Afleveringsopgave 2

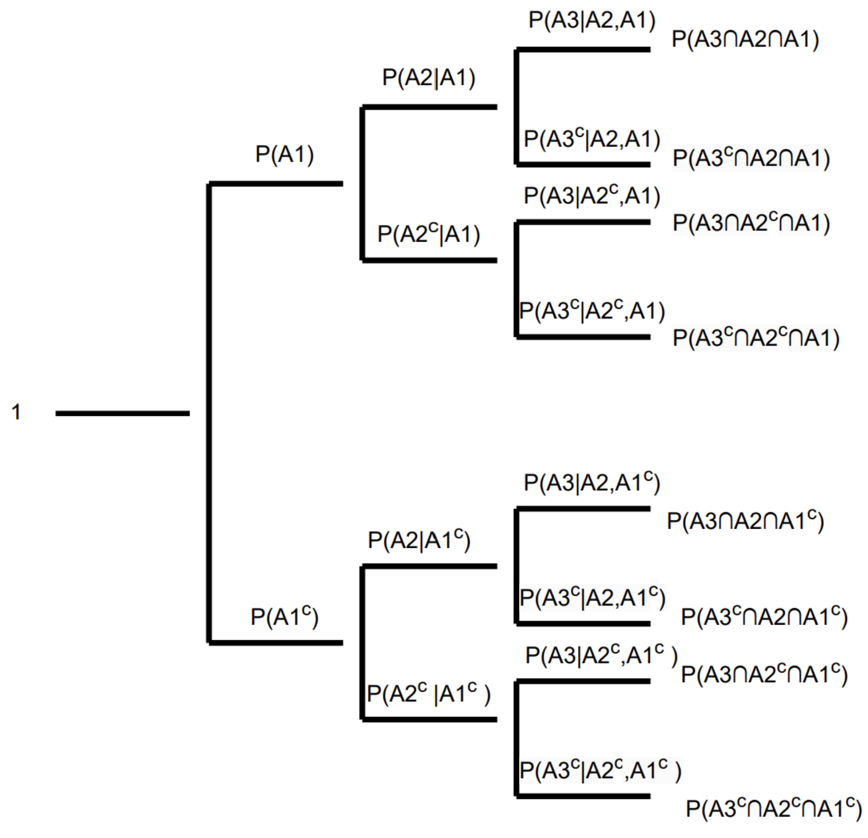
INTRODUKTION TIL STATISTIK OG SANDSYNLIGHEDSTEORI

Kristopher B.E. Märcher, studienummer: 202205825

11.9.2023

In a factory there are 100 units of a certain product, 5 of which are defective. We pick three units from the 100 units at random. What is the probability that exactly one of them is defective?

For at løse denne opgave vil jeg benytte mig af et træ diagram.



Vi kan her for oven se et trædiagram over vores mulige events ved 3 "træk" efter hinanden. Her skal det påpejes at A_1, A_2, A_3 Står for hendholdsvist at trække et udefekt produkt på første andet og tredje træk. Derved betyder komplimentet til hver af disse at man trækker et defekt produkt. Udfra dette kan vi nu se hvilke af disse situationer der opfylder vores krav. Vi får her at vide at der i sekvensen skal være præcist 1 defekt.

Det vil altså sige at der i sekvansen skal indgå et kompliment til en af mængderne. Vi kan derved se at vi har 3 sekvenser der opfylder vores krav. De er hendholdsvist:

$$P(A_3^c \cap A_2 \cap A_1)$$
$$P(A_3 \cap A_2^c \cap A_1)$$
$$P(A_3 \cap A_2 \cap A_1^c)$$

Vi kan nu så benytte os af "Chain rule for conditional probability", side 45 i bogen. Til at beregne sandsynligheden for disse 3. Ved brug af kædereglen får vi altså nu de 3 udtryk:

$$P(A_3^c \cap A_2 \cap A_1) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3^c|A_2, A_1)$$

$$P(A_3 \cap A_2^c \cap A_1) = P(A_1)P(A_2^c|A_1)P(A_3|A_2^c, A_1)$$
$$P(A_3 \cap A_2 \cap A_1^c) = P(A_1^c)P(A_2|A_1^c)P(A_3|A_2, A_1^c)$$

