Institut for Matematik
AARHUS UNIVERSITY

Introduktion til Sandsynlighedsteori og Statistik
Markus Kiderlen
September 28, 2023

UGESEDDEL 7

Forelæsningerne i Uge 5: Vi har færdiggjort Afsnit 4.1 i bogen. I stedet for Theorem 4.1 i IPSR, gennemgik jeg Theorem 4.1′ der står på Ugeseddel 6 (og på forelæsningsslide i Brightspace). Det er samme resultat, bare lidt mere overskueligt formuleret. Theorem 4.2 er ikke blevet gennemgået og er heller ikke pensum. Der vil derfor ikke blive stillet opgaver, hvor det er meningen at I skal benytte Theorem 4.2, men hvis I får lyst til at bruge den alligevel er det OK. Vi gennemgik også siderne 5, 11-13, 15-17 i *Introduktion til R* og talte om et eksempel, hvor *Monte Carlo integration* kan bruges.Til sidste pæsenterede jeg PDF og CDF for en eksponentialfordelt stokastisk variable.

Forelæsningerne i Uge 6:

1. **Forelæsning 11 (3. oktober):** Vi gennemgår first noterne om integration ved *substitution* og *partial integration* der findes på Brightspace→Supplerende Noter. Derefter starter vi på Afsnit 4.2, hvor jeg regner med at kunne afslutte den *eksponentielle fordeling* og *normalfordelingen*.

2. **Forelæsning 12 (5. oktober):** Vi afslutter gennemgangen af Afsnit 4.2 (*gamma fordelingen*). Afsnit 4.3 er ikke pensum og vil ikke blive gennemgået. Vi ser på *The Coupon Collector's Problem* (Brightspace→Content→Supplerende Noter) og starter derefter på Kapitel 5.

Bemærkninger vdr. eksamen:

1. Hvis der ikke eksplicit er angivet andet i en opgave er det OK at udregne integraler, matrix-produkter, løsninger af lineære ligningssystemer og lignende ved brug af lommeregner, `R` eller tilsvarende programmer. Det er dog vigtigt at man tydeligt angiver hvad man gør, samt at man opstiller de givne integraler, matricer, ligningssystemer der skal udregnes, så det er klart hvad der foregår. En undtagelse til dette er hvis der eksplicit står i en delopgave at besvarelsen skal indeholde *alle relevante mellemregninger*. Der er givet et eksempel på dette i det følgende.

   Opgave: Udregn integralet $\int_0^1 xe^x \, dx$ med alle relevante mellemregninger.

   Besvarelse: (jeg angiver to mulige løsninger.)

   Løsning 1: Ved brug af partial integration får jeg at

$$\int_0^1 xe^x \, dx = \left[xe^x \right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x \, dx = (1 \cdot e^1 - 0) - (e^1 - 1) = 1,$$

hvor der er brugt at e^x er en stamfunktion til e^x og at $f(x) = x$ opfylder $f'(x) = 1$.

Løsning 2: Hvis man i stedet for vælger at gætte en stamfunktion skal man så verificere at ens gæt vitterligt er en stamfunktion. I dette tilfælde kunne vi gætte på at $xe^x - e^x$ er en stamfunktion til xe^x, og for at verificere dette gør vi følgende. Pr. produktreglen for differentiation, og da $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ og $\frac{d}{dx}x = 1$ fås at

$$\left(xe^x - e^x\right)' = 1 \cdot e^x + xe^x - e^x = xe^x,$$

hvilket viser at $xe^x - e^x$ er en stamfunktion til xe^x. Nu fås at

$$\int_0^1 xe^x\,dx = \Big[xe^x - e^x\Big]_0^1 = \left(1 \cdot e^1 - e^1\right) - \left(0 \cdot e^0 - e^0\right) = 1.$$

2. **Fordelingen for en stokastisk variabel:** Man kan ofte blive stillet et spørgsmål af typen: *Find fordelingen for en given stokastisk variabel X.* Hvis X er fordelt som en af vores standardfordelinger er det bedste svar at angive standardfordelingen inklusiv parametrene, ellers kan man angive fordelingsfunktionen (CDF'en). Hvis X er diskret kan man også angive PMF'en og hvis X har en tæthedsfunktion (PDF) kan man angive denne.

