разделяемые ресурсы 127

Размазанные значения в mpC 176

Размазанные переменные mpC 176

Распараллеливание 3

Реальная производительность 57

Регистры *128*

Регулярный решетчатый граф 120

Режим максимального быстродействия 80

Решетчатый граф 53

Связный гомоморфизм 48

Связный граф 42

Синхронизированная система 79

Синхронный режим 79

Систолические массивы 112

Систолические ячейки 112

Смежные вершины 41

Собственные переменные 136

События в CSP 191

Составная цепь 41

Стабильная работа 57

Степень вершины 41

Стоимость операции 56

Стоимость работы 56

Схема сдваивания 21

Такт 55

Технология Open MP 135

Управляющий процесс в Linda 197

Уравновешенная базовая система 79

Ускорение 62

Условное функциональное устройство 65

Функции одинакового порядка 27

Функциональное устройство 55

Характеристика Эйлера 117

Частично упорядоченный граф 43

Шаблон в Linda 192

Ширина параллельной формы 19

Цепь 41

Цикл 42

Эквивалентные функции 27

Элементарный цикл 42

Литература

- 1. Воеводин В.В. Математические модели и методы в параллельных процессах. М., 1986. 296 с.
- $2\,.$ Kopнees~B.B. Параллельные вычислительные системы. М., 1999. 320 с.
- 3. Yukiya Aoyama, Jun Nakano. RS/6000 SP:Practical MPI Programming. IBM. Technical Support Organization., 2000. 221 p. www.redbook.ibm.com
- 4. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. СПб., 2002. 608 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ
Глава 1. О ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ
РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ5
§ 1. Введение
§ 2. О некоторых вычислительных задачах
$\S 3$. Численный эксперимент и его целесообразность9
$\S4.$ Об архитектуре вычислительных систем
4.1. Однопроцессорные системы11
4.2. Многопроцессорные системы
4.3. Трудности использования многопроцессорных ВС .14
4.4. Идея конвейерных вычислений
4.5. О классификации многопроцессорных систем 15
4.6. Примеры высокопроизводительных ВС16
§ 5. О понятии "алгоритм"17
§ 6. Параллельная форма алгоритма
§ 7. О концепции неограниченного параллелизма
§ 8. О схеме сдваивания
§ 9. О вычислении степени на параллельной системе 23
§ 10. О взаимоотношении числа данных и высоты
параллельной формы
Глава 2. О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ
ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ В КОНЦЕПЦИИ
НЕОГРАНИЧЕННОГО ПАРАЛЛЕЛИЗМА27
$\S 1$. Предварительные соглашения
§ 2. Распараллеливание умножения матрицы на вектор $ \dots 28$
§ 3. Распараллеливание перемножения матриц 28
$\S4.$ О распараллеливании одного рекуррентного процесса 29
§ 5. Об LU-разложении
§ 6. Распараллеливание LU-разложения трехдиагональной
матрицы34
§ 7. О распараллеливании процесса отыскания обратной
матрицы

Глава 3. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ГРАФОВ
В СВЯЗИ С РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕМ41
§1. О понятии графа41
§ 2. Ориентированный граф42
§ 3. Топологическая сортировка
§ 4. Примеры графов параллельных форм
§ 5. Изоморфизм графов. Операции гомоморфизма 47
§ 6. Построение графов параллельных форм
§ 7. Направленные графы и параллельные формы51
Глава 4. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УСТРОЙСТВА 55
§ 1. Некоторые определения
§ 2. Свойства простых и конвейерных функциональных
устройств
§ 3. О времени реализации алгоритма
§ 4. Ускорение при распараллеливании
Глава 5. АЛГОРИТМЫ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ
СИСТЕМЫ
§ 1. О соотношении графов алгоритма
и вычислительной системы
§ 2. Базовая вычислительная система
§ 3. К построению графа вычислительной системы
Глава 6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И РЕАЛИЗАЦИЯ
АЛГОРИТМОВ75
$\S 1$. Программы реализации алгоритмов
1.1. Условия реализуемости алгоритмов
1.2. О времени выполнения алгоритмов
1.3. Уравновешенность базовой системы.
Режим максимального быстродействия79
§ 2. Матричные представления графов алгоритмов 82
2.1. Матрицы инциденций и смежности
2.2. О реализации алгоритма с данной
матрицей инциденций83
2.3. Об использовании памяти для хранения
промежуточных результатов
2.4. Задача отображения алгоритмов
на вычислительные системы как задача
минимизации функционала

