Opgavesættet indeholder 11 spørgsmål fordelt på tre opgaver. Alle 11 spørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen af besvarelsen.

Opgave 1

Lad X være en diskret stokastisk variabel med sandsynlighedsfunktion p_X givet ved

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{hvis } x = -1 \\ \frac{1}{4} & \text{hvis } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{hvis } x = 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Vis, at $EX = \frac{1}{4}$ og $\operatorname{Var} X = \frac{11}{16}$.

Lad Y være en stokastisk variabel, der er uafhængig af X og har samme fordeling som X.

(2) Beregn $\operatorname{Var}(X - 5Y)$.

(3) Beregn $P(|X| = 1)$. Gør desuden rede for, at $|X| \sim b(1, \frac{3}{4})$ og specificer fordelingen for $|X| + |Y|$.

Lad nu $n \geq 1$ og $X_1, \ldots, X_n$ være uafhængige og identisk fordelte stokastiske variable som opfylder at X_i har samme fordeling som X for $i = 1, \ldots, n$.

(4) Find $E[\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)]$. Bestem også det mindste n som opfylder $\operatorname{Var}(\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)) < 0.01$.

Opgave 2

Lad (X, Y) være en to-dimensional absolut kontinuert stokastisk vektor der har tæthedsfunktion $f_{X,Y}$ givet ved

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}xy & \text{hvis } 0 < x < 2 \text{ og } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Vis, at tæthedsfunktionerne f_X og f_Y for X og Y er

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{hvis } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$
$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y & \text{hvis } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(2) Beregn EY og $\operatorname{Var} Y$.

(3) Gør rede for, at X og Y er uafhængige. Beregn $\operatorname{Cov}(X, X + Y)$.

(4) Beregn $P(X < Y < 1)$.

Opgavesættet fortsættes

Opgave 3

Lad U være en absolut kontinuert stokastisk variabel med tæthed f_U givet ved

$$f_U(u) = \begin{cases} 2u & \text{hvis } u \in]0,1[\\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Lad $X = e^U$. Find tætheden for X.

Lad V være en stokastisk variabel, der er uafhængig af U og opfylder $V \sim R(0,1)$. Lad Y være defineret ved

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{hvis } U < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{hvis } U \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(2) Find sandsynlighedsfunktionen for Y og beregn $E[YV]$.

Lad Z være defineret som

$$Z = \begin{cases} U + V & \text{hvis } U + V \leq 1 \\ U + V - 1 & \text{hvis } U + V > 1. \end{cases}$$

Lad som vanligt F_Z betegne fordelingsfunktionen for Z. I det følgende kan du uden bevis benytte, at for $z \in [0,1]$ er $P(1 < U + V \leq 1 + z) = z - \frac{1}{3}z^3$.

(3) Vis, at for $z \in [0,1]$ er $F_Z(z) = P(U + V \leq z) + P(1 < U + V \leq 1 + z)$. Specificer fordelingen for Z.

Opgavesættet indeholder 11 spørgsmål fordelt på tre opgaver. Alle 11 spørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen af besvarelsen.

Opgave 1

Lad X_1 være en diskret stokastisk variabel med sandsynlighedsfunktion p_{X_1} givet ved

$$p_{X_1}(x) = \begin{cases} 0.3 & \text{hvis } x = 0 \\ 0.2 & \text{hvis } x = 1 \\ 0.5 & \text{hvis } x = 2 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Vis, at $EX_1 = 1.2$ og $\operatorname{Var} X_1 = 0.76$.

Lad $n \geq 2$ og $X_2, \dots, X_n$ være stokastiske variable der har samme fordeling som X_1. Antag, at $X_1, \dots, X_n$ er uafhængige.

(2) Beregn $\operatorname{Var}(X_1 - 7X_2)$.

(3) Beregn $P(X_1 > 0)$. Bestem det mindste n som opfylder $P(\cup_{i=1}^{n}\{X_i > 0\}) \geq 0.99$.

Lad, for $i = 1, 2$, Z_i være defineret som

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{hvis } X_i = 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(4) Specificer fordelingen for $Z_1 + Z_2$. Beregn $\operatorname{Cov}(Z_1 + Z_2, X_1)$.

Opgave 2

Lad (X, Y) være en to-dimensional absolut kontinuert stokastisk vektor der har tæthedsfunktion $f_{X,Y}(x, y)$ givet ved

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4}x & \text{hvis } 0 < x < 1 \text{ og } 0 < y < 4x \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Vis, at tæthedsfunktionen $f_X(x)$ for X er

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{hvis } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Find desuden tætheden f_Y for Y.

(2) Vis, at $EX = \frac{3}{4}$.

(3) Beregn $P(X \le \frac{1}{2})$ og $P(Y < 2X)$.

(4) Beregn $\operatorname{Var} X$ og $E[XY^2]$.

Opgave 3

Lad $U \sim e(1)$. Det vil sige, at U er eksponentialfordelt med parameter 1.

(1) Find tætheden for X defineret ved $X = U^7$.

Lad $V \sim \text{po}(2)$. Det vil sige, at V er Poissonfordelt med parameter 2. Antag, at U og V er uafhængige. Lad $Y = UV$.

(2) Beregn EY og $\operatorname{Var} Y$.

(3) Gør rede for, at Y ikke er absolut kontinuert.
VINK: Benyt f.eks. ligning (5.31) i IPT.

Opgavesættet indeholder 11 spørgsmål fordelt på tre opgaver. Alle 11 spørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen af besvarelsen.

Opgave 1

Lad (X, Y) være en to-dimensional diskret stokastisk vektor med sandsynlighedsfunktion $p_{X,Y}$ givet ved

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{16} & \text{hvis } x = 0 \text{ og } y = 0 \\ \frac{3}{16} & \text{hvis } x = 0 \text{ og } y = 1 \\ \frac{3}{16} & \text{hvis } x = 1 \text{ og } y = 0 \\ \frac{9}{16} & \text{hvis } x = 1 \text{ og } y = 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Alternativt kan $p_{X,Y}(x, y)$ angives ved nedenstående tabel:

$y\backslash x$	0	1
1	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{16}$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$

(1) Vis, at sandsynlighedsfunktionen for X er givet ved

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{hvis } x = 0 \\ \frac{3}{4} & \text{hvis } x = 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

I det følgende kan du uden bevis benytte, at sandsynlighedsfunktionen for Y er givet ved

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{hvis } y = 0 \\ \frac{3}{4} & \text{hvis } y = 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(2) Vis, at $\text{Var}(X) = \frac{3}{16}$. Beregn $E(X + 4Y)$.

(3) Vis, at X og Y er uafhængige. Bestem fordelingen for $X + Y$.

(4) Lad Z være uafhængig af X med $Z \sim \text{po}(1)$. Beregn $E(X^2 Z)$ samt $E(Xe^Z)$.

Opgave 2

Lad X være en absolut kontinuert stokastisk variabel med tæthedsfunktion f_X givet ved

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{hvis } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Vis, at $EX = \frac{2}{3}$ og $\text{Var}(X) = \frac{1}{18}$.

(2) Lad F_X betegne fordelingsfunktionen for X. Bestem $F_X(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Lad Y være en stokastisk variabel som er uafhængig af X og har samme fordeling som X. Det betyder specielt, at Y er absolut kontinuert med tæthedsfunktion f_Y givet ved

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y & \text{hvis } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(3) Beregn $\text{Var}(X - Y)$ samt $\text{Cov}(X^2, X)$.

(4) Beregn $P(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{4})$ samt $P(X^2 > Y)$.

Opgave 3

Lad U, V, W være uafhængige stokastiske variable med $U \sim N(0,1), V \sim N(0,1)$ og $W \sim b(1, \frac{1}{2})$.

(1) Lad $Y = e^U$. Find tæthedsfunktionen f_Y for Y.

(2) Find fordelingen for $3V - U$. Undersøg om UW er en diskret stokastisk variabel.

(3) Lad $X = WU + (1 - W)(V + 1)$. Gør rede for at X er absolut kontinuert og angiv tæthedsfunktionen f_X for X.

Opgavesættet indeholder 11 spørgsmål fordelt på tre opgaver. Alle 11 spørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen af besvarelsen og der lægges vægt på at det tydeligt fremgår hvordan man kommer frem til de forskellige resultater.

Opgave 1

Lad X være en diskret stokastisk variabel med sandsynlighedsfunktion p_X givet ved

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{for } x \in \{0,1\} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Beregn $E(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$.

Lad Y betegne en stokastisk variabel, der er uafhængig af X, og har samme fordeling som X. Specielt er Y en diskret stokastisk variabel med sandsynlighedsfunktion p_Y givet ved

$$p_Y(y) = \begin{cases} 1/2 & \text{hvis } y \in \{0,1\} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(2) Beregn $\mathrm{Var}(2X - Y)$ og $\mathrm{Cov}(2X - 3Y, X)$.

(3) Beregn $P(X \leq Y)$ og $P(\{X < Y\} \cup \{X = 1\})$.

(4) Beregn $E(e^X)$ og $E(Xe^{X-Y})$.

Opgave 2

Lad (X, Y) betegne en absolut kontinuert stokastisk vektor med en tæthedsfunktion $f_{X,Y}$ givet ved

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y^2} & \text{hvis } 0 < x < 1 \text{ og } x < y < \infty \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

I det følgende kan du uden bevis benytte at X har en tæthedsfunktion f_X givet ved

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

og at $E(\sqrt{Y}) = 4/3$.

(1) Beregn $\mathrm{Var}(X)$ og $E(X^3)$.

(2) Beregn $P(1/2 < X < 3/2)$ og $P(X^2 < 1/2)$.

(3) Find tæthedsfunktionen for Y.

(4) Beregn $\mathrm{Cov}(X, \sqrt{Y})$.

Opgave 3

Lad U og V være to uafhængige stokastiske variable. Antag at U er eksponentialfordelt med parameter 1, dvs. $U \sim e(1)$, og V er en diskret stokastisk variabel med sandsynlighedsfunktion p_V givet ved

$$p_V(v) = \begin{cases} 1/2 & \text{hvis } v \in \{-1, 1\} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Beregn $P(U \leq 2, V = 1)$ og den betingede sandsynlighed $P(U > 2 \,|\, U > 1)$.

(2) Lad $Z = 1/U$. Find tæthedsfunktionen for Z.

(3) Lad $W = UV$ og F_W betegne fordelingsfunktionen for W. Beregn $F_W(w)$ for alle $w \in \mathbb{R}$. Undersøg om W er absolut kontinuert.

Opgavesættet indeholder 11 spørgsmål fordelt på tre opgaver. Alle 11 spørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen af besvarelsen, og der lægges vægt på at det tydeligt fremgår hvordan man kommer frem til de forskellige resultater.

Opgave 1

Lad X være en diskret stokastisk variabel med sandsynlighedsfunktion p_X givet ved

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{hvis } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{hvis } x = 1 \\ \frac{1}{4} & \text{hvis } x = 2 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Beregn $E(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$.

(2) Beregn $P(X \leq 1)$ og $P(X \leq 2.5)$.

Lad Y være en stokastisk variabel, der er uafhængig af X og har samme fordeling som X. Det betyder specielt, at Y er en diskret stokastisk variabel med sandsynlighedsfunktion p_Y givet ved

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{hvis } y = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{hvis } y = 1 \\ \frac{1}{4} & \text{hvis } y = 2 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(3) Beregn $\mathrm{Var}(X - Y)$ og $E(X^2 Y)$.

(4) Beregn $\mathrm{Cov}(X + Y, X - Y)$ samt $P(X + Y \leq 1, X - Y = 0)$.

