Ramificació i Poda

Algorísmica Avançada | Enginyeria Informàtica

Santi Seguí | **2025-2026**

Ramificació i poda

més conegut com ***Branch and Bound***

Ramificació i poda

- Els algoritmes de **ramificació i poda implementen** l'algoritme de **backtracking**, però no a l'inversa.

- L'objectiu de ramificació i poda consisteix en reduir l'espai de cerca, per això s'introdueixen **cotes.** Podem fer ús d'aquestes cotes per **ramificar** i **podar** l'espai de cerca.

- Els podem veure com una variant millorada del backtracking aplicada majoritàriament a problemes d'**optimització** combinatòria o matemàtica.

  - Utilitzat per a problemes **d'optimització**:

    - e.g.: $min_{x \in X} f(x)$

Ramificació i poda

- Un dels punts principals dels algoritmes de ramificació i poda és **trobar i definir una funció que determinarà la cota inferior i/o superior al problema d'optimització** que volem resoldre. Aquesta funció serveix per avaluar l'eficàcia de les possibles solucions durant el procés de cerca. Un cop definida, l'algoritme explora el node més prometedor en cada etapa, descartant (podant) aquells nodes en què la cota superior és inferior (o la cota inferior és superior, en problemes de minimització) a una solució ja obtinguda.

- No limita l'exploració a la cerca amb profunditat (DFS).

Ramificació i poda

Què ens diuen les cotes:

- La **cota superior** ens indica la solució màxima que podríem (no assegura) arribar a trobar si seguim el node donat.
- La **cota inferior** ens indica la solució mínima que podríem (no assegura) arribar a trobar si seguim el node donat.
- En problemes de **maximització**, ens interessa explorar tots aquells nodes on la seva cota superior sigui més gran que la millor solució trobada fins el moment
- En problemes de **minimització**, ens interessa explorar tots aquells nodes on la seva cota inferior sigui més petita que la millor solució trobada fins el moment

Ramificació i poda

- A la **ramificació i poda** tenim tres tipus de nodes:
    - **Nodes actius**: és un node que s'ha generat però té els fills sense generar.
    - **E-Node**: és un node “viu” amb els fills que s'estan generant actualment.
    - **Dead node (node mort)**: és un node generat que no s’expandirà ni explorarà més.

Ramificació i poda

El **pseudocodi** d'un algoritme de ramificació i poda pot seguir el següent esquema:

```
def branch_and_bound():
    activeset = [root_node]
    best_solution = None

    while(activset not empty):
        choose the most promising node k from activeset
        remove the node k from activeset
        generate the children of node k and estimate its lower and upper bound
        for each child i of node k:
            if (upper bound of child i is worse than bestval):
                kill child i
            elif(child i is a complete solution):
                bestval = solution
            else:
                add child i to activeset
```

Ramificació i poda

Problema assignació de tasques

- **Problema**: Disposem de 4 tasques i 4 empreses, cadascuna de les quals pot dur a terme qualsevol de les tasques. Cada empresa ha proposat un cost X per realitzar cada tasca. L'objectiu és **assignar una tasca diferent a cada empresa** de manera que el cost **total sigui el mínim possible**.

  → **Objectiu**: Realitzar una assignació òptima de tasques a empreses que **minimitzi el cost total**.

- El cost de les tasques per a cada una de les empreses està definit segons la taula següent:

	T1	T2	T3	T4
A	11	12	18	40
B	14	15	13	22
C	11	17	19	23
D	17	14	20	28

Cost de les empreses A, B, C i D, per a les tasques T1, T2, T3 i T4

Ramificació i poda

- **Cota inferior:** suma mínims de cada columna. És a dir, assignem a cada tasca l'empresa més econòmica sense tenir en compte una de les restriccions del problema.