2.5. О представлении графа алгоритма	
в пространстве \mathbb{R}^n . Условия существования	
циклов	9
$\S 3.\ \text{Об}\ NP$ -сложности задачи отыскания	
графа вычислительной системы из графа	
алгоритма9	4
3.1. Метод перебора	
3.2. О сужении класса задач	
5.2. О сумсини класса зада i	U
Глава 7. ПАРАЛЛЕЛИЗМ ПРИ ОБРАБОТКЕ	
ИНФОРМАЦИИ	7
·	
§ 1. Конвейерные вычисления	
1.1. Безусловные конвейерные вычислители 9	7
1.2. Развертка безусловного конвейерного	
вычислителя	
§ 2. Векторные вычислительные машины10	
2.1. Векторные операции и векторная память10	
2.2. О зацеплении конвейерных устройств 10	
§ 3. Систолические массивы	1
3.1. Понятие о системах с жестко заданной	
конфигурацией. Систолические ячейки	
и систолические массивы11	1
3.2. Исходные предположения. Принцип	
близкодействия11	5
3.3. Клеточные подразделения. Характеристика	
Эйлера11	7
3.4. Систолические массивы и регулярные	
графы12	0
§ 4. Об архитектуре параллельных суперкомпьютеров12	2
4.1. О наиболее мощных современных	
компьютерах12	2
4.2. О сложных вычислительных задачах	3
4.3. Виды обработки данных	
4.4. Об истории развития параллелелизма	
4.5. Об архитектуре векторно-конвейерной	-
супер-ЭВМ CRAY C90	7

Плава 8. О ТЕХНОЛОГИИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ ОРЕN MP
§ 1. Трудности перехода от последовательных программ
к параллельным
§ 2. Введение в технологию Open MP
§ 3. Директивы Ореп MP. Описание
параллельных областей
§ 4. Параллельные секции и их вложенность
§ 5. Распределение работы. Программирование
на низком уровне
§ 6. Выполнение операторов цикла
§ 7. Параллелизм независимых фрагментов
§ 8. Классы переменных
§ 9. Критические секции
§ 10. Другие возможности Ореп MP
10.1. Синхронизация
10.2. Участок нити-мастера
10.3. Последовательное выполнение
отдельного оператора145
10.4. Гарантированное поддержание когерентности 146
§ 11. Привлекательные черты технологии Open MP
Глава 9. О ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТАНДАРТА МРІ148
§ 1. Введение
§ 2. Элементы идеологии стандарта МРІ149
$\S 3.$ О реализации разветвлений на параллельной системе .152
§ 4. О программировании вычислений на параллельной
системе. Процедура MPI_REDUCE \hdots .153
§ 5. Перечень основных процедур стандарта MPI
Глава 10. ТЕХНОЛОГИЯ
ПРОГРАММИРОВАНИЯ DVM162
§ 1. Основные принципы
$\S2$. Распределение массивов
§ 3. Выравнивание массивов
§ 4. Параллельное выполнение циклов
\S 5. Отображение задач
§ 6. Соседние общие данные

§ 7. Удаленные данные	160
§ 8. Редукционные данные	
§ 9. Пересеченные данные	170
§ 10. Пример программы. Отладка. Заключительные	
киньгэмьс	171
Глава 11. ПРОГРАММИРОВАНИЕ НА mpC	. 174
§ 1. Введение	174
§ 2. Базовые и узловые функции	
§ 3. Автоматические сети	
§ 4. Статическая сеть	
§ 5. Тип сети	
§ 6. Родитель виртуалььной сети. Виртуальный	
хост-компьютер	178
§ 7. Синхронизация работы сети	
§ 8. Подсети в языке mpC	
§ 9. Управление отображением виртуальных процессоров	100
на реальные процессы параллельной программы	189
§ 10. Учет затрат на передачу данных	
у 10. У чет затрат на передачу данных	100
Глава 12. О НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ ЯЗЫКАХ	
	100
ПРОГРАММИРОВАНИЯ	
§ 1. О языке Оссат ("Бритва Оккама")	
§ 2. О языке CSP	. 190
§ 3. О языке Linda	192
§ 4. Портфель задач	195
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	
Литература	ZU3