Opgavesættet fortsættes

Opgave 2

Lad (X, Y) være en to-dimensional absolut kontinuert stokastisk vektor med tæthedsfunktion $f_{X,Y}$ givet ved

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 6e^{-3x}e^{-2y} & \text{hvis } 0 < x < \infty \text{ og } 0 < y < \infty \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Vis, at tæthedsfunktionen f_X for X er givet ved

$$f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & \text{hvis } x > 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

I det følgende kan du uden bevis benytte at Y har tæthedsfunktion f_Y givet ved

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y} & \text{hvis } y > 0 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(2) Vis, at X og Y er uafhængige. Sæt $Z = X + Y$. Find tæthedsfunktionen f_Z for Z.

(3) Beregn $P(X < 7)$ og $\mathrm{Cov}(3X, Y^2)$.

(4) Beregn $P(X + 1 < Y)$ og $E(e^Y)$.

Opgave 3

Lad X være en absolut kontinuert stokastisk variabel med tæthedsfunktion f_X givet ved

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{hvis } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Sæt $W = X^2$. Bestem tæthedsfunktionen for W.

Lad Y være en stokastisk variabel, der er uafhængig af X og har samme fordeling som X. Det betyder specielt, at Y er en absolut kontinuert stokastisk variabel med tæthedsfunktion f_Y givet ved

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y & \text{hvis } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(2) Beregn $P(\{X \leq 1\} \cup \{Y \leq 1\})$ og den betingede sandsynlighed $P(X > 1 \mid Y > 1)$.

(3) Lad U og V være uafhængige stokastiske variable hvor $U \sim N(0,1)$ og V opfylder $P(V = 2) = P(V = -2) = 1/2$. Sæt $Z = U \cdot V$. Find tæthedsfunktionen f_Z for Z.

Opgavesættet indeholder 11 spørgsmål fordelt på tre opgaver. Alle 11 spørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen af besvarelsen, og der lægges vægt på at det tydeligt fremgår hvordan man kommer frem til de forskellige resultater.

Opgave 1

Lad X betegne en diskret stokastisk variabel med sandsynlighedsfunktion p_X givet ved

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{5} & \text{hvis } x = 1 \\ \frac{1}{5} & \text{hvis } x = 2 \\ \frac{2}{5} & \text{hvis } x = 3 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Beregn $E(X)$ og $\text{Var}(X)$.

Lad Y betegne en diskret stokastisk variabel, der er uafhængig af X, og har sandsynlighedsfunktion p_Y givet ved

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{hvis } y = 1 \\ \frac{3}{4} & \text{hvis } y = 2 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(2) Beregn $P(X \leq 2.5)$ og $\text{Var}(X - 3Y)$.

(3) Beregn $P(X + Y = 2)$ og $P(X + Y = 3)$.

(4) Beregn $P(\{X \leq 2\} \cup \{Y \leq 1\})$ og $\text{Cov}(1 + X, Y - 2X)$.

Opgavesættet fortsættes

Opgave 2

Lad (X, Y) betegne en to-dimensional absolut kontinuert stokastisk vektor med tæthedsfunktion $f_{X,Y}$ givet ved

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xy & \text{hvis } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

I det følgende kan du uden bevis benytte at X har tæthedsfunktion f_X givet ved

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{hvis } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Beregn $E(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$.

(2) Beregn $P(1/4 \leq X \leq 3/4)$.

(3) Lad f_Y betegne tæthedsfunktionen for Y. Find $f_Y(y)$ for alle $y \in \mathbb{R}$.

(4) Beregn den betingede sandsynlighed $P(Y \leq 1/2 \mid X > 1/2)$.

Opgave 3

Lad X og Y betegne to uafhængige stokastiske variable, der begge er eksponentialfordelte med parameter 1, dvs. $X \sim e(1)$ og $Y \sim e(1)$.

(1) Bestem $E(X)$ og $E(e^{-3X})$.

(2) Sæt $W = e^{-X}$. Bestem tæthedsfunktionen for W.

(3) Lad $Z = \max\{2X, 3Y\}$. Find tæthedsfunktionen f_Z for Z.

Opgavesættet indeholder 11 spørgsmål fordelt på tre opgaver. Alle 11 spørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen af besvarelsen, og der lægges vægt på at det tydeligt fremgår hvordan man kommer frem til de forskellige resultater.

Opgave 1

Lad X betegne en diskret stokastisk variabel med sandsynlighedsfunktion p_X givet ved

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{hvis } x = -1 \\ \frac{1}{4} & \text{hvis } x = 0 \\ \frac{1}{4} & \text{hvis } x = 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Beregn $E(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$.

Lad Y betegne en diskret stokastisk variabel, der er uafhængig af X, og har sandsynlighedsfunktion p_Y givet ved

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{hvis } y = 0 \\ \frac{1}{4} & \text{hvis } y = 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(2) Beregn $P(X \leq 1/2)$ og $\mathrm{Cov}(Y, 2Y - X)$.

(3) Beregn $P(X = Y = 1)$ og $P(X \cdot Y = 0)$.

(4) Beregn den betingede sandsynlighed $P(X = 0 \mid X + Y = 0)$.

Opgavesættet fortsættes

Opgave 2

Lad (X, Y) betegne en to-dimensional absolut kontinuert stokastisk vektor med tæthedsfunktion $f_{X,Y}$ givet ved

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } 0 < x < 1 \text{ og } x < y < x+1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

I det følgende kan det uden bevis benyttes at X er absolut kontinuert med tæthedsfunktion f_X givet ved

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Beregn $E(2X)$ og $\mathrm{Var}(2X+1)$.

(2) Beregn $P(X^2 < 1/2)$.

(3) Lad f_Y betegne tæthedsfunktionen for Y. Beregn $f_Y(y)$ for $1 < y < 2$.

(4) Beregn $E(e^X)$ og $E(e^{X+Y})$.

Opgave 3

Lad X betegne en absolut kontinuert stokastisk variabel med tæthedsfunktion f_X givet ved

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{hvis } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Sæt $W = -\frac{1}{2}\log(X)$. Find tæthedsfunktionen f_W for W.

Lad $n \geq 1$ og $X_1, \ldots, X_n$ betegne uafhængige stokastiske variable. Antag for $i = 1, \ldots, n$ at X_i er absolut kontinuert med tæthedsfunktion f_{X_i} givet ved

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{hvis } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(2) Beregn $P(X_i \leq 3/4)$ for $i = 1, \ldots, n$ og find det mindste n som opfylder $P(\cup_{i=1}^n \{X_i > 3/4\}) > 0.99$.

(3) Sæt $Z = \min\{X_1, X_2\}$. Find tæthedsfunktionen f_Z for Z og beregn $E(Z)$.

Opgavesættet indeholder 11 spørgsmål fordelt på tre opgaver. Alle 11 spørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen af besvarelsen, og der lægges vægt på at det tydeligt fremgår hvordan man kommer frem til de forskellige resultater.

Opgave 1

Lad X betegne en diskret stokastisk variabel med sandsynlighedsfunktion p_X givet ved

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{hvis } x = 1 \\ \frac{2}{8} & \text{hvis } x = 2 \\ \frac{5}{8} & \text{hvis } x = 3 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Beregn $E(X)$ og $\text{Var}(X)$.

Lad Y betegne en diskret stokastisk variabel, der er uafhængig af X, og har sandsynlighedsfunktion p_Y givet ved

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{hvis } y = -1 \\ \frac{4}{5} & \text{hvis } y = 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(2) Beregn $P(X \leq 2.1)$ og $P(X = 3, Y = 1)$.

(3) Beregn $P(X \cdot Y \geq 2)$ og $E(2^X)$.

(4) Beregn $\text{Var}(X + 2Y)$ og $\text{Cov}(Y, Y + e^X)$.

Opgave 2

Lad (X, Y) betegne en to-dimensional absolut kontinuert stokastisk vektor med tæthedsfunktion $f_{X,Y}$ givet ved

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4(xy - x^2) & \text{hvis } 0 < x < 1 \text{ og } x < y < x + 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

I det følgende kan det uden bevis benyttes at X er absolut kontinuert med tæthedsfunktion f_X givet ved

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{hvis } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Beregn $E(4(X - 1))$ og $\mathrm{Var}(3X - 1)$.

(2) Lad f_Y betegne tæthedsfunktionen for Y. Beregn $f_Y(y)$ for alle $0 < y < 1$.
Beregn også $P(e^X < 2)$.

Lad Z betegne en stokastisk variabel, der er uafhængig af X, med $Z \sim e(1)$, det vil sige, at Z er eksponentialfordelt med parameter 1.

(3) Beregn $E((X + Z)^2)$.

Opgave 3

Lad X og Y betegne to uafhængige stokastiske variable med $X \sim R(0,1)$ og $Y \sim R(0,1)$, det vil sige, at X og Y er uniformt fordelte på intervallet $[0,1]$.

(1) Find $P(X > 1/4)$ og $P(\{X \leq 1/2\} \cup \{Y > 2/3\})$.

(2) Beregn $E(X^3)$ og $E(\sin(\pi X))$.

(3) Beregn $P(X + Y > 1 \mid Y > 1/2)$.

(4) Sæt $W = X \cdot Y$ og find tæthedsfunktionen for W.

Opgavesættet indeholder 11 spørgsmål fordelt på tre opgaver. Alle 11 spørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen af besvarelsen, og der lægges vægt på at det tydeligt fremgår hvordan man kommer frem til de forskellige resultater.

Opgave 1

Lad X betegne en stokastisk variabel med $X \sim b(2, 1/4)$, det vil sige, at X er binomialfordelt med antalsparameter 2 og sandsynlighedsparameter 1/4. Sandsynlighedsfunktionen p_X for X er derfor givet ved

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{9}{16} & \text{hvis } x = 0 \\ \frac{6}{16} & \text{hvis } x = 1 \\ \frac{1}{16} & \text{hvis } x = 2 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Bestem $E(X)$ og $E(X^2)$.

Lad Y betegne en stokastisk variabel, der er uafhængig af X, og hvor $Y \sim b(3, 1/4)$. Sandsynlighedsfunktionen p_Y for Y er derfor givet ved

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{27}{64} & \text{hvis } y = 0 \\ \frac{27}{64} & \text{hvis } y = 1 \\ \frac{9}{64} & \text{hvis } y = 2 \\ \frac{1}{64} & \text{hvis } y = 3 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Sæt

$$Z = X + Y.$$

(2) Beregn $P(X \leq 1)$ og $\mathrm{Cov}(X, Z)$.

(3) Bestem fordelingen for Z, samt beregn $P(\{Y \leq 1\} \cup \{X \leq 1\})$.

(4) Beregn $P(Z = 0 \mid X = 0)$. Afgør om X og Z er uafhængige.

Opgave 2

Lad (X, Y) betegne en to-dimensional absolut kontinuert stokastisk vektor med tæthedsfunktion $f_{X,Y}$ givet ved

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 10yx^2 & \text{hvis } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Vis at X og Y er absolute kontinuerte stokastiske variable med tæthedsfunktioner henholdsvis f_X og f_Y, givet ved

$$f_X(x) = \begin{cases} 5x^4 & \text{hvis } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{10}{3}(y - y^4) & \text{hvis } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(2) Find $P(Y = 1/2)$ og $P(1/4 < X < 1/2)$.

(3) Beregn $E(X)$ og $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

(4) Sæt $Z = Y/X$. Vis at Z er absolut kontinuert og bestem $f_Z(z)$ for alle $z \in \mathbb{R}$, hvor f_Z betegner tæthedsfunktionen for Z.

Opgave 3

Lad X betegne en stokastisk variabel med $X \sim e(1)$, det vil sige, at X er eksponentialfordelt med parameter 1.