	T1	T2	T3	T4
A	11	12	18	40
B	14	15	13	22
C	11	17	19	23
D	17	14	20	28

Cost de les empreses A, B, C i D, per a les tasques T1, T2, T3 i T4

$$z^- \geq 11 + 12 + 13 + 22 = 58$$

- **Cota superior: una solució qualsevol**

$$A \rightarrow T_1, B \rightarrow T_2, C \rightarrow T_3, D \rightarrow T_4$$

$$z^+ \leq 11 + 15 + 19 + 28 = 73$$

la solució

$$58 \leq z^* \leq 73$$

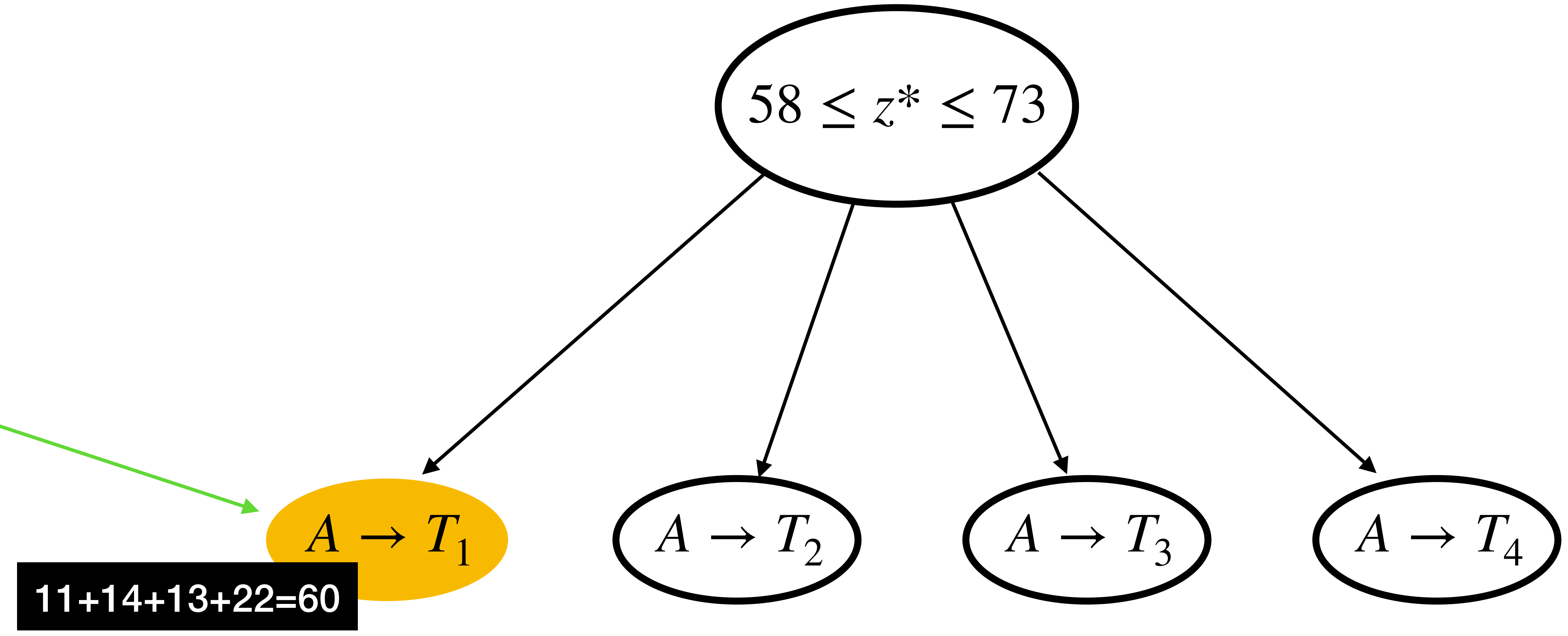
cota inferior

cota superior

Ramificació i poda

- Comencem la cerca
  - El primer pas consisteix en assignar una tasca a l'empresa **A**

	T1	T2	T3	T4
A	11	~~12~~	~~18~~	~~40~~
B	~~14~~	15	13	22
C	~~11~~	17	19	23
D	~~17~~	14	20	28

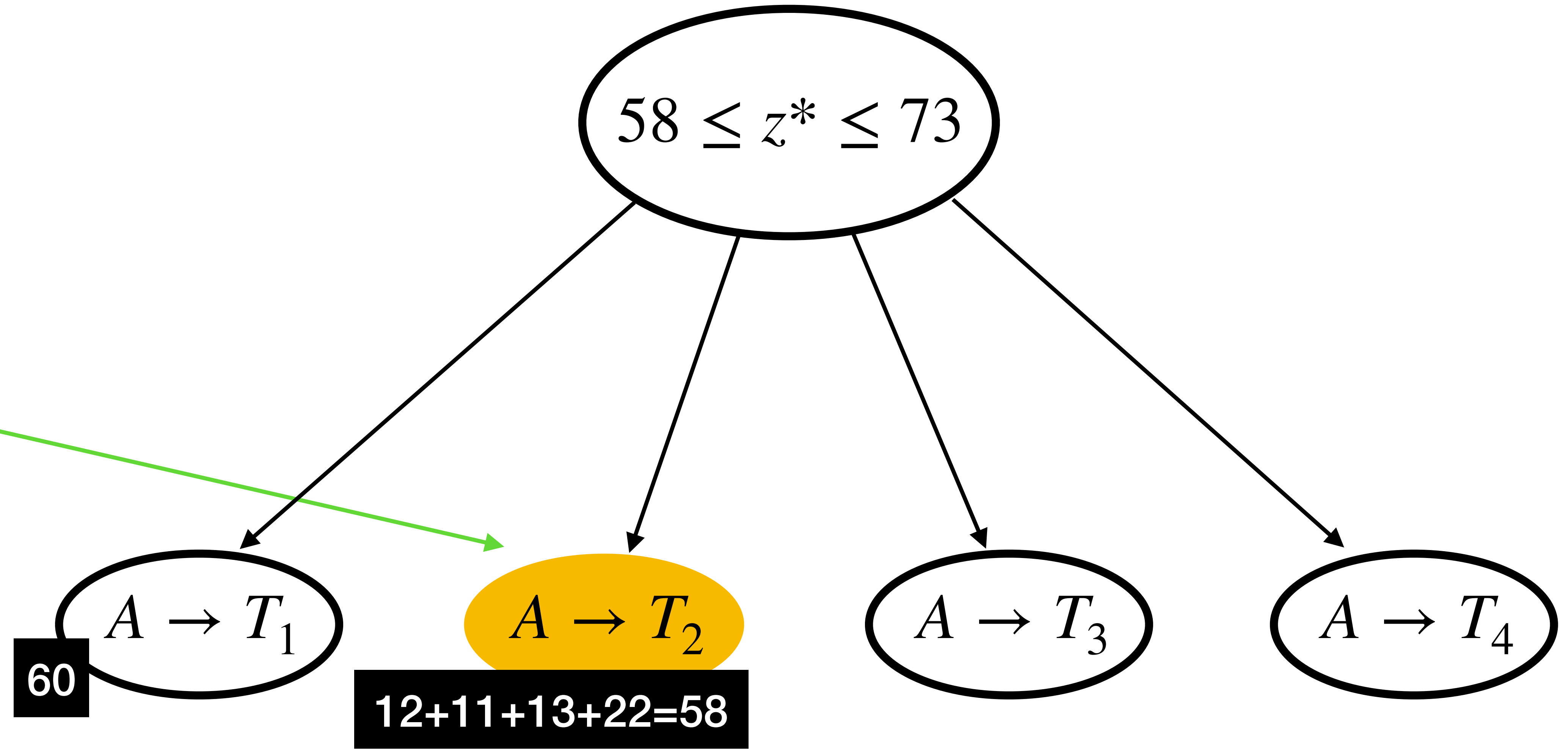


En cas d'assignar la tasca T1
Cota inferior en aquest node $c^- = 60$

Ramificació i poda

- Comencem la cerca
  - El primer pas consisteix en assignar una tasca a l'empresa **A**

