Indholdsfortegnelse

Summer - fra ugeseddel 1

(Resultater fra analyse 1)

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

2) For $a \neq 1$

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

3) For $a \in (-1, 1)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}$$

4)

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} = e^a$$

5) For $a, b > 0$

$$\lim\left(\frac{e^{ax}}{x^b}\right) = \infty \qquad \lim(x^b e^{-ax}) = 0$$

for $x \to \infty$

6)

$$\lim\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}{log(n)}\right) = 1, \qquad for\ n \to \infty$$

Kapitel 1 - basic koncepts

De Morgans law ***s. 9***

Theorem 1.1.

$$a)\ (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_n^c$$
$$b)\ (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \ldots \cup A_n^c$$

Distributive law
s. 9
Theorem 1.2.

$$a)\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$b)\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Theorem 1.2' (fra ugeseddel 2)

$$a)\ A \cap ()$$

Inclusive-exclusice principle:
s. 11 og 27

$$1.\ |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$2.\ |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Bemærkning: *Gælder også for ss f.eks.:*

$$P\ (A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Conditional probability ***s. 40***
(s. 40)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, når\ P(B) > 0$$

Kædereglen for conditional probability ***s. 45***
(s. 45)

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2, A_1) \dots (P(A_n|A_{n-1}A_{n-2} \dots A_1)$$

Independence
(s. 46)
A og B er uafhængige hvis:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

A, B og C er uafhængige hvis:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$(A \cap C) = P(A)P(C)$$
$$(C \cap B) = P(C)P(B)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

Hvis der er uafhængighed gælder:

$$P(A|B) = P(A)$$
$$P(B|A) = P(B)$$

Hvis $A_1, A_2, \ldots, A_n$ er uafhængige, da gælder:

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - \big(1 - P(A_1)\big)\big(1 - P(A_2)\big) \ldots \big(1 - P(A_n)\big)$$

Sætning A - ugeseddel 2

Lad $A_1, A_2, \ldots, A_n$ være uafhængige hændelser.

$B_1, B_2, \ldots, B_n$ betegner hændelser, der fremkommer ved at udføre elementære mængdeoperationer på grupper af forskellige af mængderne $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Da er $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ligeledes uafhængige hændelser.

Law of total probaility

s. 52

Hvis , B_2, B_3, ... er en partition af sample space S, for ethvert event A gælder:

$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i)$$

Bayes' rule

s. 55

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

Hint: Benyt sammen med law of total probability

Kapitel 2 - Combinatorics

Ordered sampling with replacement

(Udtræk med ordning uden tilbagelægning)

(s. 87)

Antallet af k permutations af n objekter:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}, for\ 0 \leq k \leq n$$

Hvor k er antallet af elementer, der skal trækkes

Hvor n er antallet af elementer/mulige udfald

Unordered sampling without replacement

(Udtræk uden ordning uden tilbagelægning)

(s. 88)

Antallet af k kombinationer af n elementer:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, for\ 0 \leq k \leq n$$

Hvor k er antallet af elementer der skal trækkes
Hvor n er antallet af elementer/mulige udfald

NB: kaldes desuden binomial koefficienten

Binomial formlen
(s. 93)
For n uafhængige Bernoulli forsøg, hvor hvert forsøg har ss for succes p, er ss for k sucesser givet ved:

$$P(K) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Kapitel 3 - Discrete random variable

- Stokastisk variabel
Defineret ved at range er countable

PMF'er
(s. 112)

1. $0 \leq P_X(x) \leq 1$, for alle x
2. $\sum_{x \in R_X} P_X(x) = 1$
3. For enhver mængde $A \subset R_X, P(X \in A) = \sum_{x \in A} P_X(x)$

Definition 3.2 uafhængighed
(s. 113)

To variable X og Y er uafh hvis:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Hvis to stokastiske variable er uafh så kan man skrive:

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B), \forall\ set\ A\ og\ B$$

Note om fordelinger

$$Pascal(1, p) = Geometric(p)$$

Poisson som en approximering af Binomial:

Poisson kan ses som grænsen for en binomial fordeling. Hvis n er meget stor og p er meget lille kan man antage at $\lambda = np$ er en positiv konstant. Dette er vigtigt, da poisson PMF er meget nemmere at lave end binomial.

CDF'er

(s. 137)

$$\forall a \leq b: P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

CDF er et interval omkring X og PDF'en er sandsynligheden for et enkelt element.

Expectation

s. 139

$$EX = \sum_{x_k \in R_X} x_k P(X = x_k) = \sum_{x_k \in R_X} x_k P_X(x_k)$$

s. 140

Notation:

$$EX = E[X] = E(X) = \mu x$$

s. 142

Linearitet:

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

$$E[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n]$$

LOTUS

s. 144

$$E[g(X)] = \sum_{x_k \in R_X} g(x_k) P_X(x_k)$$

Varians

s. 146

$$Var(X) = E[(X - \mu x)^2] = E[X^2] - [EX]^2$$

Bemærkning: $E[X^2]$ findes ved at

$$E[X^2] = \sum_{x_k \in R_X} x_k^2 P_X(x_k)$$

Jf. LOTUS

Eksempel

$$R_X = (1,2), P_X(1) = P_X(2) = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow E[X^2] = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Yderligere egenskaber for varians
s. 148
For en stokastisk variabel X og hele tal a og b:
$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

s. 148
For uafh. stok. var. hvor $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$:
$$Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n)$$