(1) Sæt $Y = (e^{2X} - 1)/2$. Lad f_Y betegne tæthedsfunktionen for Y. Bestem $f_Y(y)$ for alle $y \in \mathbb{R}$.

Lad Z betegne en stokastiske variabel, der er uafhængig af X, og hvor

$$P(Z = -1) = P(Z = 1) = 1/2.$$

(2) Beregn $P(X \leq 1)$ og $P(X + Z \leq 2)$.

(3) Beregn $P(\{X \leq 1\} \setminus \{Z = 1\})$ og $\mathrm{Var}(e^{Z-X})$.

Opgavesættet indeholder 11 spørgsmål fordelt på tre opgaver. Alle 11 spørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen af besvarelsen, og der lægges vægt på at det tydeligt fremgår hvordan man kommer frem til de forskellige resultater.

Opgave 1

Lad X betegne en diskret stokastisk variabel med sandsynlighedsfunktionen p_X givet ved

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{hvis } x = -1 \\ \frac{1}{4} & \text{hvis } x = 0 \\ \frac{1}{4} & \text{hvis } x = 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Bestem $E(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$.

Lad Y betegne en stokastisk variabel, der er uafhængig af X og opfylder $Y \sim \mathrm{po}(1)$. Det vil specielt sige at Y er Poissonfordelt med parameter 1 og har derfor sandsynlighedsfunktion p_Y givet ved

$$p_Y(y) = \begin{cases} e^{-1}\frac{1}{y!} & \text{hvis } y = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(2) Beregn $P(0 < Y < 3)$ og $P(Y > 1)$.

(3) Beregn $E(\cos(\pi X/2))$ og $\mathrm{Var}(X + 2Y)$.

(4) Beregn $P(Y \cdot X = 0)$ og $P(X + Y \leq 1)$.

Opgave 2

Lad (X, Y) betegne en to-dimensional absolut kontinuert stokastisk vektor med tæthedsfunktion $f_{X,Y}$ givet ved

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4x & \text{hvis } 0 < y < x^2 \text{ og } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Lad f_Y betegne tæthedsfunktionen for Y. Bestem $f_Y(y)$ for alle $y \in \mathbb{R}$.

Det kan uden bevis benyttes at X er en absolut kontinuert stokastiske variabel med tæthedsfunktion f_X givet ved

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{hvis } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(2) Beregn $P(1/4 < X < 1/2)$ og $P(X = 3/4)$.

Lad Z betegne en stokastisk variabel, der er uafhængig af X og opfylder $Z \sim N(1, 2)$.

(3) Beregn $E((X-1)/2)$ og $\text{Cov}(X+3, X \cdot Z)$.

(4) Beregn den betingede sandsynlighed $P(Y \leq 1/4 \mid X > 1/2)$.

Opgave 3

Lad X og Y betegne to uafhængige stokastisk variable med $X \sim R(0,1)$ og $Y \sim R(0,1)$. Det vil specielt sige at X og Y er uniformt fordelte på $[0,1]$.

(1) Beregn $P(\{X \leq 1/2\} \cup \{Y \leq 1/2\})$ og $P(\{X+Y \leq 1\} \setminus \{X \leq 1/2\})$. Som sædvanligt betegner $A \setminus B$ mængde differensen mellem to mængder A og B.

(2) Sæt $U = (2-X)^3$ og lad f_U betegne tæthedsfunktionen for U. Bestem $f_U(u)$ for alle $u \in \mathbb{R}$.

(3) Beregn $E(\max\{X, Y\})$.

Opgavesættet indeholder 11 spørgsmål fordelt på tre opgaver. Alle 11 spørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen af besvarelsen, og der lægges vægt på at det tydeligt fremgår hvordan man kommer frem til de forskellige resultater.

Opgave 1

Lad X betegne en diskret stokastisk variabel med sandsynlighedsfunktion p_X givet ved

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{hvis } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{hvis } x = 1 \\ \frac{1}{4} & \text{hvis } x = 2 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Beregn $E(X)$ og $\mathrm{Var}(X)$.

(2) Beregn $P(X \leq 1)$ og $E(2^X)$.

Lad Y betegne en diskret stokastisk variabel, der er uafhængig af X, og har samme fordeling som X. Dermed har Y specielt sandsynlighedsfunktion p_Y givet ved

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{hvis } y = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{hvis } y = 1 \\ \frac{1}{4} & \text{hvis } y = 2 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(3) Beregn $\mathrm{Cov}(X, 2X + 3Y)$ og $P(\{Y > 1\} \cup \{X > 1\})$.

(4) Beregn $E((X \cdot Y)^2)$ og $P(X = 0 \mid X + Y > 0)$.

Opgavesættet fortsættes

Opgave 2

Lad (X, Y) betegne en to-dimensional absolut kontinuert stokastisk vektor med tæthedsfunktion $f_{X,Y}$ givet ved

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 8yx & \text{hvis } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Vis at X og Y har tæthedsfunktioner henholdsvis f_X og f_Y, givet ved

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{hvis } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

og

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4(y - y^3) & \text{hvis } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(2) Beregn $P(X > 1/2)$ og $P(1/3 < Y < 1/2)$.

(3) Beregn $E(Y)$ og $E(X \cdot Y)$.

(4) Beregn $P(X + Y \leq 1/2)$.

Opgave 3

Lad X betegne en stokastisk variabel med $X \sim e(2)$, det vil sige, at X er eksponentialfordelt med parameter 2.

(1) Sæt $Y = \sqrt{X}$. Lad f_Y betegne tæthedsfunktionen for Y. Bestem $f_Y(y)$ for alle $y \in \mathbb{R}$.

Lad Z betegne en stokastiske variabel, der er uafhængig af X, og hvor $Z \sim e(2)$.

(2) Bestem fordelingen for $X + Z$ og find $\mathrm{Var}(X - Z)$.

(3) Beregn $P(X \leq 1, Z \leq 1)$ og $P(\{X \leq 1\} \setminus \{Z \leq 1\})$.

Opgavesættet indeholder 15 spørgsmål fordelt på otte opgaver. Alle 15 spørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen af besvarelsen, og der lægges vægt på at det tydeligt fremgår hvordan man kommer frem til de forskellige resultater.

Opgave 1

Lad X og Y betegne to uafhængige diskrete stokastiske variable. Antag at X har PMF P_X givet ved

$$P_X(x) = \begin{cases} 0.2 & \text{hvis } x = 0 \\ 0.3 & \text{hvis } x = 1 \\ 0.5 & \text{hvis } x = 2 \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

samt at Y har PMF P_Y givet ved

$$P_Y(y) = \begin{cases} 0.3 & \text{hvis } y = 0 \\ 0.4 & \text{hvis } y = 1 \\ 0.3 & \text{hvis } y = 2 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Beregn $P(X > 0)$ og $\text{Var}(X)$.

(2) Beregn $P(X < 2, Y > 1)$ og $P(\{X < 2\} \cup \{Y < 2\})$.

(3) Beregn $\text{Cov}(2X - 5Y, 7X + 4Y + 1)$.

Opgave 2

Lad (X, Y) betegne en to-dimensional kontinuert stokastisk vektor der har simultan PDF givet ved

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2(x + y) & \text{hvis } \ 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Det oplyses at den marginale PDF f_Y for Y er givet ved

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 + 2y - 3y^2 & \text{hvis } \ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Beregn $E[Y]$.

(2) Find den marginale PDF f_X for X, og afgør om X og Y er uafhængige.

(3) Beregn $E[XY]$.

Opgave 3

Lad $X \sim \mathit{Exponential}(3)$ og sæt $Y = e^{2X}$.

(1) Beregn $E[Y]$.

(2) Find PDF'en for Y, dvs. bestem $f_Y(y)$ for alle $y \in \mathbb{R}$.

Opgavesættet fortsættes

Opgave 4

Lad $X_1, X_2, \ldots, X_n$ betegne et random sample med $X_i \sim Binomial(m, p)$ for $i = 1, \ldots, n$, hvor $m = 1, 2, 3, \ldots$ og $p \in (0, 1)$. Vi antager at parameteren m er kendt, og at vi har observeret data $x_1, \ldots, x_n \in \{0, \ldots, m\}$.

(1) Opskriv log likelihoodfunktionen og find maksimum likelihood estimatet (MLE) $\hat{p}_{ML}$ for p.

Opgave 5

Lad $\{X_n : n = 0, 1, \ldots\}$ betegne en Markovkæde med tilstandsrum $S = \{1, 2, 3\}$ og overgangsmatrix P givet ved

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

(1) Afgør hvilke tilstande der er rekurrente og hvilke der er transiente.

(2) Beregn $P(X_2 = 3 \mid X_0 = 1)$.

Opgave 6

Lad $\{X_n : n = 0, 1, \ldots\}$ betegne en Markovkæde med tilstandsrum $\{1, 2, 3\}$ og overgangsmatrix P givet ved

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.8 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) Afgør om Markovkæden har en grænsefordeling og find den i givet fald.

Opgave 7

Det oplyses at 10% af befolkningen har influenza i en given periode.

(1) Antag at 20 personer vælges tilfældigt og uafhængigt af hinanden. Find sandsynligheden for at mindst én af de 20 udvalgte personer har influenza.

Man kan teste om en given person har influenza ved brug af en test, der dog ikke altid giver det rigtig svar. Testen giver et positivt svar for influenza 85% af gangene for personer der har influenza, og et negativt svar for influenza 95% af gangene for personer der ikke har influenza.

(2) Find sandsynligheden for at have influenza givet at man er blevet testet positiv for influenza.

Opgave 8

Lad X og Y betegne stokastiske variable så at $X \mid Y = y \sim N(y, 1)$ og Y er en kontinuert stokastisk variabel med PDF f_Y givet ved

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3y^2 & \text{for } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Beregn $\mathrm{Var}(X)$.

Opgavesættet indeholder 15 spørgsmål fordelt på syv opgaver. Alle 15 spørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen af besvarelsen, og der lægges vægt på at det tydeligt fremgår hvordan man kommer frem til de forskellige resultater.

Opgave 1

Lad X betegne en diskret stokastisk variabel med PMF P_X givet ved

$$P_X(x) = \begin{cases} 0.2 & \text{hvis } x = -1, \\ 0.3 & \text{hvis } x = 0, \\ 0.5 & \text{hvis } x = 1, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Beregn $E[X]$ og $\mathrm{Var}(X)$.

Lad Y betegne en diskret stokastisk variabel, der er uafhængig af X, og har PMF P_Y givet ved

$$P_Y(y) = \begin{cases} 0.3 & \text{hvis } y = -1, \\ 0.4 & \text{hvis } y = 0, \\ 0.3 & \text{hvis } y = 1, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(2) Beregn $P(Y > -1)$ og $P(\{X < 1\} \cup \{Y > 0\})$.

(3) Beregn $P(X = 1 \mid Y \geq 0)$ og $P(X = 1 \mid X + Y \geq 0)$.

Opgave 2

Antag at en ærlig mønt kastets fire gange uafhængigt af hinanden, og lad X betegne antallet af gange mønten viser plat.

(1) Bestem $P(X = 0)$, $P(X = 3)$ og $E[X]$.

Opgave 3

Lad X betegne en kontinuert stokastisk variabel med PDF f_X givet ved

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} & \text{hvis } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Beregn $P(X \leq 1/4)$ og $P(1/2 < X < 2/3)$.

(2) Beregn $E[X]$ og $\mathrm{Var}(X)$.

(3) Lad $Y = X^2$. Find PDF'en for Y, dvs. $f_Y(y)$ for alle $y \in \mathbb{R}$.

Opgave 4

Lad X og Y betegne to uafhængige kontinuerte stokastiske variable, hvor $X \sim \mathit{Exponential}(1)$ og $Y \sim \mathit{Exponential}(2)$.