3. **Pensumliste for kurset (foreløbig version):**

   - IPSR: Kapitel 1. Siderne 85-93 i Kapitel 2. Kapitel 3. Kapitel 4 pånær Afsnit 4.3. Kapitel 5. Kapitel 8. Afsnit 11.2.
   - Introduktion til R: Siderne 2-5, 11-13, 15-17, 19-20.
   - Alle ugesedler inklusiv opgaverne stillet på dem.

   Jeg vil gerne understrege at dette er en foreløbig pensumliste, den endelige version kommer i slutningen af kurset.

Teoretiske øvelser i Uge 7 (9. - 15. oktober): I flere af opgaverne til denne uge skal man benytte integration ved substitution, partial integration samt eksponentialfordelingen. Alle disse emner gennemgåes til forelæsningen tirsdag d. 4. oktober.

Del 1:

1. Øvelse A nedenfor.

2. Eksamen, Vinter 2018/2019, Opgave 2.

3. Eksamen, Vinter 2018/2019, Opgave 3.

4. Eksamen, Vinter 2019/2020, Opgave 2.

Del 2:

1. Øvelse B nedenfor.
2. Sektion 4.4: Øvelse 10. *Find først* $F_Y(y)$.
3. Øvelse C nedenfor (denne opgave er svær).

Øvelse A: Lad $X \sim Exponential(\lambda)$ for et $\lambda > 0$, og sæt $Y = e^{2X} - 1$. Find tæthedsfunktionen (PDF'en) f_Y for Y.

Øvelse B: Lad X betegne en stokastisk variable. En median for X er et reelt tal m der opfylder at

$$P(X \geq m) \geq \frac{1}{2} \quad \text{samt} \quad P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}.$$

Det kan bemærkes at der altid eksisterer en median, men at den ikke nødvendigvis er entydigt bestemt.

(a) Beregn medianerne for X hvis $X \sim Uniform(a, b)$ hvor $a < b$.

(b) Beregn medianerne for X hvis $X \sim Exponential(\lambda)$ hvor $\lambda > 0$.

Sammelign medianerne i (a) og (b) ovenfor med de tilhørende middelværdier.

(c) Diskuter, om du er enig i følgende udsagn på skiltet, som jeg så i en butik ved vesterhavet.

Øvelse C: For $\alpha > 0$ lad $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$ betegne gammafunktionen.

(a) Vis at $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ for $\alpha > 0$.
Hvilken integrationsteknik vil du benytte til at løse denne opgave med?

(b) Vis at $\Gamma(n) = (n-1)!$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Hint: Benyt (a).

(c) Antag $X \sim Exponential(\lambda)$ og $n = 1, 2, 3, \ldots$. Vis at

$$E[X^n] = \frac{n!}{\lambda^n}.$$

Hint: Benyt (b).

Denne opgave viser specielt egenskaberne 3. og 4. i boksen på side 191 om gammafunktionen (Afsnit 4.2.4). Gammafunktionen spiller en vigtig role i forbindelse med mange matematiske problemer, f.eks. i talteori.

Afleveringsopgave 7: Lad X betegne en kontinuert stokastisk variabel med tætheds-funktion (PDF) f_X givet ved

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{hvis } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Sæt $Y = -\frac{1}{2}\log(X)$ (*husk, at* $\log(x)$ *er den naturlige logaritme, dvs. den omvendte funktion til* e^x). Find tæthedsfunktionen f_Y for Y. Som altid, angiv fordelingen for Y hvis det er en af vores standardfordelinger.

Ugens udfordring: Hvis X er en stokastisk variabel med PDF f_X og $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en funktion, giver LOTUS at

$$E\big[g(X)\big] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx \tag{1}$$

(når integralet eksisterer).

Vi har dog aldrig bevist LOTUS; dette vil vi gøre i et specialtilfælde i det følgende. Antag at g er strengt voksende med invers funktion h, at h er differentiabel og at $h'(x)$ er kontinuert. Giv et bevis for LOTUS, dvs. (1), ved anvendelse af Transformationssætningen (Theorem 4.1′ på Ugeseddel 6).