	T1	T2	T3	T4
A	~~11~~	12	~~18~~	~~40~~
B	14	~~15~~	13	22
C	11	~~17~~	19	23
D	17	~~14~~	20	28

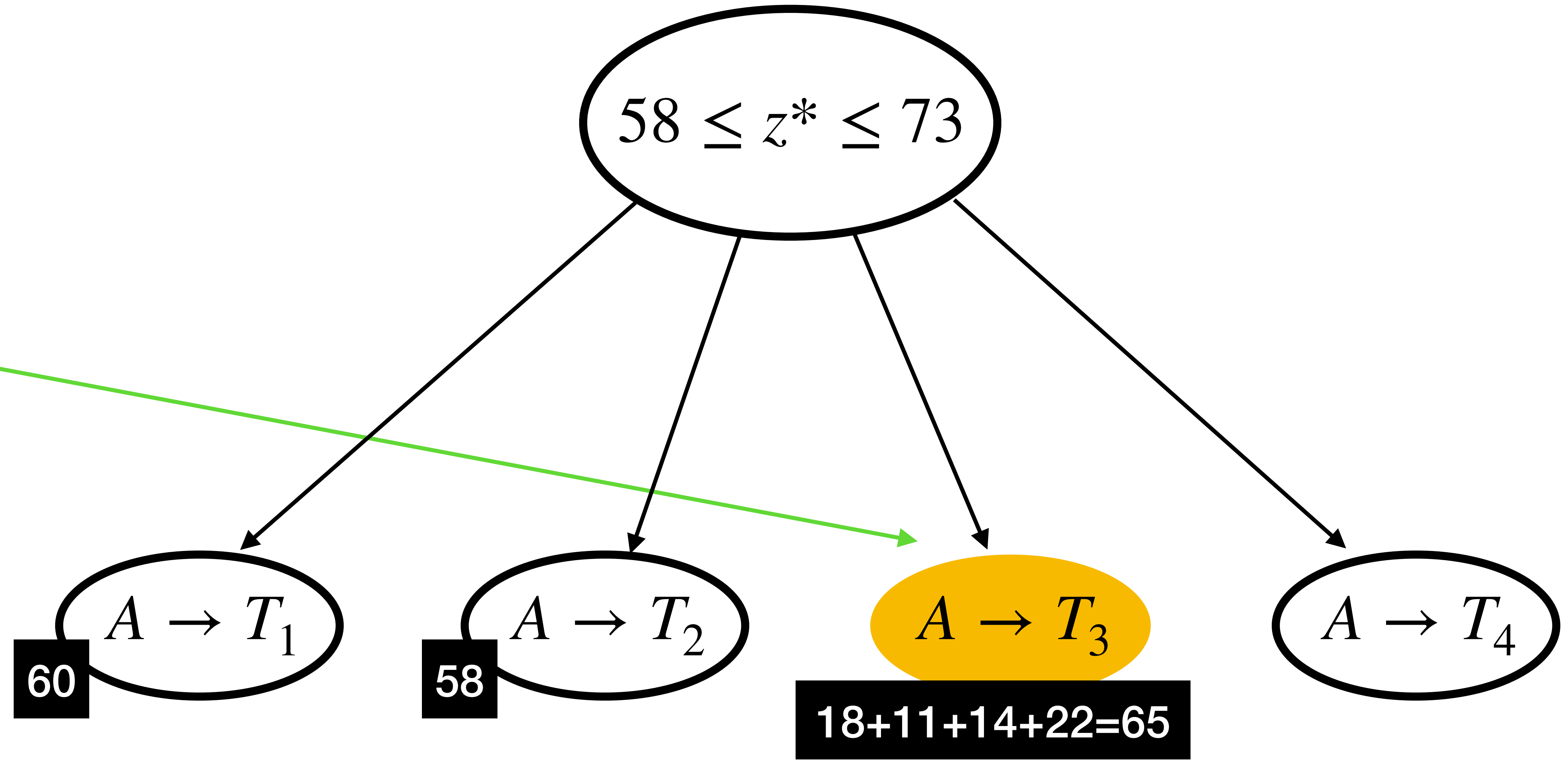


En cas d'assignar la tasca T2
Cota inferior en aquest node $c^- = 58$

Ramificació i poda

- Comencem la cerca
  - El primer pas consisteix en assignar una tasca a l'empresa **A**

	T1	T2	T3	T4
A	~~11~~	~~12~~	18	~~40~~
B	14	15	~~13~~	22
C	11	17	~~19~~	23
D	17	14	~~20~~	28

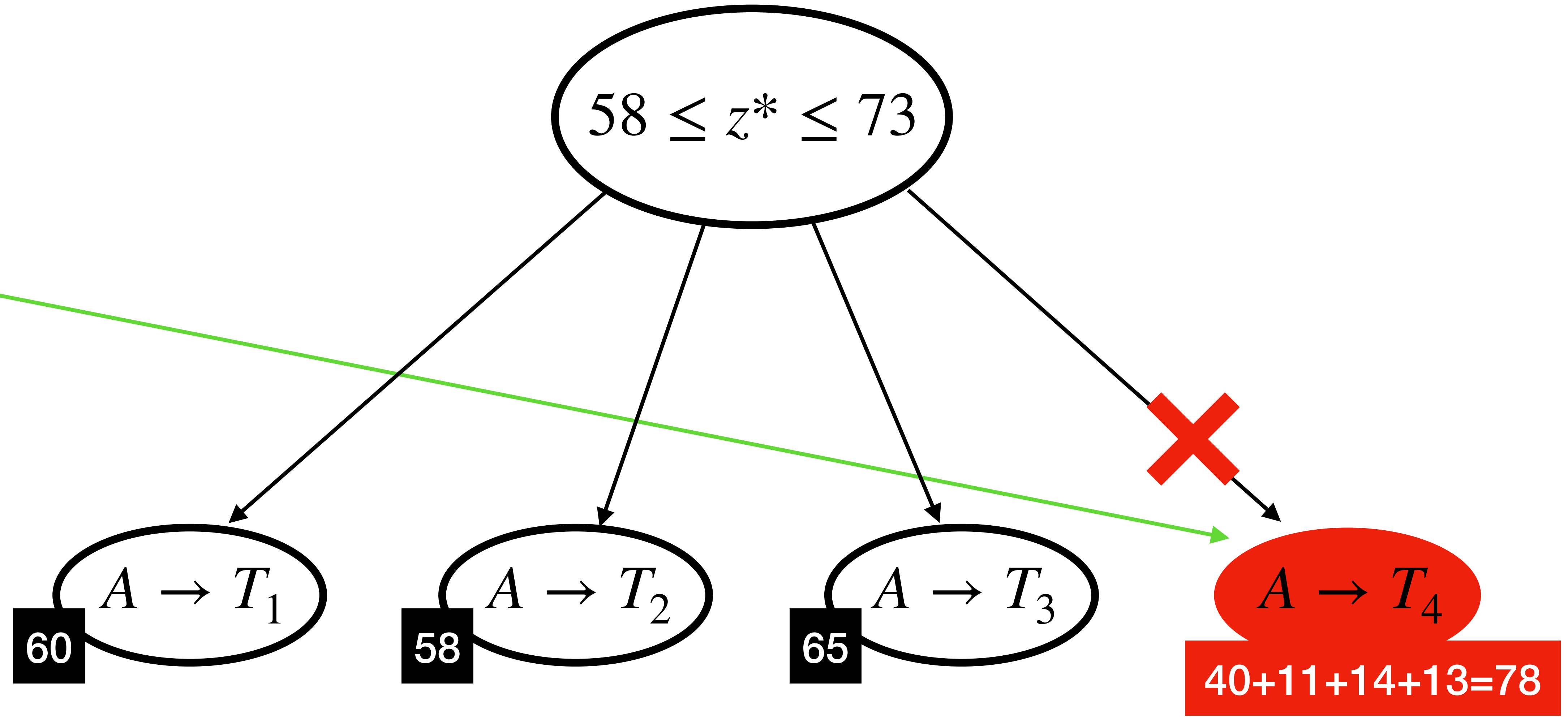


En cas d'assignar la tasca T3
Cota inferior en aquest node $c^- = 65$

Ramificació i poda

- Comencem la cerca
  - El primer pas consisteix en assignar una tasca a l'empresa **A**