Standard afvigelse
(standard deviation)
s. 146
$$SD = \sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

Kapitel 4. Continuous and mixed random variables

- Kontinuerte skotkastiske variable

PDF og CDF
s. 165

Kriterier for en PDF:

1 $f_X(x) \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$

2 $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)du = 1$

3 $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(u)du$

4 Mere generelt for et set A, $P(X \in A) = \int_A \; f_X(u)du$

(PDF: tæthedsfunktion, CDF: fordelingsfunktion)

Definition 4.2
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = F_X{}'(x)$$

Expected value
(s. 167)

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

LOTUS
s. 168

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

Varians
s. 169

$$Var(x) = E[(X - \mu x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu x)^2 f_X(x) dx$$
$$= EX^2 - (EX)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - \mu_X^2$$

Transformationsformlen
Fra ugeseddel 6:

Theorem 4.1*. *Lad X betegne en kontinuert stokastisk variabel med en PDF f_X og range R_X. Lad $g : R_X \to \mathbb{R}$ betegne en differentiabel funktion, der enten er strengt voksende eller strengt aftagende, og sæt $Y = g(X)$. Hvis h betegner den inverse funktion til g så gælder der at Y er en kontinuert stokastisk variabel med en PDF f_Y givet ved*

$$f_Y(y) = \begin{cases} |h'(y)| f_X(h(y)) & \text{for } y \in R_Y, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

hvor mængden R_Y er givet ved $R_Y = \{g(x) : x \in R_X\}$.

Fra bogen:
s. 173
Theorem 4.1
X er kontinuert stok. var. og $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en strengt monoton differentiabel funktion. Lad $Y = g(X)$. Så er PDF'en af Y givet ved:

$$F_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = f_X(x_1) \cdot \left|\dfrac{dx_1}{dy}\right| & Hvor\ g(x_1) = y \\ 0 \quad hvis\ g(x) = y\ ikke\ har\ en\ løsning \end{cases}$$

Strategi:

1. Find Range af Y, $R_Y = \{g(x), for\ x \in R_X\}$
2. Find $h(y)$
3. Find $h'(y)$
4. Sæt ind i sætningen, $f_Y(y)$
5. Tjek om $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)dy = 1$

Partial integration

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

Integration ved substitution

$$\int_a^b f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) \quad hvor\ t = g(x)$$

Kædereglen - integration

$$\Big(F\big(g(x)\big)\Big)' = F'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Standard normalfordeling

s. 184

Hvis $Z \sim N(0,1)$ er PDF givet ved:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \qquad \forall z \in \mathbb{R}$$

$$EZ = 0\ og\ Var(Z) = 1$$

CDF er givet ved:

$$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

s. 187

Hvis Z er standard normal fordelt og $X = \sigma Z + \mu$, så er X en normal stok var med forventet værdi μ og varians σ^2:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

For dette tilfælde gælder

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(a > X \leq b) = \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Theorem 4.3.
s. 189
Hvis $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, og $Y = aX + b$, hvor $a, b \in \mathbb{R}$, så er $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ hvor:

$$\mu_Y = a\mu_X + b, \sigma_Y^2 = a^2\sigma_X^2$$

NB: Find fordelinger, expected value og varians i appendix!!

Egenskaber ved Gamma-fordelingen
Sætning B - ugeseddel 8

1. *Antag, at $X \sim gamma(\alpha_1, \lambda)$ og $Y \sim gamma(\alpha_2, \lambda)$ er uafhængige.*

Da gælder det, at

$$X + Y \sim gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$$

2. *Antag, at $X \sim gamma(\alpha, \lambda)$og $b > 0$.*

Da gælder det, at

$$bX \sim gamma\left(\alpha, \frac{\lambda}{b}\right)$$

Bemærkninger vedr. uafhængighed
ugeseddel 8

1. To *generelle* stokastiske variable X og Y siges at være uafhængige hvis deres simultane fordelingesfunktion splitter op i produktet af de marginale fordelingsfunktioner, dvs.

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \quad \text{for alle } x, y \in \mathbb{R}^2.$$

Dette er ækvivalent med

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B) \quad \text{for alle } A, B \subset \mathbb{R}^2,$$

og med

$$E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)]$$

for alle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, så længe middelværdierne er veldefinerede.

2. Lad X og Y betegne *uafhængige* stokastiske variable der har marginale tæthedsfunktioner hhv. f_X og f_Y. Så har X og Y en simultan tæthed givet ved

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \qquad \text{for alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Lad X og Y betegne stokastiske variable med simultan tæthedsfunktion $f_{X,Y}$, der er på formen $f_{X,Y}(x,y) = g(x)h(y)$ for to funktioner $g : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ og $h : \mathbb{R} \to [0,\infty)$. Så er X og Y uafhængige og $f_X(x) = cg(x)$ og $f_Y(y) = ch(y)$ for en konstant $c > 0$.

   Så når man skal tjekke om to stokastiske variable er uafhængige, er det nok at tjekke om $f_{X,Y}$ kan skrives som et produkt af to funktioner g og h (man behøver ikke at vide om g og h er tætheder).

