Afleveringsopgave 5

INTRODUKTION TIL STATISTIK OG SANDSYNLIGHEDSTEORI

Kristopher B.E. Märcher, studienummer: 202205825

25.9.2023

[Stat/Aflevering/Billeder til aflevering/Afleveringsopgave 5.png]

a

Vi ved her at range for X er: $R_X = 1,2,3,4,5,6$ Eftersom det er alle mulige øjne man kan få på en normal terning. Desuden ved vi at for hver af øjnene er der $\frac{1}{6}$ sandsynlighed for at man får det antal øjne
for at regne middelværdien for gevinsten gør man således:

$$1\frac{1}{6}+2\frac{1}{6}+3\frac{1}{6}+4\frac{1}{6}+5\frac{1}{6}+6\frac{1}{6}=3.5$$

Dette udfra definition 3.11.
Det vil altså sige at den gennemsnitlige gevinst er 3.5.

b

W kan fortolkes som at hvis det første slag er mindre end fire, det vil sige 1,2 og 3 øjne, så slår man med terningen igen. Hvis den er 4 eller derover beholder man sit kast. Dette giver god mening da ved det første slag har fået mere end den gennemsnitlige gevinst. Og ellers har man fået mindre, og prøver nu at få mere.

c

For det første vil vi her konstruere Pw, altså PMF'en for strategien W. Først kan vi definere $R_w = \{1,2,3,4,5,6\}$ Eftersom man stadig har mulighed for at tjene 1-6, fordi man stadig kan "ende" med det antal øjne. Desuden hvis vi definere W som en funktion der tager 2 terninge kast,X og Y, kan man definere funktionen W som en funktion med udseende:

$$W:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

Så skal vi udfra starten af kapitel 3.2.3 om hvordan man PMF for en funktion Y, givet PMF for X. I dette tilfælde er vores Y funktionen W og X er PMF'en for et terninge kast.
Først ved vi at PMF for et normalt terninge kast ser ud således:

$$P_x(X) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{X=1} \\ \frac{1}{6} & \text{X=2} \\ \frac{1}{6} & \text{X=3} \\ \frac{1}{6} & \text{X=4} \\ \frac{1}{6} & \text{X=5} \\ \frac{1}{6} & \text{X=6} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

Vi skal altså nu udfra dette finde sandsynligheden for alle i rangen for funktionen w.
Vi starter her med at finde:

$$P_W(1) = P(W = 1) = P(w(x,y) = 1)$$

Dette er den når den sidste værdi er 1. Det vil altså sige at vi på første slag, X, har slået noget der er mindre end 4, og at det andet slag, Y, er 1. Deuden skal der siges at det antages at slag 1 og slag 2 er uafhængige, eftersom det første slag ikke påvirker vores andet slag. Til dette har vi disse muligheder og denne sandsynlighed:

$$P(Y = 1|X < 4) = P(Y = 1 \cap X < 4) = P(Y = 1)P(X < 4) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$$

Var der i sidste trin bliver benyttet sig af law of total probability fra side 52, eftersom at begge to (både X og Y) er partitioner af sample space. Det samme gælder for de videre udregner af PMF for W, men her vil jeg ikke nævne det.
Hvis man udregner videre får man.

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Det vil altså sige at der $\frac{1}{12}$ sandsynlighed for at man tjener 1 igen ved W strategi. For 2 og 3 er det det samme fordi de følger samme mønster. Her er det bare Y=2 og Y=3 i stedet, hvilket også vil give os $\frac{1}{12}$ sandsynlighed for at tjene disse igen.
For 6, og for den sags skyld i samme stil også 4 og 5 har vi:

$$P_W(6) = P(W = 6) = P(w(x,y) = 6) = P(Y \in \mathbb{R}_y|X = 6) =$$

$$P(Y \in \mathbb{R}_y \cap X = 6) + P(Y = 6|X < 4) = P(Y \in \mathbb{R}_y)P(X = 6) + P(Y = 6)P(X < 4) =$$

$$1\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{1}{6} + \frac{3}{36} = \frac{9}{36} = \frac{3}{12}$$

Dette da de 2 muligheder for 6 er at man enten slå 6 på første slag, og vælger dette, eller at man slår mindre en fire på det første og så slår 6 på det andet. Sagt tidligere

er det det samme princip for 4 og 5. derved får 4,5 og 6 alle sandsynligheden $\frac{3}{12}$
Det vil altså sige at hvis vi konstruere PMF for W får vi en PMF som følger:

$$P_W(k) = \begin{cases} \frac{1}{12} & \text{k=1} \\ \frac{1}{12} & \text{k=2} \\ \frac{1}{12} & \text{k=3} \\ \frac{3}{12} & \text{k=4} \\ \frac{3}{12} & \text{k=5} \\ \frac{3}{12} & \text{k=6} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2}$$

For at regne middelværdien ud skal vi nu blot benytte os af definitation 3.11 for at finde middelværdien givet en PMF:

$$6 \cdot \frac{3}{12} + 5 \cdot \frac{3}{12} + 4 \cdot \frac{3}{12} + 3 \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot \frac{1}{12} = 4.25$$

Derved er den gennemsnitlige gevinst ved strategi W = 4.25.