(1) Beregn $\mathrm{Cov}(X + Y, X - Y)$.

(2) Beregn $P(X \leq Y)$.

Opgave 5

Lad $X_1, X_2, \ldots, X_7$ betegne et random sample fra en $N(\mu, \sigma^2)$-fordeling, hvor både μ og σ^2 er ukendte parametre. Antag at vi har observeret følgende data

$$3.93 \quad 3.41 \quad 3.08 \quad 4.72 \quad 3.37 \quad 4.03 \quad 4.82$$

Vi er interesseret i at skelne mellem de følgende to hypoteser:

$$H_0 \colon \mu = 4$$
$$H_1 \colon \mu \neq 4.$$

(1) Opstil et statistisk test for H_0, og afgør om man kan acceptere H_0 ved et signifikansniveau på $\alpha = 0.05$.

(2) Lav et 95% konfidensinterval for μ. Relater dit svar til Opgave 5(1).

Opgave 6

Lad $X_1, X_2, \ldots, X_n$ betegne et random sample fra en $N(\mu, 1)$-fordeling for et generelt $n \in \mathbb{N}$, og lad $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ betegne det tilhørende gennemsnit.

(1) Hvor stor skal n vælges for at $\overline{X}$ er højest 0.4 fra μ med 95% sikkerhed?

(2) Find en unbiased estimator for μ, og bestem den tilhørende mean squared error (MSE).

Opgave 7

I Aarhus kan man låne en cykel ved enten Dokk1 (Sted 1), Hovedbanegården (Sted 2) eller Den Gamle By (Sted 3). Det antages at cyklen flytter sig rundt mellem de tre steder på dagsbasis som en Markovkæde med overgangsmatrix P givet ved

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Det antages også at cyklen starter med at befinde sig på Dokk1 (Sted 1).

(1) Hvad er sandsynligheden for at cyklen er i Den Gamle By (Sted 3) efter to dage?

(2) Hvad er sandsynligheden for at cyklen er på Dokk 1 (Sted 1) i det lange løb?

Opgavesættet indeholder 15 spørgsmål fordelt på otte opgaver. Alle 15 spørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen af besvarelsen, og der lægges vægt på at det tydeligt fremgår hvordan man kommer frem til de forskellige resultater.

Opgave 1

Lad X og Y betegne to diskrete stokastiske variable med simultan PMF $P_{X,Y}$ givet ved

$x \setminus y$	0	1	2
0	1/20	3/20	2/20
1	5/20	1/20	1/20
2	3/20	2/20	2/20

1. Find den marginale PMF for Y.

I det følgende kan det uden bevis benyttes at den marginale PMF for X er givet ved

$$P_X(x) = \begin{cases} 6/20 & \text{hvis } x = 0, \\ 7/20 & \text{hvis } x = 1, \\ 7/20 & \text{hvis } x = 2, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

2. Udregn $E[2X+1]$ og $\mathrm{Var}(2X+1)$.
3. Udregn $P(X+Y=2 \mid Y=1)$ og $P(Y=1 \mid X+Y=2)$.

Opgave 2

Lad X betegne en stokastisk variabel med $X \sim \mathit{Exponential}(2)$.

1. Sæt $Z = \log(X+1)$, hvor log betegner den naturlige logaritme. Bestem PDF'en for Z, dvs. $f_Z(z)$ for alle $z \in \mathbb{R}$.
2. Udregn $E[\sin(X)]$ ved brug af simulering.

Opgave 3

1. Udregn integralet
$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)x\,dx$$
med alle relevante mellemregninger.

Opgave 4

I denne opgave vil vi betragte kvinders uddannelsesniveau gennem generationer. Uddannelsesniveauet er inddelt i tre kategorier: højtuddannet, faglært og ufaglært. For døtre af højtuddannede kvinder er 80% højtuddannede, 10% er faglærte, og 10% er ufaglærte. For døtre af faglærte kvinder er 60% højtuddannede, 20% faglærte og 20% ufaglærte. For døtre af ufaglærte kvinder er 25% højtuddannede, 25% faglærte og 50% ufaglærte. Antag at hver kvinde har mindst en datter, og at uddannelsesniveauet følger en Markovkæde.

1. Opskriv overgangsmatricen for Markovkæden, og find sandsynligheden for at et kvindeligt barnebarn er højtuddannet givet hun har en ufaglært mormor.

Opgave 5

Lad $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$ betegne en Markovkæde med tilstandsrum $S = \{1, 2, 3\}$ og overgangsmatrix P givet ved

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Angiv hvilke tilstande der er rekurrente og transiente for Markovkæden. Beskriv også i ord hvad det betyder at en tilstand er rekurrent.
2. Bestem grænseværdien
$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 3 \mid X_0 = 1).$$

Opgave 6

Lad $X_1, \dots, X_n$ betegne et random sample, hvor X_i for $i = 1, \dots, n$ har PDF f_{X_i} givet ved

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} 2\theta^{-2}x & \text{hvis } 0 < x < \theta, \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

og $\theta \in (0, \infty)$ er en ukendt parameter. For at estimere θ benytter vi estimatoren

$$\hat{\Theta} = \frac{3}{2}\overline{X} = \frac{3}{2n}(X_1 + \cdots + X_n).$$

1. Udregn $E[X_1]$ og afgør om $\hat{\Theta}$ er en unbiased estimator for θ?
2. Udregn $\text{Var}(X_1)$ og bestem mean squared error (MSE) for $\hat{\Theta}$.

Opgave 7

Vi har givet et random sample bestående af én observation X, hvor $X \sim \textit{Exponential}(\lambda)$ og $\lambda \in (0, 2]$ er en ukendt parameter. Betragt hypoteserne

H_0: $\lambda = 2$,

H_1: $\lambda < 2$.

For at teste om vi kan acceptere nulhypotesen H_0, mod den alternative hypotese H_1, benytter vi følgende test: Accepter H_0 hvis $X \leq c$, hvor $c > 0$ er et givet tal.

1. Bestem c så ovenstående test har signifikansniveau $\alpha = 0.05$. Kan du acceptere H_0 hvis du har observeret værdien 2.3 som udfald af X?

Opgave 8

Betragt en fair terning (sekssidet) der kastes igen og igen, hvor kastene er uafhængige af hinanden.

1. Antag at terningen er kastet 20 gange. Find sandsynligheden for at have fået 3 seksere eller flere.
2. Hvor mange gange skal du kaste terningen for at der er mindst sandsynlighed 1/2 for at du har fået minimum en sekser?
3. Hvor mange kast skal du gennemsnitligt bruge for at få en sekser?

Opgavesættet indeholder 15 spørgsmål fordelt på 8 opgaver. Alle 15 spørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen af besvarelsen, og der lægges vægt på at det tydeligt fremgår hvordan man kommer frem til de forskellige resultater.

Opgave 1

Alex, Bente og Connie spiller kort mod hinanden. Der er dobbelt så stor sandsynlighed for at Bente vinder spillet som at Alex vinder. Yderligere er der dobbelt så stor sandsynlighed for at Connie vinder spillet som at Bente vinder.

(1) For hver af de tre personer angiv sandsynligheden for at den pågældende vinder spillet.

Opgave 2

Lad X og Y betegne diskrete stokastiske variable med simultan PMF $P_{X,Y}$ givet i nedenstående tabel:

$x \setminus y$	0	1	2
0	0.05	0.10	0.15
1	0.20	0.05	0.15
2	0.05	0.15	0.10

(1) Bestem de marginale PMF'er for X og Y, dvs. P_X og P_Y. Afgør også om X og Y er uafhængige stokastiske variable.

(2) Udregn kovariansen mellem X og Y.

Opgave 3

Peter og John spiller 10 spil skak mod hinanden, og i hvert spil er der 5% chance for at Peter vinder.

(1) Hvad er sandsynligheden for at Peter vinder mindst ét af de 10 spil?

(2) Hvad er sandsynligheden for at Peter vinder præcis halvdelen af de 10 spil?

Opgave 4

Antag vi har givet et kvadrat der har en stokastisk sidelængde som er uniform fordelt på $[0, 10]$.

(1) Bestem det gennemsnitlige areal af kvadratet.

Opgave 5

Antag at X er en stokastisk variabel med tæthedsfunktion f_X givet ved

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{hvis } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Beregn den betingede sandsynlighed for at $X > 3/4$ givet $X > 1/2$.

(2) Beregn middelværdien og standardafvigelsen for X.

(3) Find tæthedsfunktionen for den stokastiske variable $Y = -\log(X)$, og angiv hvis det er en standardfordeling. Funktionen $x \mapsto \log(x)$ betegner den naturlige logaritme.

Opgave 6

Højden på 16 tilfældigt udvalgte personer er målt til at være

1.78	1.82	1.81	1.78	1.81	1.79	1.77	1.73
1.80	1.88	1.83	1.67	1.71	1.83	1.90	1.84.

Det kan antages at de 16 observationer kommer fra en normalfordelt observationsrække med ukendt middelværdi μ og ukendt varians σ^2.

(1) Angiv et estimat for middelhøjden μ med tilhørende 95% konfidensinterval. Forklar i dine egne ord hvad et konfidensinterval beskriver.

Vi er interesserede i at skelne mellem de følgende to hypoteser:

$H_0 : \mu = 1.84$

$H_1 : \mu \neq 1.84$

(2) Kan vi acceptere nulhypotesen H_0 med et signifikansniveau på $\alpha = 0.01$? Beskriv i dine egne ord hvad et signifikansniveau angiver.

Opgave 7

Lad $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ betegne en observationsrække med $X_i \sim Poisson(\lambda)$ for $i = 1, \ldots, 100$, hvor $\lambda > 0$ er en ukendt parameter. Betragt følgende to estimater for λ:

$$\hat{\Theta}_{50} = \frac{1}{50}\Big(X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}\Big), \qquad \text{og} \qquad \hat{\Theta}_{100} = \frac{1}{100}\Big(X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}\Big).$$

(1) Afgør om det er $\hat{\Theta}_{50}$ eller $\hat{\Theta}_{100}$ der er det bedste estimat for μ ved at benytte statistiske begreber. Du skal argumentere matematisk for dit valg.

(2) Sæt $\lambda = 1$ og bestem $E[e^{X_1}]$ ved simulering i R. Angiv din R kode i besvarelsen af spørgsmålet.

Opgave 8

Lad $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ betegne en Markovkæde med tilstandsrum $\{1, 2, 3\}$ og overgangsmatrix P givet ved

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) Bestem sandsynligheden for at Markovkæden er i tilstand 3 til tid $n = 5$ givet at den starter i tilstand 1 til tid $n = 0$.

(2) Afgør om Markovkæden har en stationær fordeling, og bestem den i givet fald. Afgør også om den stationære fordeling er entydig. Der lægges vægt på at du argumenterer matematisk for dine udsagn.

Opgavesættet indeholder 16 spørgsmål fordelt på 9 opgaver. Alle 16 spørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen af besvarelsen, og der lægges vægt på at det tydeligt fremgår hvordan man kommer frem til de forskellige resultater.

Opgave 1

Lad X og Y betegne to uafhængige stokastiske variable der opfylder $X \sim Poisson(2)$ og $Y \sim Geometric(1/3)$.

(1) Beregn $P(X = 1 \text{ eller } Y = 1)$.

(2) Beregn $P(Y = 2 \mid X + Y = 2)$.

(3) Beregn $E[X + Y]$ samt $E[(X + Y)^2]$.

Opgave 2

Lad X betegne en stokastisk variabel med fordelingsfunktion (CDF) F_X givet ved

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x \leq 0, \\ x^3 & \text{hvis } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{hvis } x \geq 1. \end{cases}$$

(1) Beregn sandsynligheden for at $X > 4/5$ givet at $X > 1/2$.