Vi kan nu bestemme værdiene og indsætte dem i disse udtryk. Eftersom der ved det første træk, A_1, er 100 produkter og 5 af disse er defekte har vi 95 ud af de 100 der er udefekte. Dette giver os at sandsynlighed for A_1 er $\frac{95}{100}$. Dette vil også medføre at $A_1^c = 1 - \frac{95}{100} = \frac{5}{100}$, udfra example 1.10 delopgave a. Derved kan vi starte med at sætte dette ind i alle tre udtryk:

$$P(A_3^c \cap A_2 \cap A_1) = \frac{95}{100} \cdot P(A_2|A_1)P(A_3^c|A_2, A_1)$$

$$P(A_3 \cap A_2^c \cap A_1) = \frac{95}{100} \cdot P(A_2^c|A_1)P(A_3|A_2^c, A_1)$$

$$P(A_3 \cap A_2 \cap A_1^c) = \frac{5}{100} \cdot P(A_2|A_1^c)P(A_3|A_2, A_1^c)$$

I forhold til det næste træk, A_2, har vi nu 99 produkter. For $P(A_2|A_1)$, har vi nu at der er 99 produkter og 94 af disse er udefekte produkter, siden A_1 har taget et udefekt produkt. Derved er sandsynligheden for dette $\frac{94}{99}$ I det andet tilfælde hvor vi har $P(A_2^c|A_1)$, er der stadig 99 produkter, dog er 5 af disse defekte. Dette vil sige at sandsynligheden for dette er $\frac{5}{99}$. Det sidste tilfælde har vi at $P(A_2|A_1^c)$. Her har vi 99 produkter tilbage hvor 95 af dem er udefekte. Dette giver os sandsynligheden $\frac{95}{99}$. Vi kan ny indsætte disse værdier:

$$P(A_3^c \cap A_2 \cap A_1) = \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot P(A_3^c|A_2, A_1)$$

$$P(A_3 \cap A_2^c \cap A_1) = \frac{95}{100} \cdot \frac{5}{99} \cdot P(A_3|A_2^c, A_1)$$

$$P(A_3 \cap A_2 \cap A_1^c) = \frac{5}{100} \cdot \frac{95}{99} \cdot P(A_3|A_2, A_1^c)$$

Til sidst har vi nu først $P(A_3^c|A_2, A_1)$, har har vi altså 98 produkter tilbage, hvor af 5 af disse er defekte. Dette vil sige at sandsynligheden for dette er $\frac{5}{98}$. I det andet tilfælde har vi $P(A_3|A_2^c, A_1)$, igen har vi 98 produkter tilbage hvoraf at 94 af disse er udefekte. Derved får vi sandsynligheden $\frac{94}{98}$. For det sidste udtryk $P(A_3|A_2, A_1^c)$, har vi som før 98 produkter tilbage og 94 udefekte, derved bliver denne sandsynlighed også $\frac{94}{98}$. Vi kan ny indsætte værdierne og regne værdien for de tre udtryk:

$$P(A_3^c \cap A_2 \cap A_1) = \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{5}{98}$$

$$P(A_3 \cap A_2^c \cap A_1) = \frac{95}{100} \cdot \frac{5}{99} \cdot \frac{94}{98}$$

$$P(A_3 \cap A_2 \cap A_1^c) = \frac{5}{100} \cdot \frac{95}{99} \cdot \frac{94}{98}$$

Vi regner nu disse udtryk:

$$P(A_3^c \cap A_2 \cap A_1) = \frac{893}{19404}$$

$$P(A_3 \cap A_2^c \cap A_1) = \frac{893}{19404}$$

$$P(A_3 \cap A_2 \cap A_1^c) = \frac{893}{19404}$$

$$\frac{893}{19404} \approx 0.046021$$

Eftersom alle disse 3 overholder vores betingelser, vil det sige at vi skal tage foreningsmængden til de tre udsagn:

$$P((A_3^c \cap A_2 \cap A_1) \cup (A_3 \cap A_2^c \cap A_1) \cup (A_3 \cap A_2 \cap A_1^c)) = \frac{893}{19404} + \frac{893}{19404} + \frac{893}{19404} = \frac{893}{6468} \approx 0.138$$

Derved er sandsynligheden for at man på tre træk trækker præcist en defekt ca 0.138.