	T1	T2	T3	T4
A	~~11~~	~~12~~	~~18~~	40
B	14	15	13	~~22~~
C	11	17	19	~~23~~
D	17	14	20	~~28~~



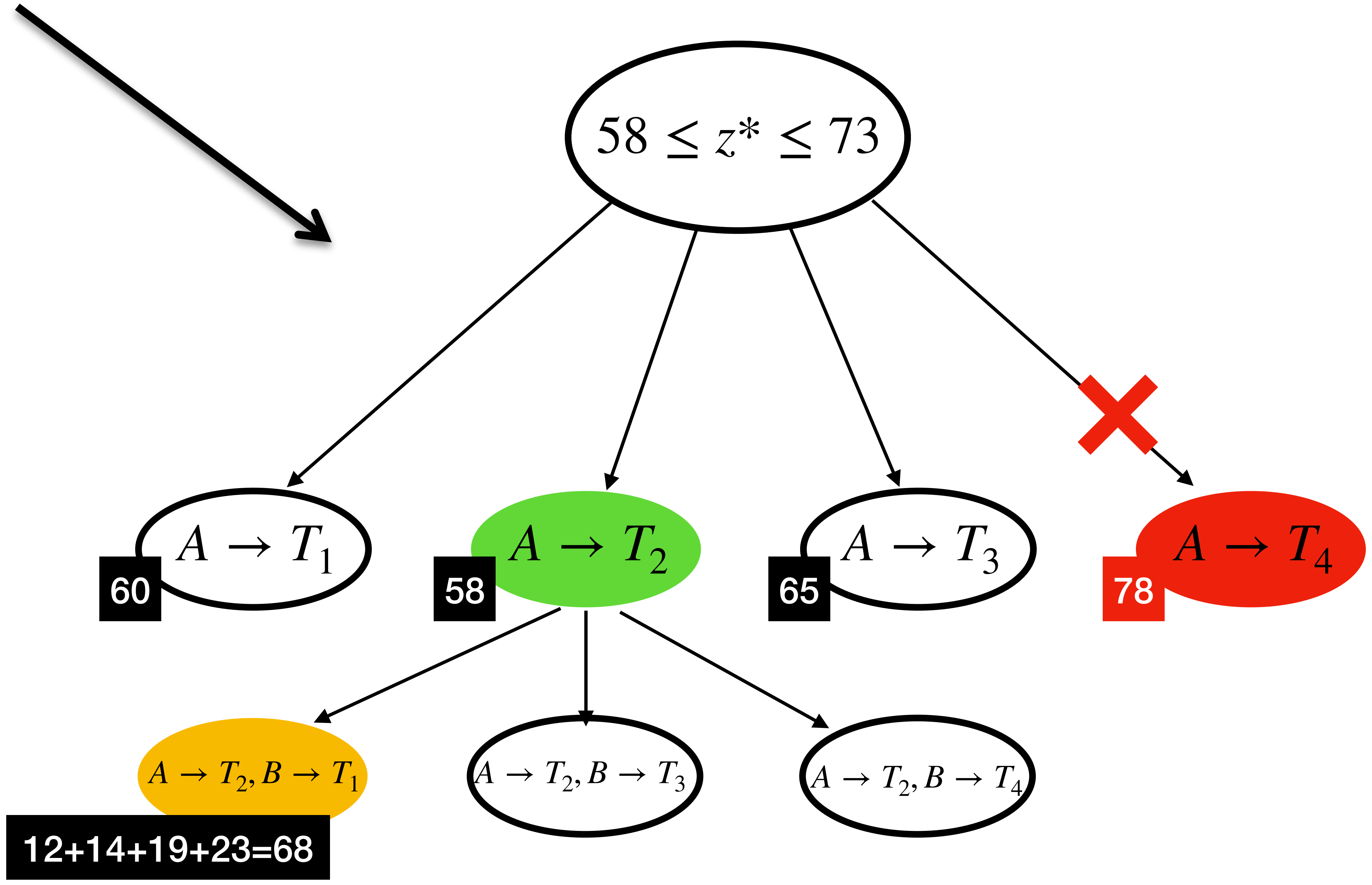
La cota inferior d'aquest node és superior a la cota superior actual
-> matem el node