Kapitel 5. Joint distributions: to stok. var.

Marginal PMFs af X og Y
s. 221

$$P_X(x) = \sum_{y_j \in R_Y} P_{XY}(x, y_j), \qquad for\ ethvert\ x \in R_X$$
$$P_Y(y) = \sum_{x_j \in R_X} P_{XY}(x_i, y), \qquad for\ ethvert\ y \in R_Y$$

Hvis man har en tabel:
Man summer ss for X=1 og for X=2 osv. alt efter hvilken range X har. Man gør det samme for Y
Se evt. eksempel 5.1, s. 221

Marginal CDFs af X og Y
s. 224

$$F_X(x) = F_{XY}(x, \infty) = \lim_{y \to \infty} F_{XY}(x, y), \qquad \forall x$$

$$F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y) = \lim_{x\to\infty} F_{XY}(x, y), \qquad \forall y$$

Se evt. Eksempel 5.2, s. 225

Conditional PMF
s. 227

$$P_{X|A}(x_i) = P(X = x_i|A) = \frac{P(X = x_i \; og \; A)}{P(A)}, \qquad \forall x_i \in R_X$$

s. 228
For X givet Y:

$$P_{X|Y}(x_i|y_i)\frac{P_{XY}(x_i, y_j)}{P_Y(y_j)}$$
$$P_{Y|X}(y_j|x_i) = \frac{P_{XY}(x_i, y_j)}{P_X(x_i)}$$
$$for\ ethvert\ x_i \in R_X\ og\ y_j \in R_Y$$

Find $P(X = 0, Y \leq 1) = P_{XY}(0,0) + P_{XY}(0,1)$ og så aflæser man i tabellen for PMF
Find $P(Y = 1|X = 0) = \frac{P(X=0,Y=1)}{P(X=0)} = \frac{P_{XY}(0,1)}{P_X(0)}$
Hvor man ved $P_X(0)$ ligger alle de ss X kan have sammen når X=0

Conditional CDF
s. 227

$$F_{X|A}(x) = P(X \leq x|A)$$

To uafhængig stok. var.
s. 228
To variable er uafh. hvis:

$$P_{XY}(x, y) = P_X(x)P_Y(y), \qquad \forall x, y$$
$$F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y), \qquad \forall x, y$$

Conditional expectation
s. 231
forventet værdi for X:

$$E[X|A] = \sum_{x_i \in R_X} x_i P_{X|A}(x_i)$$
$$E[X|Y = y_j] = \sum_{x_i \in R_X} x_i P_{X|Y}(x_i|y_j)$$

Law of total propability
s. 233

$$P(X \in A) = \sum_{y_j \in R_Y} P(X \in A | T = T_J) P_Y(y_j), \qquad for\ ethvert\ se\ A$$

Law of total expectation
s. 233

1. Hvis $B_1, B_2, B_3, \ldots$ er en partition af sample sppace S:

$$EX = \sum_i E[X|B_i]P(B_i)$$

2. For en stok. var. X og en diskret stok. var. Y:

$$EX = \sum_{y_j \in R_Y} E[X|Y = y_j]P_Y(y_j)$$

LOTUS for to diskrete stok. var.

$$E[g(X,Y)] = \sum_{(x_i,y_j) \in R_{XY}} g(x_i, y_j) P_{XY}(x_i, y_j)$$

Expectation for to uafh. stok. var.
s. 242

Hvis X og Y er uafhængige stok. var. så gælder:

1. $E[X|Y] = EX$
2. $E[g(X)|Y] = E[g(X)]$
3. $E[XY] = EXEY$
4. $E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$

Joint PDF - continuous random variables
s. 257

$$P((X,Y) \in A) = \iint_A f_{XY}(x,y)dxdy$$

Marginal PDFs for to kont. stok. var.
s. 259

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy, \qquad \forall x$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx, \qquad \forall y$$

Hvis man skal finde fx(x) integrerer man over y. Man bruger derfor også y's grænser. Hvis der står $0 < y < x < 1$ er nedre grænse 0 og øvre grænse er x.

Joint cumulative function

s. 262

Joint CDF for to stok. var. X og Y er givet ved:

$$F_{XY(x,y)} = P(X \leq x, Y \leq y)$$

Joint CDF opfylder følgende egenskaber:

1. $F_X(x) = F_{XY}(x, \infty),\ for\ ethvert\ x\ (marginal\ CDF\ for\ X)$
2. $F_Y(y) = F_{YX}(\infty, y),\ for\ ethvert\ y\ (marginal\ CDF\ for\ Y)$
3. $F_{XY}(\infty, \infty) = 1$
4. $F_{XY}(-\infty, y) = F_{XY}(x, -\infty) = 0$
5. $P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2 = F_{XY}(x_2, y_2) - F_{XY}(x_1, y_2) - F_{XY}(x_2, y_1) + F_{XY}(x_1, y_1)$
6. Hvis X og Y er uafh. så: $F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$

Egenskaber for joint kont. stok. var.

s. 263

PDF:

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(u,v)dudv$$

CDF:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y)$$

s. 271

1. Forventet værdi af X givet Y=y:

$$E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{x|Y}(x|y)dx$$

2. conditional LOTUS:

$$E[g(X)|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x|y)dx$$

3. conditional Var(X) givet Y=y

$$Var(X|Y=y) = E[X^2|Y=y] - (E[X|Y=y])^2$$

Conditional concepts for joint kont. stok. var.

s. 269

For to joint kont. stok. var. X og Y, kan man definere følgende afhængige koncepter:

1.Conditional PDF af x givet Y=y:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

2.Conditional ss for at $X \in A$ givet Y=y:

$$P(X \in A|Y = y) = \int_A f_{X|Y}(x|y)dx$$

3.conditional CDF af X givet Y=y:

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x|Y = y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)dx$$

Independent random variables:

To kontinuerte stok. Var. X og Y er uafhængige hvis:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y), \qquad for\ alle\ x,y$$

Det gælder ligeledes, at X og Y er uafhængige hvis

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y), \qquad for\ alle\ x,y$$

Vi har desuden, at hvis X og Y er uafhængige, da har vi

$$E[XY] = EXEY$$
$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$$

Law of total alting og LOTUS for to kont. stok. var.

s. 275

Total probability

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A|X = x)f_X(x)dx$$

Total expectation:

$$E[Y] = [E[Y|X]] = \int_{-\infty}^{\infty} E[Y|X = x]f_X(x)dx$$

For at finde $E[Y|X = x]$ kigger man på hvilken fordeling Y har og kigger i apendix

Total variance:

$$Var(Y) = E[Var(Y|X)] + Var(E[Y|X])$$

LOTUS:

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f_{XY}(x,y)dxdy$$

Theorem 5.2. X og Y er uafhængige

s. 283

Hvis $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ og $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ er uafhængige, så:

$$X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$$

Kovarians og korrelation

s. 291

Kovarians mellem X og Y kan beskrives som:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)] = E[XY] - (EX)(EY)$$

Lemma 5.3. kovariansens egenskaber:

1. $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X)$
2. Hvis X og Y er uafhængige så er $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$
3. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$
4. $\mathrm{Cov}(aX, Y) = a\mathrm{Cov}(X, Y)$
5. $\mathrm{Cov}(X + c, Y) = \mathrm{Cov}(X, Y)$
6. $\mathrm{Cov}(X + Y, Z) = \mathrm{Cov}(X, Z) + \mathrm{Cov}(Y, Z)$

s. 294

Korrelations koefficienten:

$$\rho_{XY} = \rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\mathrm{Cor}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Z}$$

Egenskaber for korelations koefficienten:

1. $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$
2. Hvis $\rho(X, Y) = 1 \Rightarrow Y = aX + b, \text{hvor } a > 0$
3. Hvis $\rho(X, Y) = -1 \Rightarrow Y = aX + b, \text{hvor } a < 0$
4. $\rho(aX + b, cY + d) = \rho(X, Y)$ for $a, c > 0$

Definition 5.2

Hvis $\rho(X, Y) = 0 \Rightarrow \text{ukorreleret}$
Hvis $\rho(X, Y) > 0 \Rightarrow \text{positivt korreleret}$
Hvis $\rho(X, Y) < 0 \Rightarrow \text{Negativt korreleret}$

Hvis X og Y er ukorreleret:

$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

Varians af sum

s. 293

$$Var(aX + bY) = a^2Var(X) + b^2Var(Y) + 2abCov(X, Y)$$

Kapitel 6

Independent identiually distributed (i.i.d.)

s. 321

Definition 6.1. Stok. Var. $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ er i.i.d., hvis de er uafhængige og de har den samme marginale fordeling:

$$F_{X_1}(x) = F_{X_2} = \cdots = F_{X_n}(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Kapitel 7

Convergence in distribution

A sequence of random variables $X_1, X_2, \dots$ converges **in distribution** to a random variable X, shown by $X_n \to X$, if

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

Theorem 7.1

Betragt $X_1, X_2, X_3, \dots$ og den stokastiske variabel X. Antag at X og X_n (for alle n) er ikke-negative og "integer-valued"

$$R_X \subset \{0, 1, 2, \dots\}$$
$$R_{X_n} \subset \{0, 1, 2, \dots\}$$

Så $X_n \to X$ hvis og kun hvis

$$\lim_{n\to\infty} P_{X_n}(k) = P_X(k)$$

Convergence in Probability

A sequence of random variables $X_1, X_2, X_3, \dots$ converges **in probability** to af random variable X, shown by $X_n \to X$, if

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0, \qquad for\ all\ \epsilon > 0$$

Theorem 7.2

If $X_n \to^d c$, where c is a constant, then $X_n \to^p c$

Kapitel 8 statistik

Random sample
s. 425 *(stikprøve)*
Samlingen af stok. var. V æø-$X_{1,}\ X_2, X_3, \ldots, X_n$ er et random sample med størrelse n, hvis de er i.i.d.:
1. $X_{1,}\ X_2, X_3, \ldots, X_n$ er uafhængig stok. var. og
2. De har samme fordeling: $F_{X_1}(x) = F_{X_2} = \cdots = F_{X_n}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$