(2) Bestem middelværdien af X.

Opgave 3

Lad X og Y betegne to stokastiske variable med simultan tæthedsfunktion (PDF) $f_{X,Y}$ givet ved

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } 0 < x < 1 \text{ og } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

(1) Beregn $P(X < Y/2)$.

Opgave 4

En mand kører fra Tilst til Aarhus C på cykel. Det oplyses at 30% af gangene man kommer til et lyskryds i Danmark, viser det rødt lys.

(1) I gennemsnit, hvor mange lyskryds skal manden passere før han har holdt for rødt lys 4 gange?

(2) Antag at manden passerer 15 lyskryds på turen. Hvad er sandsynligheden for, at antallet af gange han skal standse for rødt lys er mindre end eller lig med 5?

Opgave 5

Lad $X_1, X_2, \ldots, X_n$ betegne et random sample hvor $X_i \sim N(\theta, 2)$ for $i = 1, 2, \ldots, n$ og $\theta \in \{0, 1\}$. Sæt

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\big(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\big).$$

(1) Find kovariansen mellem X_1 og $\overline{X}$.

Vi er interesseret i de følgende to hypoteser:

$H_0 \colon \theta = 0,$

$H_1 \colon \theta = 1.$

Lad $c \in \mathbb{R}$ og betragt testet hvor man accepterer H_0 hvis $\overline{X} \leq c$.

(2) Find c så testet har signifikansniveau $\alpha = 0.1$.

Opgave 6

Lad $X_1, X_2, \ldots, X_n$ betegne et random sample med $X_i \sim Poisson(\lambda)$ for $i = 1, 2, \ldots, n$ hvor $\lambda > 0$. Som estimator for λ bruger vi $\hat{\lambda}$ givet ved

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\big(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\big).$$

(1) Er $\hat{\lambda}$ unbiased? Bestemt mean squared error (MSE) for $\hat{\lambda}$.

Opgave 7

Lad $X_1, X_2, \ldots, X_n$ betegne et random sample hvor X_i har tæthedsfunktion (PDF) f_{X_i} givet ved

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} \theta x_i^{\theta-1} & \text{hvis } 0 < x_i < 1, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

for $i = 1, 2, \ldots, n$ og hvor $\theta > 0$. Lad $x_1, x_2, \ldots, x_n$ betegne observationer fra $X_1, X_2, \ldots, X_n$ med $0 < x_i < 1$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$.

(1) Find maksimum likelihood estimatet (MLE) for θ.

Opgave 8

Betragt en Markovkæde $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ med tilstandsrum $S = \{1, 2, 3, 4\}$ og overgangsmatrix P givet ved

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

(1) Find $P(X_3 = 2 \mid X_0 = 3)$.

(2) Find sandsynligheden for at Markovkæden bliver absorberet i tilstand 1 givet at den starter i tilstand 3.

(3) Afgør om Markovkæden har en stationær fordeling, og om den har en grænsefordeling. Angiv i givet fald en stationære fordeling/grænsefordeling. Der lægges vægt på, at du argumenter matematisk for dit svar.

Opgave 9

Lad $X_1, X_2, \ldots, X_n$ betegne uafhængige stokastiske variable hvor $X_i \sim \mathit{Exponential}(\lambda)$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$ og $\lambda > 0$. Lad

$$Y = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

betegne minimum af de stokastiske variable $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

(1) Beregn middelværdien af Y.

Opgavesættet indeholder 16 spørgsmål fordelt på 9 opgaver. Alle 16 spørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen af besvarelsen, og der lægges vægt på at det tydeligt fremgår hvordan man kommer frem til de forskellige resultater.

Opgave 1

Lad X betegne en stokastisk variabel med tæthedsfunktion (PDF) f_X givet ved

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & \text{hvis } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

1. Beregn $P(X > 3/4)$ og $P(X < 3/4)$.
2. Beregn $E[(X+2)/3]$ og $E[X^2]$.
3. Sæt $Z = e^{2X}$ og bestem tæthedsfunktionen (PDF'en) for Z. Dvs. bestem $f_Z(z)$ for alle $z \in \mathbb{R}$.

Lad Y betegne en stokastisk variabel, der er uafhængig af X og har samme fordeling som X, dvs. Y har tæthedsfunktion (PDF) f_Y givet ved

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{8}y^2 & \text{hvis } 0 < y < 2, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

4. Beregn
$$\mathrm{Cov}\big(2X + 3Y, X - 4Y + 9\big).$$
5. Beregn $P(X \cdot Y < 1)$.

Opgave 2

Lad X og Y betegne diskrete stokastiske variable med simultan PMF $P_{X,Y}$ givet i nedenstående tabel:

$x \setminus y$	0	1	2
0	0.10	0.05	0.15
1	0.05	0.15	0.05
2	0.20	0.15	0.10

1. Beregn $P(X = 1)$, $P(Y = 2)$ og $P(X = 1 \text{ eller } Y = 2)$.

Opgave 3

Lad X betegne en stokastisk variabel med fordelingsfunktion (CDF) F_X givet ved

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x < 0, \\ 1/5 & \text{hvis } 0 \leq x < 1, \\ 3/5 & \text{hvis } 1 \leq x < 2, \\ 1 & \text{hvis } 2 \leq x. \end{cases}$$

1. Beregn $P(X \leq 0.5 \text{ eller } X > 1.5)$.

Opgave 4

Det oplyses at 5% af den danske befolkning spiller tennis. Antag at 80 personer er udvalgt tilfældigt blandt alle folk i Danmark.

1. Hvad er sandsynligheden for at der er 3 personer eller mere der spiller tennis ud af de 80 udvalgte personer?

Opgave 5

Det oplyses at 59% af børnene i en dansk by er drenge, og de resterende 41% er piger. Ud af drengene spiller 65% fodbold, hvorimod kun 17% af pigerne spiller fodbold.

1. Hvad er sandsynligheden for at et tilfældigt valgt barn fra byen spiller fodbold?
2. Et barn fra byen udvælges tilfældigt og det oplyses at barnet spiller fodbold. Hvad er sandsynligheden for at barnet er en pige?

Opgave 6

Betragt følgende 8 data par (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, 8$

$$\begin{array}{cccc} (1.1, 4.5) & (0.0, -0.1) & (5.3, 11.6) & (3.8, 5.9) \\ (9.2, 16.4) & (6.9, 16.1) & (0.7, 1.8) & (9.2, 20.6). \end{array}$$

der antages at være udfald fra en simpel lineær regression model

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, 8.$$

1. Bestem den estimerede regression linje $\hat{y}$ for en x-værdi på $x = 2$.

Opgave 7

Betragt en normal random sample $X_1, X_2, \ldots, X_9$ hvor $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ for $i = 1, \ldots, 9$ og både $\mu \in \mathbb{R}$ og $\sigma^2 > 0$ er ukendte parametre.

1. Angiv et fornuftigt estimat for middelværdien, og bestem bias og mean squared error (MSE) for estimatet.

Antag at vi har observeret følgende data

$$-1.7 \qquad 2.2 \qquad 3.2 \qquad -0.8 \qquad 2.0 \qquad 0.7 \qquad -2.2 \qquad 0.5 \qquad 3.0$$

fra vores random sample. Vi er interesseret i at skelne imellem følgende to hypoteser:

$H_0: \ \mu = 1,$
$H_1: \ \mu \neq 1.$

2. Test om vi kan acceptere H_0 ved et signifikansniveau på $\alpha = 0.1$ på baggrund af data.

Opgave 8

Betragt en Markovkæde $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ med tilstandsrum $S = \{1, 2, 3, 4\}$ og overgangsmatrix P givet ved

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

1. Hvad er sandsynligheden for at gå fra tilstand 1 til tilstand 4 i 7 skridt?
2. Hvad er middelventetiden på at komme tilbage til tilstand 2 givet at man starter i tilstand 2?

Opgave 9

Lad $n \in \mathbb{N}$ og $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være uafhængige stokastiske variable med $X_i \sim Bernoulli(1/2)$ for alle $i = 1, \ldots, n$.

1. Find det mindste $n = 1, 2, \ldots$ der gør at uligheden

$$100 < E[\exp(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)]$$

er opfyldt.

Opgavesættet indeholder 16 spørgsmål fordelt på 11 opgaver. Alle 16 spørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen af besvarelsen, og der lægges vægt på at det tydeligt fremgår hvordan man kommer frem til de forskellige resultater.

Opgave 1

Lad X og Y betegne diskrete stokastiske variable med simultan PMF $P_{X,Y}$ givet i nedenstående tabel:

$x \setminus y$	0	4	8
2	0.15	0.10	0.05
4	0.10	0.05	0.08
6	0.12	0.20	0.15

1. Vis at PMF'en for X er givet ved nedenstående formel

$$P_X(x) = \begin{cases} 0.3 & \text{hvis } x = 2 \\ 0.23 & \text{hvis } x = 4 \\ 0.47 & \text{hvis } x = 6 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

   Udregn også middelværdien af X.

Det oplyses at PMF'en for Y er givet ved

$$P_Y(y) = \begin{cases} 0.37 & \text{hvis } y = 0 \\ 0.35 & \text{hvis } y = 4 \\ 0.28 & \text{hvis } y = 8 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

2. Bestem sandsynligheden for at $X = 4$ givet at $Y = 8$. Udregn også sandsynligheden for hændelsen $\{X = 2 \text{ eller } Y = 4\}$.
3. Udregn kovariansen mellem X og Y.

Opgave 2

Lad $X \sim Poisson(100)$.

1. Bestem $E[\ln(X + 1)]$ ved simulering i R. Udover den simulerede værdi, angiv også den benyttede R kode.

Opgave 3

Lad $x > 1$.

1. Udregn integralet

$$\int_1^x u \ln(u)\, du$$

   med alle relevante mellemregninger.

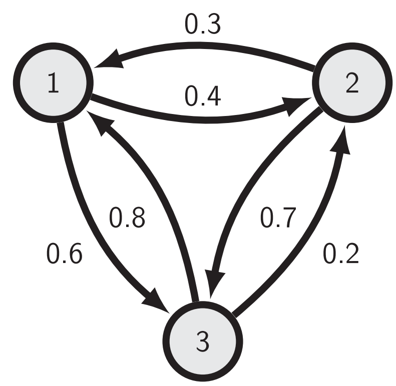
Opgave 4

Lad $X \sim N(0,1)$ være en standard normalfordelt stokastisk variabel.

1. Find fordelingen for $Y = X^3$.

Opgave 5

Betragt en Markovkæde $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ med tilstandsrum $S = \{1, 2, 3\}$ og følgende overgangsdiagram:



1. Antag at Markovkæden starter i tilstand 1 med sandsynlighed 1/2, og i tilstand 2 med sandsynlighed 1/2. Hvad er sandsynligheden for at Markovkæden er i tilstand 3 til tid 3?
2. Afgør om der eksisterer en grænsefordeling for Markovkæden (argumenter for dit svar). Bestem også sandsynligheden for at Markovkæden er i tilstand 2 efter lang tid.
3. Find middelventetiden for at komme fra tilstand 3 og tilbage til tilstand 3. Angiv også middelventetiden for at gå fra tilstand 3 til tilstand 2.

Opgave 6

Det oplyses at der i gennemsnit er 3000 færdselsuheld om året i Danmark.

1. Argumenter for hvilken fordeling du vil anbefale til at beskrive antallet af færdselsuheld om året i Danmark. For den valgte fordeling udregn sandsynligheden for at der er mindst 3050 færdselsuheld næste år.

