Institut for Matematik
AARHUS UNIVERSITY

Introduktion til
Sandsynlighedsteori og Statistik
Markus Kiderlen
November 16, 2023

UGESEDDEL 13

Forelæsningerne i Uge 11: Vi har afsluttet Afsnit 8.4 og er startet på Afsnit 8.5 hvor vi er kommet til side 503 lige inden definitionen af *Coefficient of Determination*. Vi har også gennemgået Solved Problem 5 på siderne 511–512.

Forelæsningerne i Uge 12:

1. **Forelæsning 23 (21. november):** Vi vil diskutere lidt nærmere Øvelserne 23 og 24 i Afsnit 8.6, og definere *Coefficient of Determination* på siderne 504–506. Dette vil afslutte vores gennemgang af Kapitel 8 og vi vil derefter starte på noterne om Matricer, der findes på Brightspace under Supplerende Noter. Hvis tiden tillader det vil vi starte på Afsnit 11.2 om Markovkæder, der er vores sidste store emne i kurset.

2. **Forelæsning 24 (23. november):** Vi gennemgår Afsnit 11.2 til og med Delafsnit 11.2.3 (side 636).

Bemærkninger vdr. Markovkæder: Nedenfor er beskrevet to nyttige resultater for Markovkæder.

Sætning D. Lad $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ betegne en Markovkæde med tilstandsrum S og overgangsmatrix $P = [p_{i,j}]$. Så gælder der for alle $n \geq 1$ og $i_0, \ldots, i_n \in S$

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_0) p_{i_0,i_1} p_{i_1,i_2} \cdots p_{i_{n-1},i_n}.$$

Følgende algoritme er anvendelig når man skal checke om tilstandene i en endelig Markovkæde er rekurrente eller transiente.

Sætning E. Lad $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ betegne en Markovkæde med **endeligt** tilstandsrum S. Lad $i \in S$ være givet.

1. i er transient $\iff$
   der findes $j \in S$ med $i \to j$ men $j \not\to i$.

2. i er rekurrent $\iff$
   for alle $j \in S$: $i \to j$ medfører $j \to i$.

3. Hvis Markovkæden er irreducibel så er alle tilstande rekurrente.

Teoretiske øvelser i Uge 13 (27. november – 3. december): Med undtagelse af Del 1.1 omhandler alle opgaver Markovkæder og de vil kunne regnes efter forelæsningen torsdag d. 23. november. I Del 1.1 kan du bruge resultaterne fra opgave 23 (ISPR s.517-518), som bliver gennemgået tirsdag den 22. november.

Del 1:

1. Eksamen, Vinter 2020/2021, Opgave 7.

   For en x-værdi på $x = 0.4$ lad Y betegne den tilhørende y-værdi under vores model. Angiv også den prædikterede værdi for Y.

2. Sektion 11.5: Øvelse 13.

3. Eksamen, Vinter 2018/2019, Opgave 4.

4. Eksamen, Sommer 2019 (reeksamen), Opgave 8(1).

Del 2:

1. Øvelse A nedenfor.

2. Eksamen, Vinter 2017/2018, Opgave 5(2).

3. Eksamen, Sommer 2018 (reeksamen), Opgave 7(1).

4. Eksamen, Vinter 2022/2023, Opgave 9.
   Hvis ikke der er tid, kan man springe 9.2 over.

Øvelse A. En taxachauffør kører mellem lufthavnen A og to hoteller B og C i henhold til følgende regler. Hvis han er i lufthavnen, kører han hen til et af de to hoteller; der er lige stor sandsynlighed for at han besøger hver af hotellerne. Hvis han er på et af hotellerne vender han tilbage til lufthavnen med sandsynlighed 3/4 og kører til det andet hotel med sandsynlighed 1/4.

(a) Argumenter udfra ovenstående beskrivelse at taxachaufførens placering kan beskrives ved brug af en Markovkæde.

(b) Bestem overgangsdiagrammet og overgangsmatricen for Markovkæden.

(c) Antag, at taxachaufføren begynder i lufthavnen til tidspunkt 0. Find sandsynligheden for at taxachaufføren er på hver af de tre placeringer A, B eller C til tidspunkt 2, samt sandsynligheden for at han er på hotel B til tidspunkt 3.

Afleveringsopgave 13: En optælling fra 2008 viste at 36% af husstandene i Aarhus var boligejere, mens de resterende var lejere. I løbet af det næste årti blev 6% af boligejerne til boliglejer, og 12% af boliglejerne blev til boligejer. Antag at antallet af boligejer/boliglejer følger en Markovkæde (dvs. fremtiden afhænger kun af fortiden gennem nutiden).

Bestem procentdelen af boligejere i 2028, samt i 2038. Opskriv din løsning matematisk ved brug af Markovkæder, og angiv også overgangsdiagrammet og overgangsmatricen for Markovkæden.

Ugens udfordring: Sektion 11.5: Øvelse 14
"i.i.d." betyder her at $X_1, \ldots, X_n$ *er uafhængige og identisk fordelte (altså en stikprøve) for alle* $n = 1, 2, \ldots$.