Afleveringsopgave 4

INTRODUKTION TIL STATISTIK OG SANDSYNLIGHEDSTEORI

Kristopher B.E. Märcher, studienummer: 202205825

25.9.2023

Afleveringsopgave 4: Lad $0 < p < 1$ og $X \sim \text{Geometric}(p)$.

(a) Udregn fordelingsfunktionen $F_X(x) = P(X \leq x)$ for alle $x = 1, 2, 3, \ldots$.
Hint: Anvend resultater for summer, se ugesedel 1.

(b) Vis at X har ingen hukommelse, dvs.

$$P(X > m + k | X > m) = P(X > k) \qquad \text{for alle } k, m = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

---

a

Vi ved her at fordelingsfunktionen $F_x(X)$ er en geometrisk fordeling. Desuden ved vi at en geometrisk fordeling har følgende PMF udfra definition 3.5:

$$P_x(X) = \begin{cases} P(1-p)^x - 1 & \text{for 1,2,3...} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{1}$$

Desuden ved vi at P(X≤x) findes ved:

$$P(X \leq x) = P(X = 1) + P(X = 2) \ldots . P(X = x)$$

Derved kan vi skrive dette som en sum:

$$\Sigma_{i=1}^{x} p \cdot (1-p)^{i-1}$$

Denne kan omskrives til:

$$p \cdot \Sigma_{i=1}^{x-1} (1-p)^i$$

Eftersom at vi ganger p på alle led.
Vi kan nu skrive dette om til:

$$p \cdot \frac{1-(1-p)^x}{1-(1-p)}$$

Ved at bruge sætning 1, om geometriske summer fra ugeseddel 1. Eftersom vi ved at 0<p<1 gælder kan vi regne os frem til at udtrykket 1-(1-p)=p. Derved får vi:

$$p \cdot \frac{1-(1-p)^x}{p}$$

Dette giver os:

$$1-(1-p)^x$$

Derved ved vi nu at fordelingsfuntionen for $F_x(X) = P(X \leq x) = 1-(1-p)^x$

b

Vi skal i denne opgave bevise at:

$$P(X > m + k | X > m) = P(X > k)$$

Her kan vi omskrive de forskellige udtryk ved brug af resultatet fra opgave a og komplement:

$$P(X > k) = 1 - (1 - (1 - p)^k) = (1 - p)^k$$

$$P(X > m) = 1 - (1 - (1 - p)^m) = (1 - p)^m$$

$$P(X > m + k) = 1 - (1 - (1 - p)^{m+k}) = (1 - p)^{k+m}$$

Vi kan desuden omskrive $P(X > m + k|X > m)$ ved brug af definiation 1.2 om conditional probability:

$$P(X > m + k | X > m) = \frac{P(X > m + k \cap X > m)}{P(X > m)}$$

Eftersom at X>m er et subset af X>m+k kan vi bruge reglen om subsets fra side 42:

$$P(X > m + k | X > m) = \frac{P(X > m+)}{P(X > m)}$$

Vi kan nu skrive udtrykket som følger:

$$\frac{(1 - p)^{k+m}}{(1 - p)^m} = (1 - p)^k$$

og eftersom $P(X > k) = (1 - p)^k$ Har vi nu vist at udtrykket er sandt og dermed vist at X ingen hukommelse har.