For et random sample antager man følgende:
1. X_i er uafhængig
2. $F_{X_1}(x) = F_{X_2} = \cdots = F_{X_n}(x) = F_X(x)$
3. $EX_i = EX = \mu < \infty$
4. $0 < Var(X_i) = Var(X) = \sigma^2 < \infty$

Sample mean
s. 426
Sample mean er givet ved:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Egenskaber for sample mean:
1.$E\bar{X} = \mu$
2.$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$
3.Weak law of large numbers (WILN):

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X} - \mu| \geq \epsilon) = 0$$

4.Central limit theorem: The random variable

$$Z_n = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

dette konvergerer i fordeling til standard normal stok. var når $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq x) = \phi(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

hvor $\phi(x)$ er standard normal CDF

Estimering
s. 429
Bias:
Lad $\hat{\theta} = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ være en estimator for θ. **Bias** for estimatoren beskrives som:

$$B(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta$$

$\hat{\theta}$ er **unbiased** hvis:

$$B(\hat{\theta}) = 0, \forall\ mulige\ værdier\ af\ \theta$$

Mean squared error (**MSE**) for en estimator $\hat{\theta}$:

$$MSE(\hat{\theta}) = E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right]$$

Det er den fejl vi laver når vi bruger $\hat{\theta}$ til at estimere θ. Derfor måler man afstanden mellem de to.

$$MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + B(\hat{\theta})^2$$

Bemærk: Hvis $\hat{\Theta}$ er unbiased → $MSE(\hat{\Theta}) = Var(\hat{\Theta})$

Lad $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n, \dots$, være en følge af estimatore for θ. $\hat{\theta}_n$ er en konsistent estimator hvis:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| > \epsilon\right) = 0, \qquad \forall\epsilon > 0$$

s. 434

Lad $X_1, X_2, \dots, X_n$ være et tilfældigt sample med mean $EX_i = \mu < \infty$ og varians $0 < Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Så er **sample varians** defineret som:

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\bar{X}^2\right)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\bar{X}^2\right)$$

(Nederste bruges oftest!)

Sample varians er en unbiased estimator af σ^2

Sample standard deviation/standard afvigelse er givet ved:

$$S = \sqrt{S^2}$$

Dette er en biased estimator for σ, men den man bruger.

Bemærk!!! Jf. opgave 23 kap. 8 - s. 518
- $\widehat{\beta_1}$ er en unbiased estimator

Maximum likelihood estimation (MLE)

s. 437

Lad $X_1, X_2, \dots, X_n$ være et tilfældigt sample fra en fordeling med parameter θ. Antag at man har observeret $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$.

Hvis X_i er diskret, så er likelihood funktionen (PMF) givet ved:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = P_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$$

Hvis X_i er simultan kontinuert er likelihood funktion (PDF) givet ved:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = f_{X_1 X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$$

Nogle gange er det nemmere at brug log ligelihood funktionen:

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$$

s. 440

Maximum likelihood funktionen:
Til dette bruger man samme funktion som før, hvor man differentierer likelihood funktionen og sætter den lig 0. (find maximum)

Se bogen for asymptopiske egenskaber for MLE - s. 443

Konfidensintervaller
s. 455

For kendt varians $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty; n\ er\ stor$
Parameter der skal estimeres: $\theta = EX_i$
$\left[\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ er approximativt et $(1-\alpha)100\%$ konfidens interval for θ

s. 458
For et sample der er $Bernoulli(\theta)$; n er stor:
Parameter der skal estimeres: θ
$\left[\bar{X} - \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}}\right]$ er approximativt et $(1-\alpha)100\%$ konfidens interval for θ.
Det er et konservativt interval, da det bruger en upper bound for σ.

En anden måde for samme case:
$\left[\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right]$ er approximativt et $(1-\alpha)100\%$ konfidens interval for θ

s. 460
For ukendt varians $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty; n\ er\ stor$
Parameter der skal estimeres: $\theta = EX_i$
Man udregner S (sample standard deviation)
$\left[\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$ er approximativt et $(1-\alpha)100\%$ konfidens interval for θ

Konfidensintervaller for normal random variables

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ og varians $Var(X_i) = \sigma^2$ er kendt

Parameter der skal estimeres: $\mu = EX_i$
$\left[\bar{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ er et $(1-\alpha)100\%$ konfidens interval for μ

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = EX_i$ og varians $Var(X_i) = \sigma^2$ er ukendt
Parameter der skal estimeres: $\mu = EX_i$
$\left[\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$ er et $(1-\alpha)100\%$ konfidens interval for μ

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = EX_i$ og varians $Var(X_i) = \sigma^2$ er ukendt
Parameter der skal estimeres: $Var(X_i) = \sigma^2$
$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right]$ er et $(1-\alpha)100\%$ konfidens interval for σ^2

I R

	a er en simulering af en fordeling (skal bruges til følgende eksempler)
$\bar{X}$	Mean(a) - Estimator for middelværdien
$S/\sqrt{S^2}$	Sd(a) - Estimator for standardafvigelsen
σ^2/S^2	Var(a) - Estimator for variansen
z_α	$qnorm(1-\alpha, 0{,}1)$ q=quantile og er den inverse funktion. 0 og 1 er parameteren for normalfordelingen
$z_{\frac{\alpha}{2}}$	$qnorm\left(1-\frac{\alpha}{2}, 0{,}1\right)$
$t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$	$qt\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)$
$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$	$qchisq\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)$
$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$	$qchisq\left(1-\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), n-1\right)$
$1-\phi(\lvert w_1 \rvert)$	$1 - qnorm(w_1, 0{,}1)$
Ukendt σ^2 ensidet test	$pt(w_i, n)$
c for en eksp fordeling	$qexk(1-\alpha, \lambda)$ til hvis man får noget der er ekspo fordelt om man skal finde threshold.