En cas d'assignar la tasca T4
Cota inferior en aquest node $c^- = 78$

Ramificació i poda

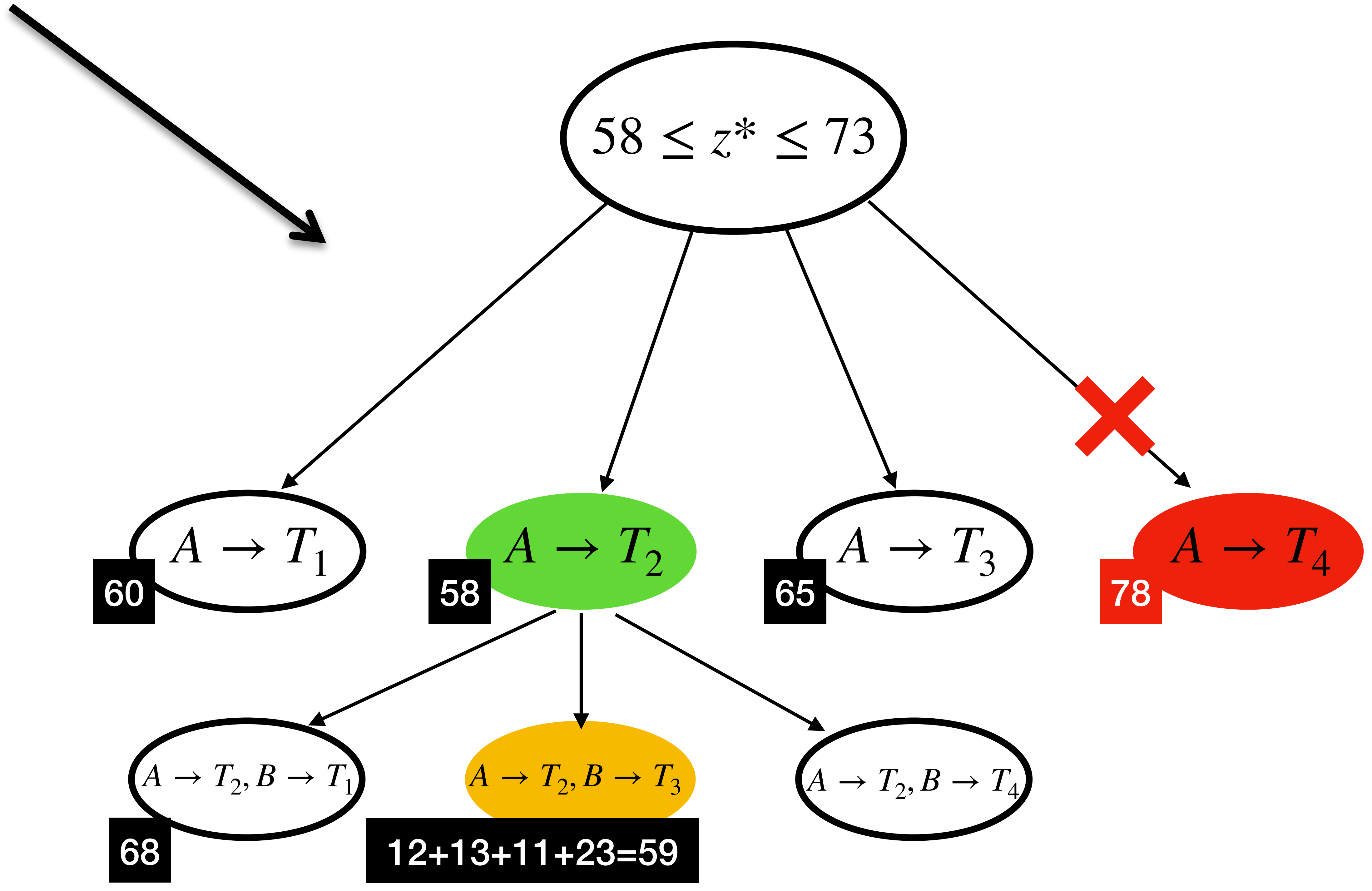
- ***Branching***: quina rama resulta més interessant per a ser explorada

	T1	T2	T3	T4
A	~~11~~	12	~~18~~	~~40~~
B	14	~~15~~	~~13~~	~~22~~
C	~~11~~	~~17~~	19	23
D	~~17~~	~~14~~	20	28



Ramificació i poda

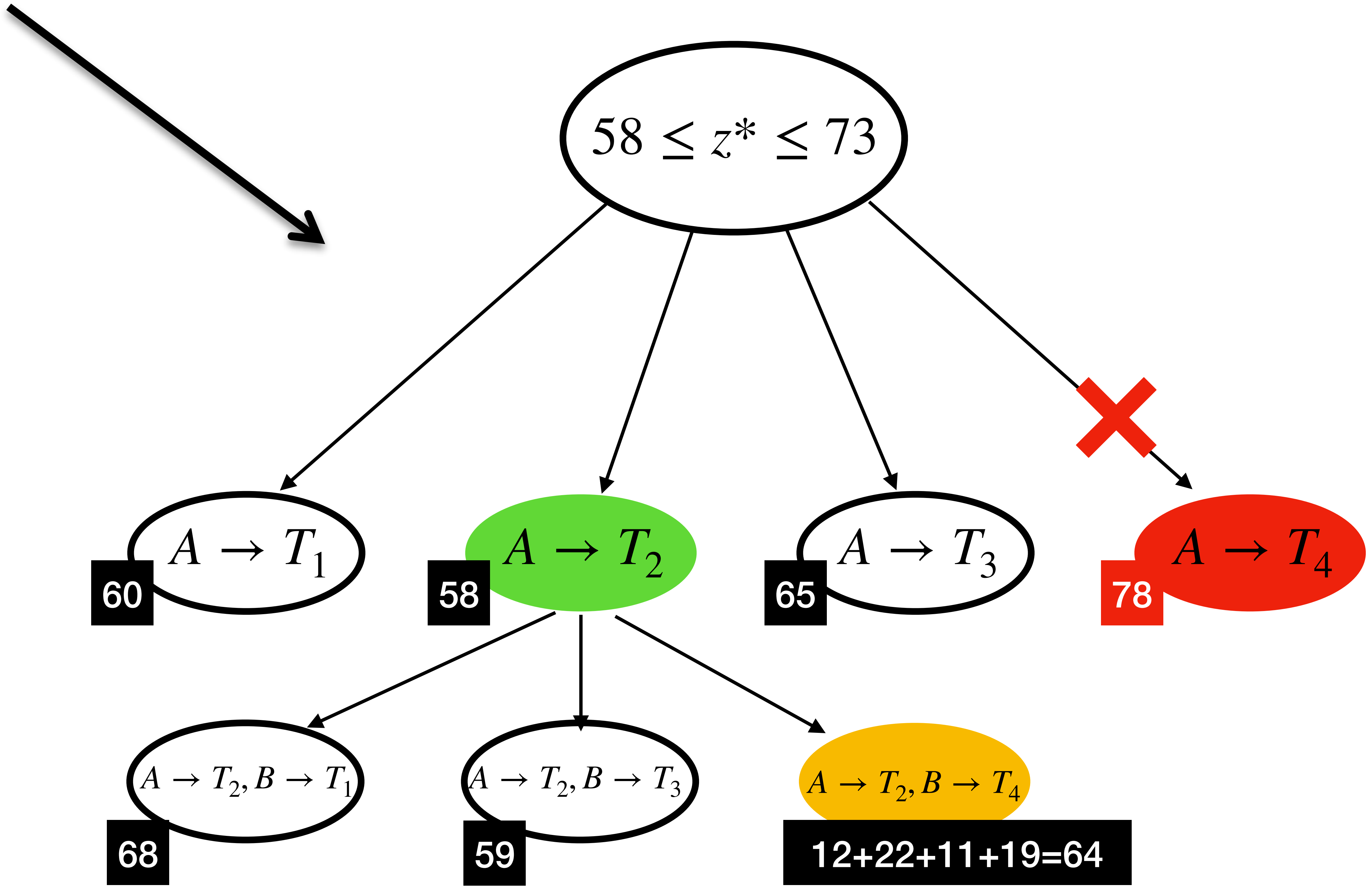
- ***Branching***: quina rama resulta més interessant per a ser explorada