Opgave 7

Betragt følgende 12 observationer (x_i, y_i) for $i = 1, 2, \ldots, 12$,

$(0.93, 8.56)$	$(0.47, 5.98)$	$(0.26, 6.83)$	$(0.16, 5.26)$	$(0.97, 9.78)$
$(0.74, 7.51)$	$(0.93, 8.41)$	$(0.36, 6.72)$	$(0.48, 6.82)$	$(0.49, 5.14)$
$(0.84, 7.56)$	$(0.77, 6.64)$			

der antages at være udfald fra en simpel lineær regressionsmodel

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, 12, \tag{1}$$

hvor $\epsilon_i \sim N(0,1)$ for $i = 1, 2, \ldots, 12$ er uafhængige stokastiske variable og $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$ er ukendte parametre.

1. Angiv et fornuftigt estimat for hældningen β_1 i den lineære regressionsmodel (1) på baggrund af det observerede data. Angiv også bias og mean squared error (MSE) for estimatet.

Opgave 8

Antag at vi har observeret udfaldene

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 3$$

fra en stikprøve X_1, X_2, X_3, X_4, hvor X_i for $i = 1, 2, 3, 4$ har PMF P_{X_i} givet ved

$$P_{X_i}(x_i) = \begin{cases} \theta/4 & \text{hvis } x_i = 1 \\ \theta/2 & \text{hvis } x_i = 2 \\ 1 - \frac{3}{4}\theta & \text{hvis } x_i = 3 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

og $\theta \in (0,1)$ er en ukendt parameter.

1. Find maksimum likelihood estimatet (MLE) for θ på baggrund af det observerede data.

Opgave 9

Antag at vi har observeret følgende udfald

0.50	−0.15	2.82	0.68	0.19	1.23	−1.65	2.38
−0.49	1.59	0.66	−0.12	1.20	1.08	0.82	

fra en stikprøve $X_1, X_2, \ldots, X_{15}$ hvor $X_i \sim N(\mu, 1)$ for $i = 1, 2, \ldots, 15$ og μ er en ukendt parameter. Vi er interesserede i følgende to hypoteser:

H_0: $\mu = 0$

H_1: $\mu = 0.5$.

Lad $W = \frac{1}{15}(X_1+X_2+\cdots+X_{15})$ betegne gennemsnittet af stikprøven, og for $c > 0$ betragt testet der accepterer nulhypotesen hvis $W \leq c$. I det følgende vil vi teste nulhypotesen H_0 med et signifikansniveau $\alpha = 0.05$.

1. Vis at $c = 0.4247$ giver et test med et signifikansniveau på $\alpha = 0.05$ med 2 decimalers præcision. Afgør også om du kan acceptere nulhypotesen på baggrund af det observerede data.
2. Bestem styrken for det ovenstående test.

Opgave 10

Lad $X, Y_0, Y_1, \ldots, Y_n$ være uafhængige stokastiske variable så at $X \sim Binomial(n, p)$ og $Y_i \sim Geometric(r)$ for $i = 0, 1, \ldots, n$. Sæt

$$V = \sum_{i=0}^{X} Y_i.$$

1. Udregn middelværdien af V.

Opgave 11

Lad U_1 og U_2 betegne to uafhængige stokastiske variable der begge er uniformt fordelte på intervallet $(0, 1)$, dvs. $U_1, U_2 \sim Uniform(0, 1)$.

1. Sæt $X = U_1/U_2$ og find fordelingen for X.

Opgavesættet indeholder 16 spørgsmål fordelt på 9 opgaver. Alle 16 spørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen af besvarelsen, og der lægges vægt på, at det tydeligt fremgår hvordan man kommer frem til de forskellige resultater. Alle svar skal angives som decimaltal, og det anbefales, at der sættes to streger under facit.

Opgave 1

Lad X og Y være diskrete stokastiske variable med simultan PMF $P_{X,Y}$ givet i nedenstående tabel:

$x \setminus y$	0	1	2
0	0.20	0.30	0.10
1	0.15	0.10	0.15

1. Udregn $P(X = 1)$.

Opgave 2

Lad X betegne en stokastisk variabel med fordelingsfunktion (CDF) F_X givet ved

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x < 1, \\ \frac{1}{8}(x^3 + x - 2) & \text{hvis } 1 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{hvis } x > 2. \end{cases}$$

1. Udregn middelværdien af X.

Opgave 3

Antag, at 0.01% af befolkningen har COVID-19, og at 20000 tilfældigt valgte personer er samlet til et stort arrangement.

1. Hvad er sandsynligheden for, at mindst 5 personer til arrangementet har COVID-19? Svaret skal angives med 4 decimalers præcision.

Opgave 4

Det oplyses, at bilture udgør 93% af de samlede bil- og togture, samt at 10^{-5} % af alle bilture og $4 \cdot 10^{-7}$ % af alle togture ender i et uheld.

1. Givet at der er sket et uheld i bil- og togtrafikken, bestem sandsynligheden for at uheldet er sket i en biltur. Svaret skal angives med 4 decimalers præcision.

Opgave 5

Lad $X \sim \mathit{Exponential}(2)$.

1. Bestem middelværdien af X og X^2.
2. Sæt $Z = \exp(X^2)$ og find tæthedsfunktionen (PDF'en) f_Z for Z.

Lad Y være en stokastisk variable, der er uafhængig af X, og opfylder $Y \sim \mathit{Exponential}(1)$.

3. Udregn $P(X > Y)$.

Opgavesættet fortsættes

Opgave 6

Lad X og Y betegne to uafhængige stokastiske variable så $X \sim Bernoulli(1/2)$ og $Y \sim Bernoulli(1/4)$.

1. Udregn $P(XY = 1)$ og $E[Xe^{X+Y}]$.
2. Udregn $P(X = 1 \mid X = 1 \text{ eller } Y = 1)$.

Opgave 7

Lad $X_1, \ldots, X_{1000}$ betegne en stikprøve med $X_i \sim Bernoulli(p)$ for alle $i = 1, \ldots, 1000$. Antag at vi har observeret udfaldene $x_1, \ldots, x_{1000} \in \{0, 1\}$ fra stikprøven.

1. Bestem maksimum likelihood estimatet (MLE) for p på baggrund af de observerede værdier.

Det oplyses at gennemsnittet af x_i'erne er $\bar{x} = 0.54$ og stikprøve-variansen er $s^2 = 0.45$. Vi er interesserede i at skelne mellem de følgende to hypoteser:

H_0: $p = 1/2$.

H_1: $p \neq 1/2$.

2. Lav et 90% konfidensinterval for p. Afgør også om man kan accpetere nulhypotesen H_0 med et signifikansniveau på $\alpha = 0.01$.
3. Lad
$$\hat{p} = \frac{X_1 + \cdots + X_{1000}}{1000}$$
være en estimator for p. Bestem bias og mean squared error (MSE) for $\hat{p}$.

Opgave 8

Betragt en Markovkæde $\{X_n : n = 0, 1, \ldots\}$ med tilstandsrum $S = \{1, 2, 3, 4\}$ og overgangsmatrix P givet ved

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Argumenter for hvilke tilstande der er transiente og rekurrente. Afgør også om Markovkæden er irreducibel og aperiodisk.
2. Antag at Markovkæden starter i tilstand 1 med sandsynlighed 0.7 og i tilstand 2 med sandsynlighed 0.3. Bestem sandsynligheden for at Markovkæden er i tilstand 3 efter 8 skridt.
3. Afgør om Markovkæden har en grænsefordeling, og bestem den i givet fald. Svaret skal angives med 4 decimalers præcision.

Opgave 9

Antag at X og Y er uniformt fordelt på enhedskuglen $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, dvs. X og Y har simultan tæthedsfunktion $f_{X,Y}$ givet ved

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \pi^{-1} & \text{hvis } (x, y) \in B, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

1. Udregn $E[X^2\sqrt{1 - X^2}]$.

Opgavesættet indeholder 16 spørgsmål fordelt på 11 opgaver. Alle 16 spørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen af besvarelsen, og der lægges vægt på, at det tydeligt fremgår, hvordan man kommer frem til de forskellige resultater.

Opgave 1

Lad X og Y betegne diskrete stokastiske variable med simultan PMF $P_{X,Y}$ givet i nedenstående tabel

$x \setminus y$	0	1	2
0	0.05	0.15	0.20
1	0.15	0.10	0.05
2	0.05	0.15	0.10

Det oplyses også, at de marginale PMF'er P_X og P_Y er givet ved

$$P_X(x) = \begin{cases} 0.4 & \text{for } x = 0, \\ 0.3 & \text{for } x = 1, \\ 0.3 & \text{for } x = 2, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases} \qquad P_Y(y) = \begin{cases} 0.25 & \text{for } y = 0, \\ 0.4 & \text{for } y = 1, \\ 0.35 & \text{for } y = 2, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

1. Udregn sandsynligheden for hændelsen $\{X = 0 \text{ eller } Y = 0\}$.
2. Udregn kovariansen mellem X og Y.

Opgave 2

Lad X betegne en stokastisk variabel med tæthedsfunktion (PDF) f_X givet ved

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{for } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

1. Udregn middelværdien af X.
2. Lad $Y = 1 + \frac{1}{X}$, og bestem tæthedsfunktionen f_Y for Y i alle punkter.
3. Lad Z betegne en stokastisk variabel så at $Z \mid X = x$ er $Uniform(0, x)$-fordelt for alle $0 < x < 1$. Bestem middelværdien af Z.

Opgave 3

Caroline skal spille en vigtig tenniskamp. Det oplyses, at hun har sandsynlighed 3/4 for at vinde kampen, hvis hun har haft en god træning dagen før, og sandsynlighed 1/2, hvis hun har haft en dårlig træning. Derudover oplyses det, at der er sandsynlighed 4/5 for, at hun har en god træning, og sandsynlighed 1/5 for, at hun har en dårlig træning.

1. Hvad er sandsynligheden for, at Caroline vinder sin kamp?
2. Det oplyses nu, at Caroline vandt kampen. Hvad er sandsynligheden for, at hun havde en god træning dagen før?

Opgavesættet fortsættes

Opgave 4

Der er udvalgt 1000 personer tilfældigt fra den danske befolkning. Ved optælling viser det sig, at 515 af personerne bor på Øerne, og resten bor i Jylland.

1. Opstil en statistisk model, og test nulhypotesen, at der bor lige mange på Øerne og i Jylland ved et signifikansniveau på $\alpha = 0.05$ ud fra ovenstående data.

Opgave 5

Betragt en stikprøve $X_1, X_2, \ldots, X_6$, hvor

$$P(X_i = x_i) = \begin{cases} 3\theta(1-\theta)^2 & \text{for } x_i = 0, \\ (1-\theta)^3 & \text{for } x_i = 1, \\ 3\theta^2(1-\theta) & \text{for } x_i = 2, \\ \theta^3 & \text{for } x_i = 3, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

for $i = 1, 2, \ldots, 6$, og hvor $\theta \in (0, 1)$ er en ukendt parameter. Antag, at vi har observeret følgende værdier

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 3,\ x_5 = 2,\ x_6 = 3.$$

1. Bestem maksimum likelihood estimatet (MLE) $\hat{\theta}_{ML}$ for θ på baggrund af de observerede værdier.

Opgave 6

Betragt en stikprøve med kun én observation X, der antages at have tæthedsfunktion (PDF) f_X, der afhænger af en ukendt parameter $\theta \in \{0, 1\}$. Tætheden f_X er givet ved:

$$\text{For } \theta = 0: \qquad f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{for } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$\text{For } \theta = 1: \qquad f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{for } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Betragt følgende to hypoteser:

H_0: $\theta = 0$.

H_1: $\theta = 1$.

Vi er interesseret i at benytte følgende test: Accepter H_0, hvis $X \leq c$, hvor $c > 0$ er en konstant.

