Institut for Matematik
AARHUS UNIVERSITY

Introduktion til Sandsynlighedsteori og Statistik
Markus Kiderlen
October 12, 2023

UGESEDDEL 9

Forelæsningerne i Uge 7: Vi har gennemgået Afsnitten 5.1. I Afsnittene 5.1.4 og 5.1.5 gennemgik vi dog kun LOTUS (5.5) og 3. og 4. i boksen på side 242. Derefter introducerede jeg dobbeltintegraler (rumfang), baseret på noterne *Multiple Integrals* der kan findes under Supplerende Noter på Brightspace. Derudover er vi startet på Afsnit 5.2 hvor vi er kommet til side 257 (Definition 5.1).

Forelæsningerne i Uge 8:

1. Forelæsning 15 (24. oktober): Vi afslutter gennemgangen af Afsnit 5.2.1 og gennemgår Afsnittene 5.2.2 og 5.2.3; siderne 265 til 268 (midt på siden) er dog ikke pensum. Derudover vil vi også kort diskutere *partielle afledede* af funktioner af flere variabler.

2. Forelæsning 16 (26. oktober): Jeg regner med at gennemgå Afsnit 5.2.4; siderne 280 (midt på siden) til 283 (midt på siden) er ikke pensum og specielt er Theorem 5.1 ikke pensum. Derefter vil jeg gennemgå Afsnit 5.3.1. Afsnit 5.3.2 vil ikke være pensum.

Bemærkninger.

- Hvis en stokastisk variabel er fordelt i henhold til en af vores standardfordelinger skal man ved besvarelse af spørgsmål "find fordelingen af X" altid angive hvilken fordeling der er tale om, samt angive alle parametre.

- Følgende resultat, Sætning A′, siger noget om hvordan uafhængighed 'arves' hvis vi tager funktioner af noget, der er uafhængig, ligesom Sætning A (ugseddel 2) sagde noget om uafhængighed af mængder. Desværre mangler Sætning A′ i bogen.

  Sætning A′.
  Antag at $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er uafhængige stokastiske variable.

  Hvis $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ betegner stokastiske variabler, som fremkommer ved at transformere grupper af forskellige af variablerne $X_1, X_2, \ldots, X_n$, så er $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ uafhængige.

  Et eksempel på en anvendelse af Sætning A′ kunne være: Lad $X_1, X_2, \ldots, X_5$ være uafhængige variable, og lad Y_1, Y_2, Y_3 være givet ved

$$Y_1 = (X_1 + X_2)^2, \qquad Y_2 = \sin(X_3) \cdot e^{-X_4}, \qquad Y_3 = \frac{1}{1 + X_5^2}.$$

  Så er Y_1, Y_2, Y_3 uafhængige pr. Sætning A′. Løst sagt gælder dette fordi ingen af $X_i$erne bruges til definition af flere end én af $Y_j$erne.

Teoretiske øvelser i Uge 9 (30. oktober - 5. november): Alle opgaver kan laves efter forelæsningen tirsdag d. 24. oktober, pånær Øvelserne 31 og 32 (Afsnit 5.4) der kan laves efter forelæsningen torsdag d. 26. oktober.

Del 1:

1. Afsnit 5.4: Øvelse 26.
2. Eksamen, Vinter 2017/2018, Opgave 2.
3. Afsnit 5.4: Øvelse 32.

Del 2:

1. Afsnit 5.4: Øvelse 31.
2. Afsnit 5.4: Øvelse 24.
3. Afsnit 5.4: Øvelse 25.
4. Øvelse A nedenfor.

Øvelse A (Binomial option pricing model): Lad $z > 0$, $n \in \mathbb{N}$ og $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ betegne uafhængige $Bernoulli(p)$-fordelte stokastiske variable, hvor $0 < p < 1$. Betragt Bernoulli option pricing modellen S_n (fra Forelæsning 6 og 7), hvor

$$S_n = z^{2\left(Y_1+Y_2+\ldots+Y_n\right)-n}$$

(a) Udregn middelværdien og variansen for S_n.

(b) For hvilke værdier af z og p er middelvædien af S_n konstant i n (dvs. middelværdien afhænger ikke af n)?

Kriteriet på z og p i Delspørgsmål (b) svarer præcist til de værdier af z og p hvor modellen er arbitrage-fri, hvilket er en af de mest fundamentale egenskaber i finansiering.

Afleveringsopgave 9: Lad X_1 og X_2 betegne to uafhængige stokastiske variable så $X_1 \sim Exponential(\lambda_1)$ og $X_2 \sim Exponential(\lambda_2)$ hvor $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Find fordelingen for $Y := \min\{X_1, X_2\}$.

Hint: Benyt eventuelt at $\min\{x_1, x_2\} > y$ gælder hvis og kun hvis både $x_1 > y$ og $x_2 > y$.

Ugens udfordring (middelværdier): Lad X betegne en positiv stokastisk variable. Antag at X er enten er diskret eller har en tæthedsfunktion. Vis at

$$E[X] = \int_0^\infty P(X > x)\, dx. \tag{1}$$

Hint: Du må uden bevis benytte at man altid må bytte om på to integraler eller en sum og et integral så længe det der summeres/integreres er positivt.
Udtrykket i Ligning (1) kan, blandt andet, benyttes til at definere middelværdien for stokastiske variable der ikke er diskrete eller har en tæthedsfunktion.