	T1	T2	T3	T4
A	~~11~~	12	~~18~~	~~40~~
B	~~14~~	~~15~~	13	~~22~~
C	11	~~17~~	~~19~~	23
D	17	~~14~~	~~20~~	28

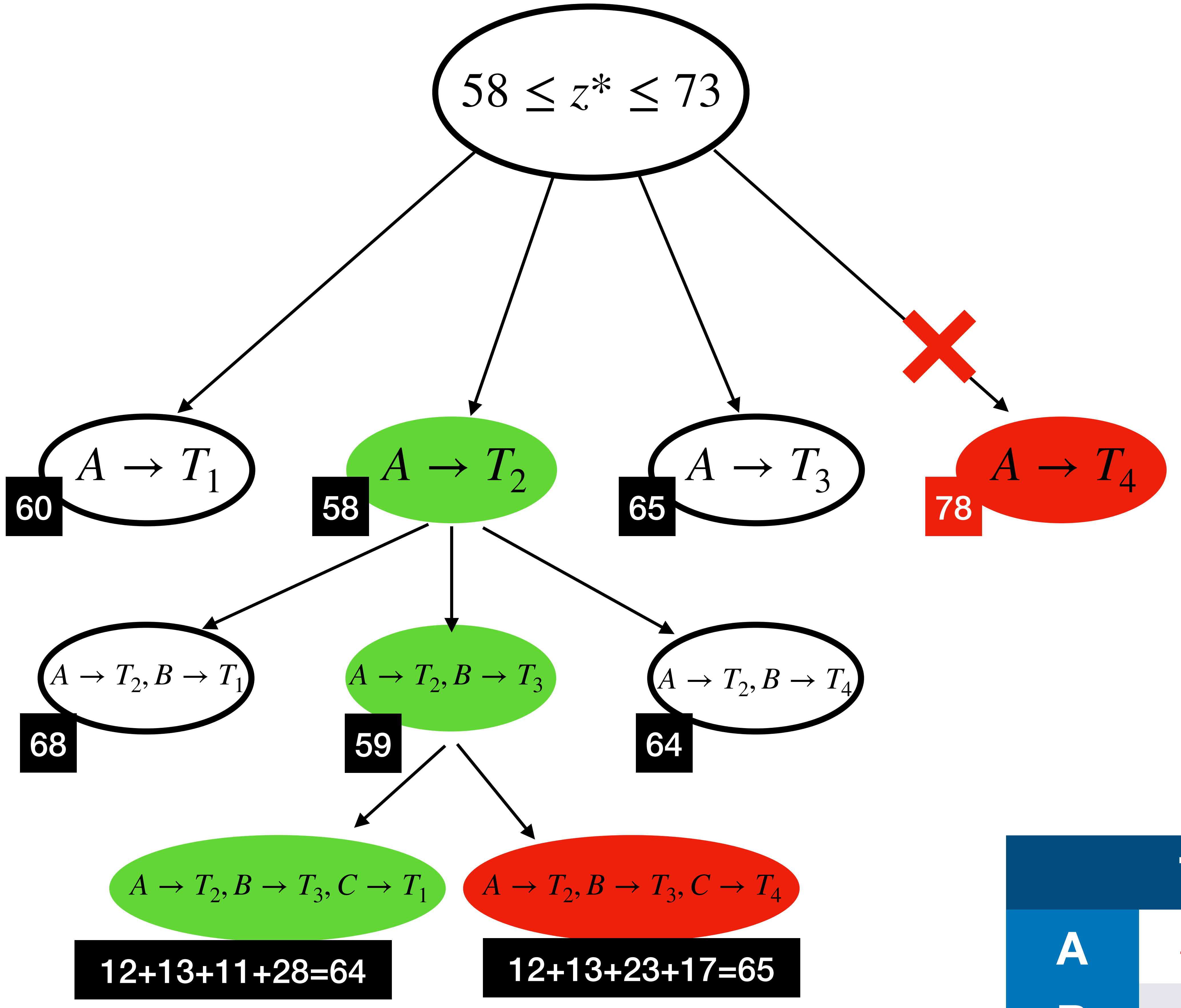
Ramificació i poda

- ***Branching***: quina rama resulta més interessant per a ser explorada



	T1	T2	T3	T4
A	~~11~~	12	~~18~~	~~40~~
B	~~14~~	~~15~~	~~13~~	22
C	11	~~17~~	19	~~23~~
D	17	~~14~~	20	~~28~~

Ramificació i poda



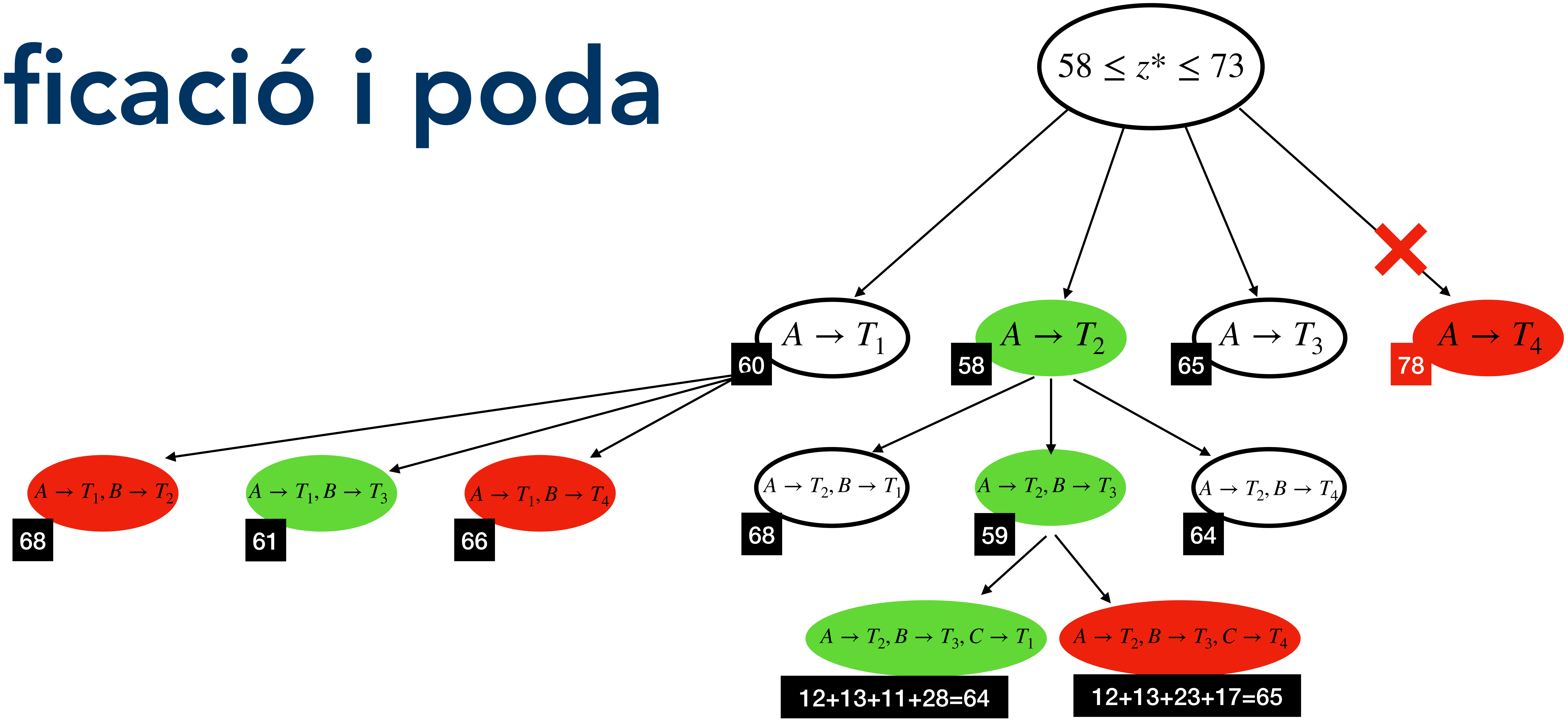
	T1	T2	T3	T4
A	~~11~~	12	~~18~~	~~40~~
B	~~14~~	~~15~~	13	~~22~~
C	11	~~17~~	~~19~~	~~23~~
D	~~17~~	~~14~~	~~20~~	28