1. Bestem c, så ovenstående test har signifikansniveau $\alpha = 0.05$. Udregn derefter styrken for testet.

Opgave 7

Det oplyses, at flytninger mellem Jylland og Øerne indenfor en 10-årig periode kan beskrives som følger. Der er sandsynlighed 0.1 for, at en person, der bor i Jylland, flytter til Øerne, og sandsynlighed 0.9 for, at personen bliver boende i Jylland. Hvis personen derimod bor på Øerne, er der sandsynlighed 0.05 for at flytte til Jylland samt sandsynlighed 0.95 for at blive boende på Øerne.

1. Udled hvor stor en andel af danskerne, der bor i Jylland i det lange løb ud fra ovenstående oplysninger. Der lægges vægt på, at der opstilles en matematisk model og argumenteres omhyggeligt for svaret.

Opgave 8

Betragt en Markovkæde med tilstandsrum $S = \{1,2,3,4\}$ og transitionsmatrix P givet ved

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

1. Bestem sandsynligheden for, at Markovkæden besøger tilstand 1 givet, at den starter i tilstand 4.

Opgave 9

Betragt en fair terning (sekssidet), der kastes igen og igen, hvor kastene er uafhængige af hinanden.

1. Hvad er sandsynligheden for, at der skal bruges 15 kast eller mere for at få en sekser?
2. Hvor mange kast skal der i gennemsnit bruges, før man har fået alle tallene 1 til og med 6?

Opgave 10

Alma og Oscar laver hver dag et telefonopkald. Det oplyses, at længden af Almas opkald er $Exponential(1)$-fordelt, og længden af Oscars opkald er $Exponential(2)$-fordelt. Derudover er længen af de to opkald uafhængige.

1. Lad Z betegne længden af det længste af de to opkald, og bestem middelværdien af Z.

Opgave 11

Lad X betegne en stokastisk variabel med tæthedsfunktion f_X givet ved

$$f_X(x) = \begin{cases} (\alpha-1)x^{-\alpha} & \text{for } x > 1, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

hvor $\alpha > 1$.

1. Bestem en median for X, dvs. et tal $m \in \mathbb{R}$, der opfylder $P(X \geq m) = 1/2$.

Opgavesættet indeholder 16 spørgsmål fordelt på 11 opgaver. Alle 16 spørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen af besvarelsen, og der lægges vægt på, at det tydeligt fremgår, hvordan man kommer frem til de forskellige resultater.

Opgave 1

Lad X og Y betegne diskrete stokastiske variable med simultan PMF $P_{X,Y}$ givet i nedenstående tabel

$x \setminus y$	2	4	6
1	0.07	0.12	0.04
3	0.17	0.03	0.11
5	0.05	0.15	0.26

Det oplyses også, at den marginale PMF for X er givet ved

$$P_X(x) = \begin{cases} 0.23 & \text{for } x = 1, \\ 0.31 & \text{for } x = 3, \\ 0.46 & \text{for } x = 5, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

1. Udregn middelværdien af $(1 + X)^2$.
2. Udregn sandsynligheden for $X = 1$ givet at $Y = 2$.

Opgave 2

Peter deltager i en turnering, hvor han spiller 3 kampe. Han har sandsynlighed 0.3 for at vinde første kamp, sandsynlighed 0.4 for at vinde anden kamp og sandsynlighed 0.7 for at vinde tredje kamp.

1. Hvad er sandsynligheden for, at Peter vinder mindst én kamp til turneringen.
2. Det oplyses, at Peter vandt præcis to kampe til turneringen. På baggrund af denne information beregn sandsynligheden for, at Peter vandt sin første kamp.

Opgave 3

Det oplyses, at der i gennemsnit dør 200 personer i trafikken i Danmark om året.

1. Udregn sandsynligheden for, at der sker 180 eller færre dødsfald i trafik næste år. Der lægges vægt på, at der argumenteres for, hvilken model/fordeling der benyttes.

Opgave 4

En fabrik producerer komponenter, hvor 3% er defekte.

1. Hvor mange komponenter kan fabrikken i gennemsnit nå at producere, før produktionen indeholder mindst 15 defekte komponenter? Der lægges vægt på, at der argumenteres for, hvilken model/fordeling der benyttes.

Opgavesættet fortsættes

Opgave 5

Lad $U \sim Uniform(0, 2)$ og $Y = e^{\lambda U}$ hvor $\lambda > 0$.

1. Udregn middelværdien af Y.
2. Bestem tæthedsfunktionen for Y.

Opgave 6

Lad X og Y betegne stokastiske variable med simultan tæthedsfunktion (PDF) $f_{X,Y}$ givet ved

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 15xy^2 & \text{hvis } x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq x,\ 0 \leq y, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

1. Beregn $E[XY]$.

Opgave 7

En forsker mener, at hvis knæopererede patienter kun går til fysioterapi to gange om ugen (i stedet for 3 gange), vil deres restitutionsperiode være længere. Den gennemsnitlige restitutionstid for knæopererede patienter med tre ugentlige gange fysioterapi oplyses at være 8.2 uger. Forskeren har målt restitutionstiden i uger for 200 knæopererede patienter, der kun har været til fysioterapi to gange om ugen, og det oplyses, at stikprøvemiddelværdien og stikprøvevariansen er 8.26 og 4.43, henholdsvis.

1. Udfør et statistisk test for forskerens hypotese. Der lægges vægt på, at der opstilles en statistik model.

Opgave 8

Betragt en stikprøve $X_1, X_2, \ldots, X_7$, hvor

$$P(X_i = x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-p) & \text{hvis } x_i = -1, \\ \frac{1}{4}(1-p) & \text{hvis } x_i = 0, \\ \frac{1}{4}(1-p) & \text{hvis } x_i = 1, \\ p & \text{hvis } x_i = 2, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

for $i = 1, 2, \ldots, 7$, og hvor $p \in (0, 1)$ er en ukendt parameter.

1. Bestem den værdi af parameteren p, hvor X_1 har middelværdi 0.

Antag, at vi har observeret følgende værdier

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1,\ x_5 = 1,\ x_6 = -1,\ x_7 = 2$$

for stikprøven.

2. Bestem maksimum likelihood estimatet (MLE) $\hat{p}_{ML}$ for p på baggrund af de observerede værdier.

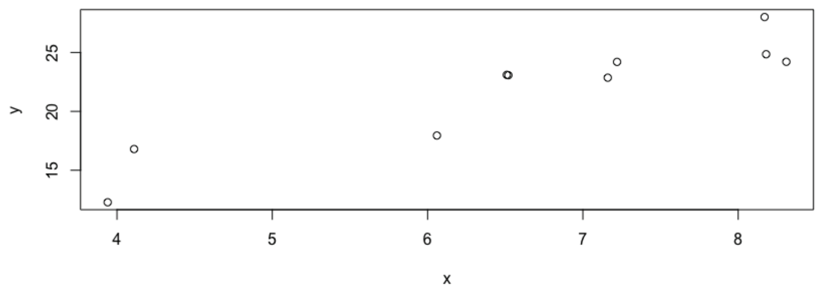
Opgavesættet fortsættes

Opgave 9

Betragt følgende 10 observationer (x_i, y_i) for $i = 1, 2, ..., 10$,

$$(8.17, 28.01), \quad (8.31, 24.21), \quad (4.11, 16.80) \quad (6.51, 23.10), \quad (3.94, 12.28),$$
$$(7.22, 24.20), \quad (8.18, 24.85), \quad (6.06, 17.95), \quad (6.52, 23.07), \quad (7.16, 22.86).$$

Nedenfor ses et plot af de 10 observationer.



1. Lav et estimat for y-værdien hørende til $x = 5$ på baggrund af de observerede data. Der lægges vægt på, at det tydeligt fremgår, hvilken model der benyttes.

Opgave 10

Betragt følgende model for et finansielt marked med tre tilstande: optimistisk (1), neutralt (2), pessimistisk (3). Det oplyses, at markedet kan beskrives ved hjælp af en Markovkæde med overgangsmatrix P givet ved

$$P = \begin{bmatrix} 0.90 & 0.075 & 0.025 \\ 0.15 & 0.80 & 0.05 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix}.$$

Til tid 0 er der sandsynlighed 0.25 for, at markedet er optimistisk, sandsynlighed 0.25 for, at markedet er neutralt og sandsynlighed 0.50 for, at markedet er pessimistisk.

1. Udregn sandsynligheden for, at markedet er optimistisk efter tre tidsenheder.
2. Hvad er sandsynligheden for, at markedet er neutralt i det lange løb?

Opgave 11

Lad X og Y betegne to uafhængige stokastiske variable, der begge er standard normalfordelte, dvs. $X \sim N(0,1)$ og $Y \sim N(0,1)$. Sæt

$$V = \big(X - Y\big)^2 \qquad \text{og} \qquad W = \big(X + Y\big)^2.$$

1. Udregn $Cov(V, W)$.

Vægtning af opgaverne og pointfordeling: Opgavesættet indeholder 18 spørgsmål fordelt på 9 opgaver. At besvare alle spørsmål korrekt svarer til 100 point. Der lægges vægt på at det tydeligt fremgår hvordan man kommer frem til de forskellige resultater.

Opgave 1. Hvert år dræber flodheste i gennemsnit 500 mennesker.

1.1 **(5 point)**
Argumenter for, hvilken fordeling du vil vælge til at beskrive antallet af dødsulykker med flodheste om året. For den valgte fordeling udregn sandsynligheden for at der er mellem 490 og 510 (begge tal inklusive) dødsulykker med flodheste næste år.

Opgave 2. Lad X og Y betegne diskrete stokastiske variable med simultan PMF $P_{X,Y}$ givet ved nedenstående tabel:

	$Y = 1$	$Y = 3$	$Y = 7$
$X = -1$	0	0.02	0.05
$X = 0$	0.20	0.07	0.10
$X = 1$	0.09	0.03	0.06
$X = 2$	0.07	0.08	0.23

2.1 **(4 point)** Angiv $P(X = 2, Y \geq 3)$ og find PMF'en P_Y for Y.

2.2 **(4 point)** Lad $Z = |X|$. Angiv den simultane PMF for (Z, Y) ved hjælp af en tabel af følgende form og forklar dine beregninger:

	$Y = 1$	$Y = 3$	$Y = 7$
$Z = 0$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$Z = 1$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$Z = 2$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

2.3 **(5 point)** Gør rede for, at $P(Y = y|Z = 1) = P(Y = y)$ for $y = 1, 3, 7$.
Er Y og Z stokastisk uafhængige? Begrund dit svar.

Opgave 3.

3.1 **(6 point)**

Beregn integralet

$$\int_0^{1.5} \log\left(1 + \sin(x)\right) dx.$$

ved hjælp af Monte Carlo simulation i `R`. Udover den simulerede værdi, angiv den benyttede `R`-kode.

Hvad siger *de store tals lov* og hvordan bruges den her?

Opgave 4. Lad X og Y være to kontinuerte stokastiske variable med simultan tæthedsfunktion $f_{X,Y}$ givet ved

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 21y^2 & \text{hvis } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

4.1 **(6 point)** Vis at Y har tæthedsfunktion f_Y givet ved

$$f_Y(y) = \begin{cases} 21y^2(1-\sqrt{y}), & \text{hvis } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

4.2 **(7 point)** Det oplyses at

$$f_X(x) = \begin{cases} 7x^6 & \text{hvis } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Beregn $\operatorname{Var}\left(\frac{13}{\sqrt{X}}\right)$.

4.3 **(7 point)** Beregn $P(Y \leq X^3)$.

Opgave 5. Lad $X_1, X_2, \ldots, X_9$ betegne en stikprøve. Antag at $X_i \sim N(4\theta, \theta^2)$ for $i = 1, \ldots, 9$ med ukendt $\theta > 0$. Vi vil finde et konfidensinterval for θ.