Bemærkning: Den geometriske fordeling og Pascal-fordelingen er begge parametriseret anderledes i R end i kurset.

- Hvis $X \sim Geometric(p)$ så vil $Y = X - 1$ være "geometrisk fordelt med parameter p i R forstand". Med andre ord: i R beskriver den geometriske fordeling antallet af fiaskoer inden første succes. Da

$$P(X \leq x) = P(Y + 1 \leq x) = P(Y \leq x - 1),$$

  kan vi derfor udregne $P(X \leq x)$ ved brug af R kommandoen `pgeom(`$x - 1, p$`)` (bemærk: der står $x - 1$ i R kommandoen).

- Hvis $X \sim Pascal(m, p)$ så er $Y = X - m$ "negativ binomial fordelt i R forstand". Med andre ord: i R beskriver den negative binomialfordeling antallet af fiaskoer inden $m$te succes. Derfor kan $P(X \leq x)$ udregnes ved R kommandoen `pnbinom(`$x - m, m, p$`)` (bemærk $x - m$).

Hypotesetest
s. 474
H_0 er den hypotese man antager er rigtig (nul hypotesen).
H_1 er den alternative hypotese og er altså det modsatte af H_0.

s. 477
<u>Test statisk</u>:
En statistik kunne f.eks. være sample mean. Det er en funktion af data. En test statstik er en statistik som vi bruger til at lave vores test.

s. 477
<u>Type 1 fejl</u>:
Man afviser H_0 givet at den er sandt. Matematisk formuleret:

$$P(type\ 1\ fejl|\theta) = P(afvise\ H_0|\theta$$

Hvis $P(type\ 1\ fejl \leq \alpha$ har testen signifikansniveau α eller man kan sige at det er en level α test.

<u>Type 2 fejl</u>
At acceptere H_0 givet at H_1 er sandt. Ss for type 2 fejl beskrives som en funktion af beta:

$$\beta(\theta) = P(accepter\ H_0|\theta)$$

s. 481
<u>To sidet test</u>
Man skal bestemme mellem

$$H_0: \mu = \mu_0$$
$$H_0: \mu \neq \mu_0$$

<u>En sidet test</u>

$$H_0: \mu \leq \mu_0$$
$$H_0: \mu > \mu_0$$

eller

$$H_0: \mu \geq \mu_0$$
$$H_0: \mu < \mu_0$$

eller

$$H_0: \mu = \mu_0$$
$$H_0: \mu < \mu_0$$

For to sidet test af mean:
Hvis H_0 er sandt regner man med at $\bar{X}$ er tæt på μ og dermed at $W(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ er tæt på 0. Man vælger derfor en threshold c, så hvis $|W| \leq c$ accepterer man H_0.

Styrke:

$$\pi(\theta) = P(W \notin A)$$

Styrken betegner altså sandsynligheden for at forkaste en falsk nulhypotese.
(Vi er interesserede i så stor styrke som muligt.)

s. 485
For to sidet hypotesetest $H_o: \mu = \mu_0, H_1: \mu = \mu_0$

Case	**Test statistik**	**Acceptance region**
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma\ kendt$	$W = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\lvert W \rvert \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$
N stor, X_i ikke normal	$W = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\lvert W \rvert \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma\ er\ ukendt$	$W = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\lvert W \rvert \leq t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$

s. 488
For etsidet hypotesetest, hvor $H_o: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$

Case	**Test statistik**	**Acceptance region**
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma\ kendt$	$W = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$W \leq z_\alpha$
N stor, X_i ikke normal	$W = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$W \leq z_\alpha$
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma\ er\ ukendt$	$W = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$W \leq t_{\alpha, n-1}$

For etsidet hypotesetest, hvor $H_o: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$

Case	**Test statistik**	**Acceptance region**
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma\ kendt$	$W = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$W \geq -z_\alpha$

N stor, X_i ikke normal	$W = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$W \geq -z_\alpha$
$X_i \sim N(\mu, \sigma^2), \sigma\ er\ ukendt$	$W = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$W \geq -t_{\alpha,n-1}$

P-værdier

s. 488

Det laveste signifikansniveau af α der resulterer i at man afviser nul hypotesen. Jo mindre p-værdien er jo mere sikker er man i at afvise H_0

For to sidet test med <u>kendt</u> σ^2 er p-værdi givet ved:

$$2(1 - \phi(|w_1|)$$

For to sidet test med <u>ukendt</u> σ^2 er p-værdi givet ved:

For en sidet med <u>kendt</u> σ^2 er p-værdi givet ved:

$$1 - \phi(|w_1|)$$

For en sidet med <u>ukendt</u> σ^2 er p-værdi givet ved:

$$1 - F_{T(n-1)}(w_i)$$

I en opgave er det for dette tilfælde regnet som $\phi(c)$ hvor (threshold) er det man regner i R (f.eks. $-z_\alpha$). Så

Likelihood ratio test (LRT)

s. 491

Lad $X_1, X_2, \dots, X_n$ være et tilfældigt sample fra en fordeling med parameter θ. Antag at man har observeret $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$. For at vælge mellem to <u>simple</u> hypoteser $H_0: \theta = \theta_0$ og $H_1: \theta = \theta_1$

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_0)}{L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1)}$$

Man vælger en konstans c. H_0 *afvises hvis* $\lambda < c$ og *accepterer hvis* $\lambda \geq c$. c vælges ud fra det ønskede α

For generelle nulhypoteser:

Samme settup.