	T1	T2	T3	T4
A	~~11~~	12	~~18~~	~~40~~
B	~~14~~	~~15~~	13	~~22~~
C	~~11~~	~~17~~	~~19~~	23
D	17	~~14~~	~~20~~	~~28~~

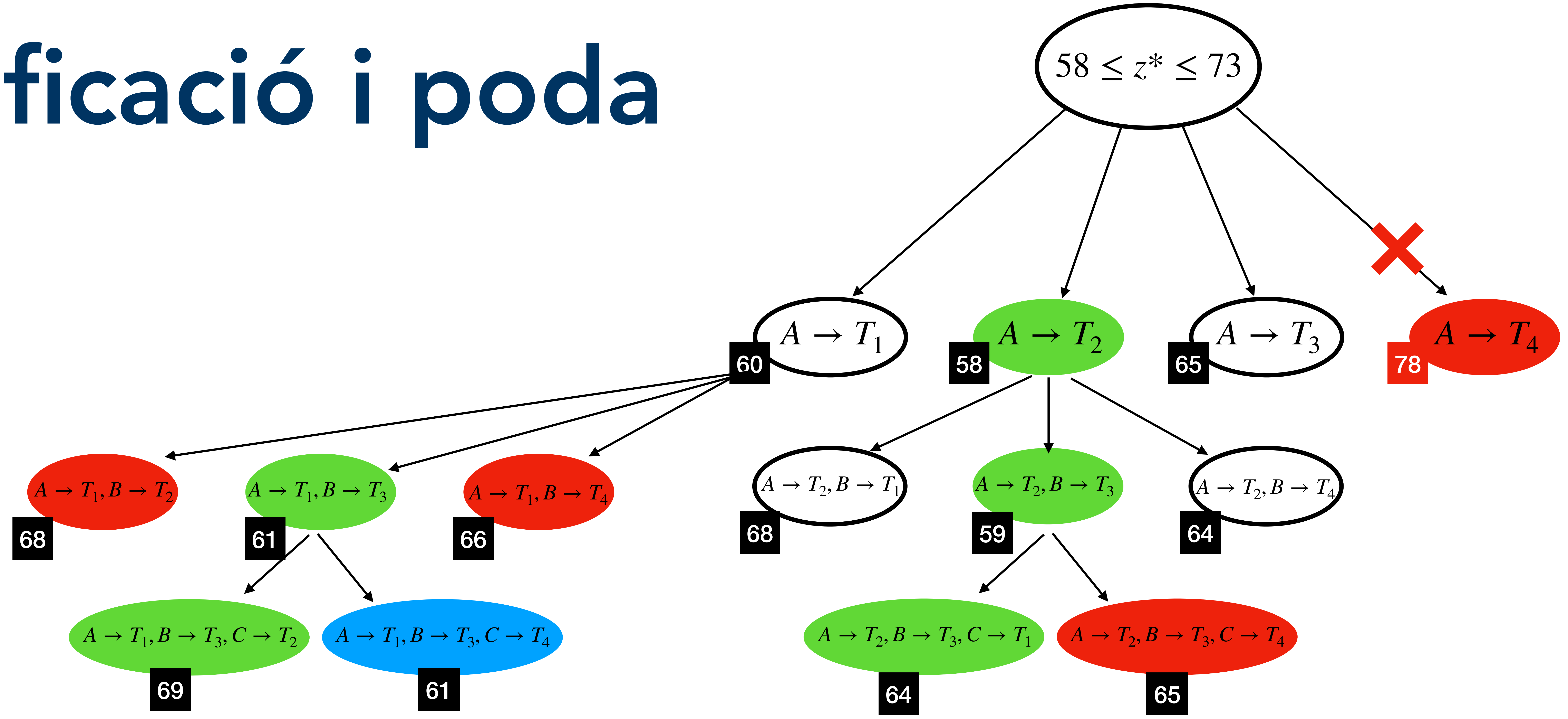
$$\boxed{58 \leq z^* \leq 64}$$

Hem trobat una solució, per tant tenim una nova cota superior

Ramificació i poda



Ramificació i poda

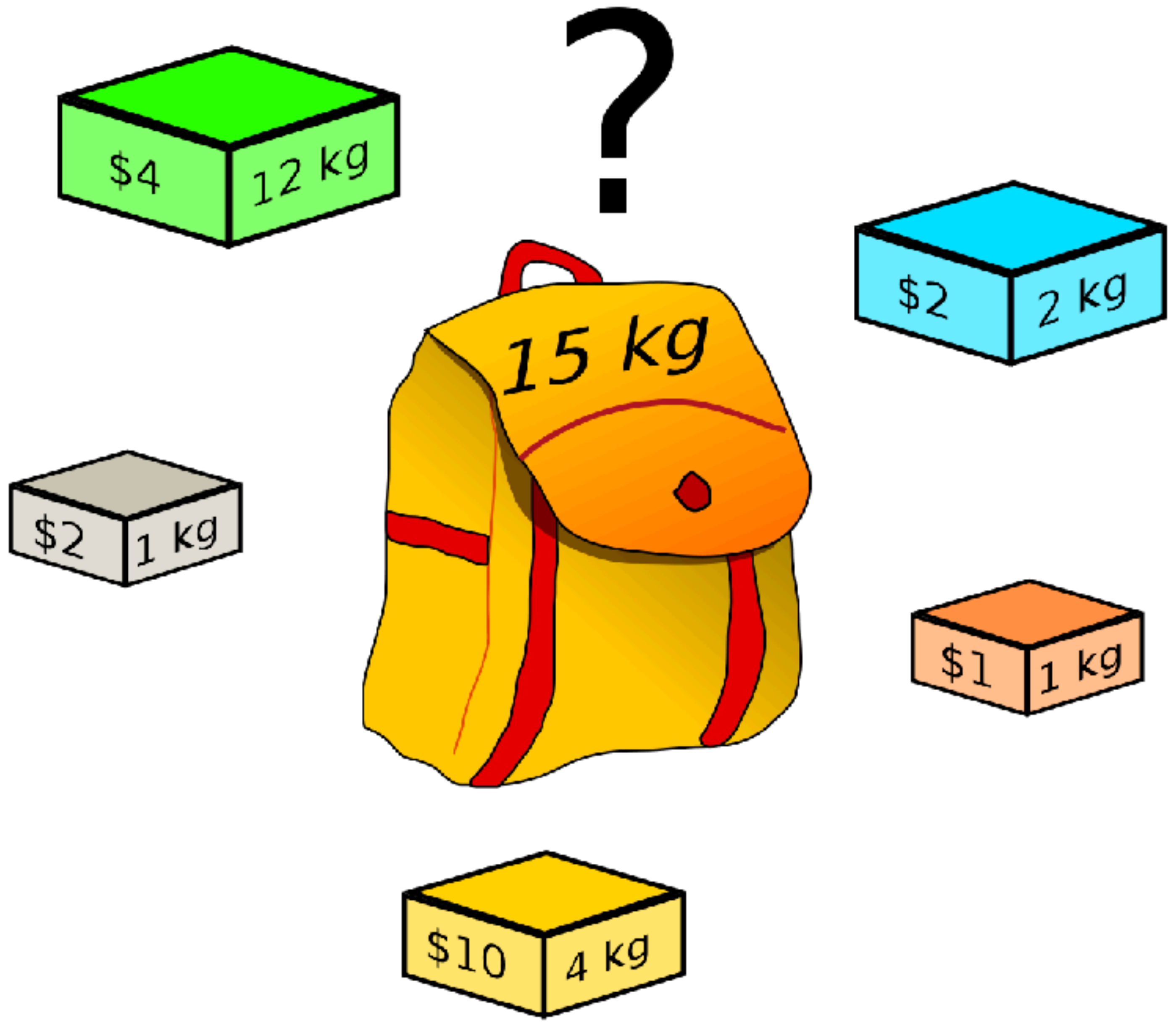


	T1	T2	T3	T4
A	11	~~12~~	~~18~~	~~40~~
B	~~14~~	~~15~~	13	~~22~~
C	~~11~~	~~17~~	~~19~~	23
D	~~17~~	14	~~20~~	~~28~~

Hem trobat una nova solució amb valor més baix que la cota superior.
No ens queden nodes amb la c^- inferior a la c^+ actual.

Ramificació i poda

Problema de la motxilla



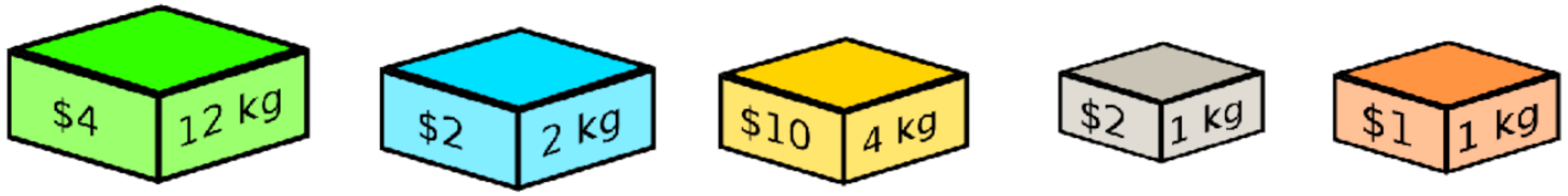
Solució amb **ramificació i poda?**

Ens trobem en front un problema de **maximització**.

