Institut for Matematik
AARHUS UNIVERSITY

Introduktion til
Sandsynlighedsteori og Statistik
Markus Kiderlen
23. november 2023

UGESEDDEL 14

Forelæsningerne i Uge 12: Vi har afsluttet gennemgangen af Kapitel 8 inklusiv *Solved Problem 5* og Øvelserne 23 og 24 i Afsnit 8.6 (se Sætning X på ugeseddel 12). Vi diskuterede hvordan man regner med matricer, både i hånden og ved brug af `R`. Derefter er vi gået i gang med Afsnit 11.2 hvor vi er nået til og med Afsnit 11.2.3. Vi har diskuteret "trylleformlen", men der mangler endnu Chapman–Kolmogorov ligningen.

Forelæsningerne i Uge 13:

1. **Forelæsning 25 (28. november):** Vi vil gennemgå Afsnit 11.2.4 og derefter starte på Afsnit 11.2.6.
2. **Forelæsning 26 (30. december)** Efter vi har færdiggjort Afsnit 11.2.6 vil vi gennemgå Afsnit 11.2.5.

Bemærkning: Udregning af den stationære fordeling. Lad $P = [p_{ij}]_{i,j=1,\dots,r}$ betegne overgangsmatricen for en Markovkæde, og lad A betegne $r \times r$ matricen

$$A = \begin{bmatrix} p_{11}-1 & p_{21} & \cdots & p_{(r-1)1} & p_{r1} \\ p_{12} & p_{22}-1 & \cdots & p_{(r-1)2} & p_{r2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{1(r-1)} & p_{2(r-1)} & \cdots & p_{(r-1)(r-1)}-1 & p_{r(r-1)} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

hvor de første $(r-1)$ rækker af A består af søjlerne fra matricen P, hvor vi har trukket 1 fra på diagonalen, og den sidste række i A består af 1-taller. Lad b betegne den r-dimensionale vektor

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

der har 0 i alle de første $(r-1)$ indgange, men 1 i den sidste indgang. Den stationære fordeling π findes ved at løse ligningssystemet

$$A\pi = b. \tag{1}$$

I programmet `R` kan ligningssystemet (1) løses ved kommandoen `solve(A,b)`.

Teoretiske øvelser i Uge 14 (4. – 8. december): Alle opgaver kan regnes efter forelæsningen tirsdag d. 28. november pånær følgende to opgaver: Del 1.3 (Delspørgsmål (2)) samt Del 2.1. I de opgaver der involverer den stationære/grænse fordeling kan ovenstående bemærkning **Udregning af den stationærefordeling** være nyttig, men det er ikke et krav at benytte den metode.

Del 1:

1. Øvelse A nedenfor.
2. Øvelse B nedenfor.
3. Eksamen, Sommer 2019, Opgave 8, Delspørgsmål (2).

Del 2:

1. Øvelse C nedenfor.
2. Øvelse D nedenfor.
3. Øvelse E nedenfor.
4. Eksamen, Vinter 2018/2019, Opgave 5 (hvis der er tid).

Øvelse A. Betragt en Markovkæde med tilstandsrum $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og overgangsmatrix P givet ved

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

(a) Tegn overgansdiagrammet for Markovkæden.

(b) Angiv hvilke tilstande der er transiente og rekurrente.
(Argumenter for dit svar.)

(c) Angiv om Markovkæden er aperiodisk. (Argumenter for dit svar.)

Øvelse B. Betragt en Markovkæde med tilstandsrum $S = \{1, 2, 3\}$ og overgangsmatrix P givet ved

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Afgør om der findes en grænsefordeling (argumenter for dit svar), og find den i givet fald.

Øvelse C. Betragt en Markovkæde med tilstandsrum $S = \{0, 1, 2, 3\}$ med følgende overgangsmatrix

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Opskriv overgangsdiagrammet for Markovkæden og angiv mængden af absorberende tilstande.

(b) For alle $j = 0, 1, 2, 3$ find sandsynligheden for at Markovkæden bliver absorberet i tilstand 0, givet at den starter i tilstand j.

Øvelse D. Folketællingsresultater afslører, at i USA arbejder 80% af døtre af arbejdende kvinder, og 30% af døtre af ikke-arbejdende kvinder arbejder.

(a) Skriv overgangssandsynligheden for denne model.

(b) Hvilken brøkdel af kvinder vil på lang sigt arbejde?

Øvelse E. Et insekt kan være i én af tre tilstande:

$$1 : \text{hvile}, \qquad 2 : \text{svag aktivitet}, \qquad 3 : \text{stærk aktivitet}.$$

Hvis insektet er i hvile, er der sandsynlighed p for at det vågner op og begynder på en svag aktivitet, og der er sandsynlighed $1 - p$, for at det forbliver i hvile. Hvis insektet er i den svage aktivitetstilstand, er der sandsynlighed p, for at det går over til en stærk aktivitet, og der er sandsynlighed $1 - p$, for at det går tilbage til hvile. Endelig, hvis insektet er i den stærke aktivitetstilstand, er der sandsynlighed p, for at det bliver i denne tilstand, og der er sandsynlighed $1 - p$, for at det går tilbage til hvile.

(a) Opskriv overgangsmatricen for den ovenfor beskrevne Markovkæde og angiv den stationære fordeling.

(b) For hver af de tre tilstande er der et energiforbrug: der er energiforbrug 1 for '1:hvile', energiforbrug 2 for '2:svag aktivitet' og energiforbrug 3 for '3:stærk aktivitet'. Der er også et energiindtag for hver af tilstandene, der er 0 for tilstand '1:hvile', 2 for tilstand '2:svag aktivitet', og 4 for tilstand '3:stærk aktivitet'. Find den værdi af p der gør, at middelenergiforbruget er lig med middelenergiindtaget i det lange løb.

Hint: svaret er $p = (\sqrt{5} - 1)/2$.

Afleveringsopgave 14: Der er ingen afleveringsopgave da det er sidste uge af kurset.

Ugens udfordring: Lad $X_0, X_1, X_2, \ldots$ betegne en Markovkæde med tilstandsrum $S = \{1, 2, 3\}$ og overgangsmatrix

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vis at Markovkæden har uendeligt mange stationære fordelinger. Bestem grænseværdien

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j | X_0 = i) \qquad \text{for alle } i, j = 1, 2, 3.$$

Eksisterer der en grænsefordeling for Markovkæden?