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{sup\{L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta): \theta \in S_0\}}{up\{L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta): \theta \in S\}}$$

Her vælges c i intervallet [0,1]. H_0 afvises hvis $\lambda < c$ og accepterer hvis $\lambda > c$. c vælges ud fra det ønskede α

Lineær regression

s. 500

<u>Simpel lineær resgression model</u>

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$$

Vi modellerer ϵ_i som uafhængige og med nul-mean normale stok. var.:

$$\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

Regressionslinjen kan beskrives som:

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x$$

β_0 og β_1 estimeres som:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{s_{xy}}{s_{xx}}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$s_{xx} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

$$s_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Når der står bar altså $\bar{x}$ og $\bar{y}$, menes der et gennemsnit

"Fitted value" $\hat{y}_i$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$$

Mængden $e_i = y_i - \hat{y}_i$ kaldes residuals

R^2-værdi

s. 505

r^2 udregnes som:

$$r^2 = \frac{s_{xy}^2}{s_{xx} s_{yy}}$$

For r^2 gælder: $0 \leq r^2 \leq 1$. Desto større en værdi desto bedre en model

Kapitel 11

At lave en matrix i R

Another way of creating a matrix is by using functions `cbind()` and `rbind()` as in column bind and row bind.

```
> cbind(c(1,2,3),c(4,5,6))
[,1] [,2]
[1,]    1    4
[2,]    2    5
[3,]    3    6
> rbind(c(1,2,3),c(4,5,6))
[,1] [,2] [,3]
[1,]    1    2    3
[2,]    4    5    6
```

Markov kæde
s. 631
En stok. procces $\{X_n, n = 0, 1, 2, ...\}$, hvor $R_{X_i} = S \subset \{0, 1, 2, ...\}$. Denne procces er en markov kæde hvis:

$$P(X_{m+1} = j | X_m = i, X_{m-1} = i_{m-1}, ..., X_0 = i_0) = P(X_{m+1} = j | X_m = i), \qquad \forall m, j, i, i_1, ... i_{m-1}$$

Hvis antallet at tilstande er endeligt f.eks. $S = \{0, 1, 2, ..., r\}$, kalder man det en endelig markov kæde

Transitions sandsynligheden

$$P_{ij} = P(X_{m+1} = j | X_m = i)$$

P er transitionsmatricen
Følgende gælder:

$$\pi^{(n+1)} = \pi^{(n)} P, for\ n = 0, 1, 2, ...$$
$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n, for\ n = 0, 1, 2, ...$$

Vigtig udregning:
Find $P(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 1)$
Kan se ud på mange måder. Det vigtige er princippet

$$= P(X_1 = 3) \cdot P(X_2 = 2 | X_1 = 3) \cdot P(X_3 = 1 | X_2 = 2, X_1 = 3)$$

Da fortid er ligemeget, sletter man det sidste $X_1 = 3$ og man skal nu aflæse

$$P(X_1 = 3) \cdot P_{32} \cdot P_{21}$$

$P(X_1 = 3)$ skal på en eller anden måde være givet og resten aflæses i matricen

Find $P(X_5 = 3 | X_0 = 1)$
Find ss for at man til tid 5 er i tilstand 3 givet man starter i tilstand 1. Man definerer matricen i R og finder:

$$P_{13}^{(5)}$$

Chapman-Kolmogorov ligningen

$$p_{ij}^{(m+n)} = P(X_{m+n} = j | X_0 = i) = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$$

Beskriver ss for at går fra i til j i m+n skridt
n-step transitionsmatricen er givet ved:

$$P^{(n)} = P^n, \qquad for\ n = 1, 2, 3, ...$$

Tilgængelig/accessible $i \to j$	J er tilgængelig fra i hvis $p_{ij}^{(n)} > 0$
Kommunikativ $i \leftrightarrow j$	Man kan komme fra den ene til den anden og omvendt
Klasse	En gruppe af tilstande, der kommunikerer med hinanden
Irreducibel	Hvis alle tilstande kommunikerer med hinanden
f_{ii}	$= P(X_n = i, for\ et\ n \geq 1 | X_0 = i)$