5.1 **(5 point)** Find fordelingen af

$$Q = \frac{3\overline{X}}{\theta} - 12,$$

hvor $\overline{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$, og forklar hvorfor Q er en pivot.

5.2 **(5 point)** Vis at

$$\left[\frac{3}{12 + z_{0.025}}\overline{X}, \frac{3}{12 - z_{0.025}}\overline{X}\right] \tag{1}$$

er et 95% konfidensinterval for θ. Én mulighed er at bruge Q fra 5.1.

5.3 **(5 point)** Vi har givet følgende 9 observationer

$$x_1 = 3.20, \quad x_2 = 3.53, \quad x_3 = 2.8, \quad x_4 = 3.36, \quad x_5 = 2.37,$$
$$x_6 = 3.11, \quad x_7 = 3.76, \quad x_8 = 2.31, \quad x_9 = 2.97.$$

Beregn konfidensintervallet (1) med disse data.

Brug dette til at undersøge om nulhypotesen forkastes i et test med signifikansniveau 0.05 af hypoteserne

$$H_0: \ \theta = 1,$$
$$H_1: \ \theta \neq 1.$$

Redegør for dit svar.

Opgave 6. Multiple Choice: List **uden argumenter** alle korrekte udsagn blandt de 10 nedenstående. Muligvis er der flere korrekte udsagn. Hvis du for eksempel mener, at kun de første tre udsagn er korrekte, så skriv "(1), (2), (3)" på dit besvarelse.

Antag at
$$X \sim N(2,9), \quad Y \sim N(0,1) \quad \text{og} \quad Z \sim N(0,1)$$
er uafhængige stokastiske variable.

6.1 **(8 point)**

(1) $E[X^2] = 4$,

(2) $P(Z \leq -1.96) = 1 - P(Z \geq 1.96)$,

(3) 0.5-fraktilen for Z er 0,

(4) $\frac{X}{3} + Y \sim N(\frac{2}{3}, 4)$,

(5) $X - Y \sim N(2,8)$,

(6) variablen X^2 er $\chi^2(1)$-fordelt,

(7) variablen $\left(\frac{X-2}{3}\right)^2 + Y^2$ er $\chi^2(2)$-fordelt,

(8) variablene X og Z er positivt korrelerede,

(9) $Y + Z$ og $Y - Z$ er ukorrelerede,

(10) variablene $X + Y$ og $X + Z$
har korrelationskoefficient $\rho(X + Y, X + Z) = 1$.

Opgave 7. Den gennemsnitlige årstemperatur for 12 udvalgte år i Berlin kan aflæses af følgende tabel:

år	1890	1900	1911	1922	1930	1943
temperatur i °C	8.1	8.8	9.7	7.4	9.2	9.3

år	1966	1967	1983	1998	2000	2019
temperatur i °C	8.8	9.6	9.7	9.5	10.5	11.1

Vi vil forklare temperaturen Y_i i år x_i ved hjælp af en simpel lineær regressionsmodel
$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, 12,$$
hvor $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{12} \sim N(0, 0.5)$ er uafhængige stokastiske variable og $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$ er ukendte parametre.

7.1 **(4 point)** Find maksimum likelihood estimaterne $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$ for afskæringen β_0 og hældningen β_1 i modellen ud fra de givne data.

7.2 **(5 point)** Er $\hat{\beta}_1$ unbiased? Find $MSE(\hat{\beta}_1)$.

Opgave 8. Lad tallene p og q i intervallet $(0, 1)$ være givet.
Antag at $X \sim \mathit{Geometric}(p)$ og $Y \sim \mathit{Geometric}(q)$ er uafhængige stokastiske variable.

8.1 **(6 point)** Vis at $Z = \min\{X, Y\}$ er geometrisk fordelt og find den tilhørende parameter.

Opgave 9. Lad $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ betegne en Markovkæde med tilstandsrum $S = \{1, 2, 3\}$ og overgangsmatrix P givet ved

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0 & 0.9 \\ 0.8 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}.$$

9.1 **(4 point)** Find $P(X_5 = 2 | X_4 = 3)$ og $P(X_1 \neq 2 | X_0 = 1)$.

9.2 **(7 point)** Afgør om Markovkæden har en grænsefordeling. Bestem den i givet fald og forklar hvordan du fandt den. Afgør også om grænsefordelingen er entydig. Der lægges vægt på at du argumenterer for dine udsagn.

9.3 **(7 point)** Antag at Markovkæden starter i tilstand 1 med sandsynlighed 1/3, i tilstand 2 med sandsynlighed 1/3 og i tilstand 3 med sandsynlighed 1/3.

Find fordelingen for X_0 givet $X_2 = 2$.

Vægtning af opgaverne og pointfordeling:
Opgavesættet indeholder 16 spørgsmål fordelt på 8 opgaver. At besvare alle spørgsmål korrekt svarer til 100 point. Der lægges vægt på at det tydeligt fremgår hvordan man kommer frem til de forskellige resultater.

Opgave 1. Det oplyses, at 87% af de voksne US-amerikanere er hvide og 13% er sorte. Blandt de hvide har 36% en universitetsuddannelse, hvorimod kun 28% af de sorte har en universitetsuddannelse.

1.1 **(5 point)** Hvad er sandsynligheden for, at en tilfældigt valgt voksen i USA har en universitetsuddannelse?

1.2 **(4 point)** En voksen udvælges tilfældigt i USA og det oplyses at vedkommende ikke har en universitetsuddannelse. Hvad er sandsynligheden for, at personen er sort?

Opgave 2. Lad X og Y være uafhængige diskrete stokastiske variable med PMF

$$P_X(x) = \begin{cases} 0.26, & \text{hvis } x = -1, \\ 0.1, & \text{hvis } x = 1, \\ 0.64, & \text{hvis } x = 4, \\ 0, & \text{ellers,} \end{cases}$$

og

$$P_Y(y) = \begin{cases} 0.5, & \text{hvis } y = -4, \\ 0.5, & \text{hvis } y = 4, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

2.1 **(6 point)** Find $P(X = x | X > 0)$ for $x = 1$ og $x = 4$.
Beregn desuden $\text{Var}(X + 8)$.

2.2 **(6 point)** Angiv range R_Z og beregn PMF'en P_Z for variablen $Z = \frac{Y}{X}$.

2.3 **(5 point)** Er Y og Z ukorrelerede? Begrund dit svar.

Opgave 3. Lad X være en kontinuert stokastisk variabel med CDF

$$F_X(x) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^{-2}, & \text{hvis } x > 0, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

3.1 **(4 point)** Vis at X har tæthedsfunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{6x^5}{(1+x^3)^3}, & \text{hvis } x > 0, \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

3.2 **(6 point)** Find CDF'en F_Y for variablen $Y = X^{-3}$.

3.3 **(8 point)** Antag nu at $U \sim Uniform(1,2)$ og at X og U er uafhængige. Beregn $P(X^3 \cdot U < 1)$.

Opgave 4. List **uden argumenter** alle korrekte udsagn blandt de 10 nedenstående. Muligvis er der flere korrekte udsagn. Hvis du for eksempel mener, at kun de første tre udsagn er korrekte, så skriv "(1), (2), (3)" på dit besvarelse.

Lad Y og Z være to uafhængige variable med

$$Y \sim N(0,1) \quad \text{og} \quad Z \sim N(0,1).$$

Lad desuden U være en diskret variabel. Bemærk at U ikke nødvendigvis er uafhængig af hverken Y eller Z.

4.1 **(10 point)**

(1) Vi har altid $0 \leq P_U(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$,
(2) CDF'en $F_U(x)$ for U er kontinuert på $\mathbb{R}$,
(3) Der gælder altid $1 - P(U \leq 1, Y \leq 0) = P(U > 1, Y > 0)$,
(4) Der gælder altid $P(U = 0, Y > 0) = P(U = 0)P(Y > 0)$,
(5) Der gælder altid $P(\{U = 0\} \cup \{Y > 0\}) = P(U = 0) + P(Y > 0)$,
(6) variablen $Y^2 + Z^2$ er $\chi^2(2)$-fordelt,
(7) variablen $(Y + Z)^2$ er $\chi^2(2)$-fordelt,
(8) variablen $\frac{1}{2}(Y - Z)^2$ er $\chi^2(1)$-fordelt,
(9) variablen $\frac{Z}{\sqrt{Y/2}}$ er $T(2)$-fordelt,
(10) variablene $Y - Z$ og Y er negativt korrelerede.

Opgave 5. Lad $0 < \theta < 1$ være en ukendt parameter. Antag at $X_1, \ldots, X_n$ er en stikprøve af kontinuerte stokastiske variable, hvor X_1 har PDF

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{1-\theta} x^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}} & \text{hvis } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

I besvarelsen af følgende spørgsmål, husk at nævne hvor du bruger egenskaber ved stikprøven.

5.1 **(8 point)** Find middelværdien $E[\overline{X}]$ af variablen

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

og afgør om $\overline{X}$ er et unbiased estimat for θ.

Beregn desuden $\mathrm{MSE}[\overline{X}]$ i tilfældet $\theta = 1/2$.

Opgave 6. En arkæolog finder et kranie i et urørt gravsted. Kraniet har en mønt i munden, som er blevet præget med Charles VII i 1422. Seks radiokarbon-målinger estimerer begravelsesåret ved

$$x_1 = 1401, \quad x_2 = 1468, \quad x_3 = 1427, \quad x_4 = 1421, \quad x_5 = 1465, \quad x_6 = 1438.$$

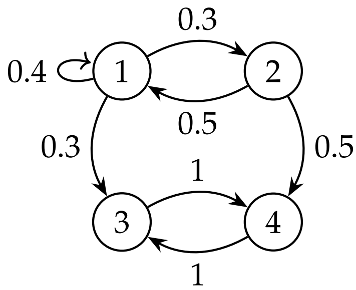
6.1 **(7 point)**

Opstil en rimelig statistisk model for disse data under antagelsen, at målingerne er normalfordelte. Udfør et statistisk test med signifikansniveau 0.12 for nulhypotesen "kraniet er fra 1422". Husk at opstille den alternative hypotese.

6.2 **(5 point)**

Find p-værdien og forklar hvad p-værdien betyder.

Opgave 7. Betragt en Markovkæde $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ med tilstandsrum $S = \{1, 2, 3, 4\}$ og følgende transitionsdiagram:



7.1 **(6 point)** Beregn $P(X_4 = 3|X_0 = 2)$ og $P(X_5 < 3|X_2 = 1)$.

7.2 **(6 point)** Angiv en stationær fordeling for $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ og begrund dit svar.

Argumenter for eller imod at $\{X_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ har en grænsefordeling.

7.3 **(6 point)** Det oplyses at $\{Y_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ med $Y_n = X_{2n}$ er en Markovkæde med tilstandsrum $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

Angiv transitionsdiagrammet for Markovkæden $\{Y_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$.

Opgave 8. Et familiemedlem lover dig en krone for hver påbegyndte time, du kan holde dig fra din mobil. Antag at ventetiden til du bruger mobilen er en kontinuert stokastisk variabel

$$X \sim Exponential(\lambda)$$

med $\lambda > 0$ og lad K være den diskrete stokastiske variabel, der angiver hvor mange kroner du har tjent. Hvis du for eksempel bruger mobilen efter $X = 4.5$ timer for første gang, så har du tjent $K = 5$ kroner og generelt bliver $K = \lceil X \rceil$ det mindste heltal som er X eller større. Vi runder altså op.

8.1 **(8 point)** Vis at K har en geometrisk fordeling og find dens parameter.

Find også sandsynligheden for $K > 7$ givet $X > 6$.