Rekurrent	Tilstand i er rekurrent hvis $f_{ii} = 1$. Med andre ord, hvis man ikke kan komme ud af klassen. (Eller at man altid (på et tidspunkt) vil komme tilbage til samme tilstand.) ***Klasseegenskab***
Transient	Tilstand i er transient, hvis $f_{ii} < 1$. Hvis man kan komme ud af klassen. (Positiv sandsynlighed for, at man aldrig kommer tilbage til samme tilstand.) ***Klasseegenskab***
Periode	Perioden af i skrives som $d(i)$. Hvis det tager 3, 6, … skridt at komme til i er $d(i) = 3$. Hvis det kan tage 2 og 3 skridt er $d(i) = 1$. Det er altså sfd af antal skridt, man kan tage for at komme tilbage til i. OBS: Hvis der er selvløkker, vil perioden være 1 i markov kæden. (Da sfd(1,n) = n)
Periodisk	Hvis $d(i) > 1$. OBS: Hvis to tilstande
aperiodisk	Hvis $d(i) = 1$ OBS:
Absorbering	At man aldrig kommer væk fra en tilstand. Hvis l er en absorberende tilstand skriver man $a_i = P(absorbering\ i\ l \mid x_0 = i), \forall i \in S$ Løs ligningen: $a_i = \sum_k a_k p_{ik},\ for\ i \in S$

s. 639
For en diskret markov kæde:
Lad V væredet totale antal besøg i tilstand i.

A Hvis i er rekurrent:

$$P(V = \infty | X_0 = i) = 1$$

B Hvis i er transient:

$$V | X_0 = i \sim Geometric(1 - f_{ii})$$

Mean hitting time
s. 644
Den tid det går før man ramme nogle bestemte tilstande for første gang:

$$t_i = E[T|X_0 = i] = 1 + \sum_k t_k p_{ik}$$

t_k er tilstanden og p_{ik} er ss for at man går derhen. Man skal løse et ligningssystem se s. 644

Grænsefordelingen
s. 649
Sandsynlighedsfordelingen $\pi = [\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots]$ kaldes grænsefordelingen for markovkæden X_n hvis:

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j|X_0 = i), \qquad \forall i, j \in S$$

Og

$$\sum_{j\in S} \pi_j = 1$$

Når en grænsefordeling eksisterer afhænger den ikke af begyndelses stedet. Man kan derfor skrive:

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j)$$

Grænsefordelingen er, hvordan MK ser ud langt ude i fremtiden

Hvis en markovkæde er aperiodisk og irreducibel -> har den en "veldefineret"/entydig grænsefordeling -> har den en entydig stationærfordeling

Stationærfordeling
For matricen P
1. Byt om på rækker og søjler
2. Træk 1 fra på diagonalen (skrå linje)
3. erstat nederste række med 1 hele vejen
4. Definer som A i R

For at løse i R:
Gør tricket ovenfor og definer matricen
Definer en matrice B med det antal rækker A har og sæt dem til nul. Undtagen den nederste, der skal være 1.
Kod: solve(A,B) man får fordelingen pi

Hvis dette bruges til eksamen er det vigtigt at vise den er aperiodisk og irreducibel!

Endelige markovkæder
s.53
Theorem 11.2.
En endelig markovkæde $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ hvor $X_n \in S = \{0, 1, 2, \dots, r\}$. Antag at kæden er **irreducibel og aperiodisk**. Så gælder:
1.settet af ligninger:

$$\pi = \pi P$$

$$\sum_{j \in S} \pi_j = 1$$

har en unik løsning

2.Den unikke løsning er grænsefordelingen af markovkæden givet ved

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} P(X_n = j | X_0 = i), \qquad \forall i, j \in S$$

3.Følgende gælder

$$r_j = \frac{1}{\pi_j}, \qquad \forall j \in S$$

Hvor r_j er mean return time til tilstand j.

***Theorem 11.3* Mangler!!!**

Betragt en uendelig Markov kæde $(X_n, n = 0, 1, 2, \dots)$. Antag, at kæden er **ireducibel** og **aperiodisk**. Da gælder det, at en af følgende cases kan opstå.

Alle tilstande er transiente, og

Gamblers ruin problem

s. 699

MK i R

Husk at slå pakken EXPM til!

Matrix	Kaldes f.eks. A $A = matrix(c(tal, tal, tal, tal), nrow = antal\ rækker, byrow = TRUE)$
Grænsefordeling	$solve(A, B)$, hvor A er matricen P med magic trick (3 trin) og B også er en matrice (se afsnit om grænsefordling)
$P^{(n)} = P^n$	For overgangsmatricen P: $P\%\wedge\%n$
AB	$A\% * \%B$

"fordelingsforklaring" → hvad måler den enkelte fordeling - sagt med ord. (Han lægger meget vægt på dette!!!!)

- Bernoulli: Alle er 0 eller 1 variabler (gælder eller gælder ikke/succes eller ikke succes?)
- Binomial(n, p): Antal succeser i n forsøg.
- Geometric(p): Antal forsøg inden første succes (Vær obs. på R!)
- Pascal(m, p): Antal forsøg indtil m'te succes (Vær obs. på R!)
- Poisson: Antal ankomster(forekomster) i et givet tidsinterval

- Uniform(a,b): Et tilfældigt valgt tal mellem a og b
- Exponential(λ): Ventetid på første succes (i kontinuert tid)
- Gamma(α, λ): Ventetid på α'te succes
- N(μ, σ^2): For $\mu = 0$: Tilfældigt støj (CLT(central grænseværdisætning)