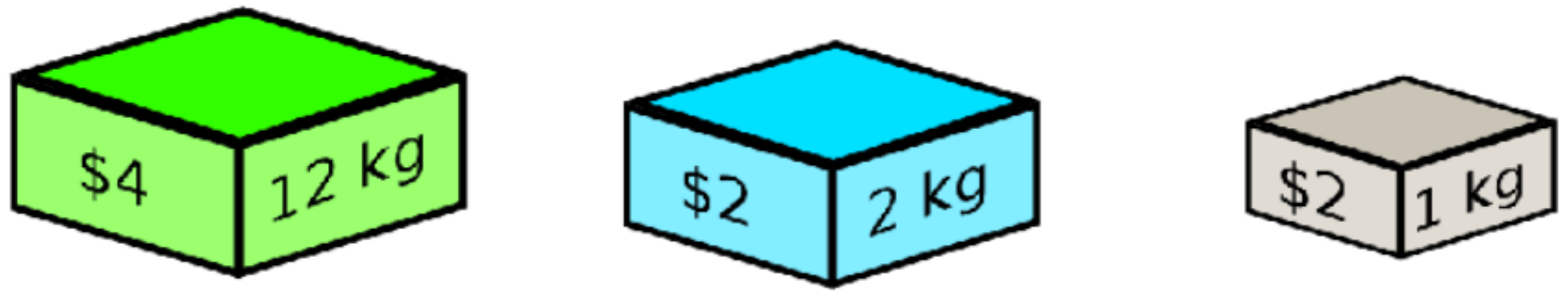
Ramificació i poda

Problema de la motxilla

- Definim com calcular la cota inferior i la cota superior. Les podem calcular de la següent manera:
    - **Cota superior**: agafem tots els objectes que **individualment** càpiguen dins la motxilla. En el nostre cas, com que la motxilla té una capacitat màxima de 15kg, podrem considerar tots els objectes que individualment pesin menys de 15kg. Per tant, en el nostre exemple, la cota superior inicial equival a 4+2+10+1+2 = 19$.



-
    - **Cota inferior**: agafem els primers objectes de la llista fins a arribar a la capacitat màxima de la motxilla. En el nostre exemple, la cota inferior inicial equival a 4+2+2 = 8$.



Ramificació i poda

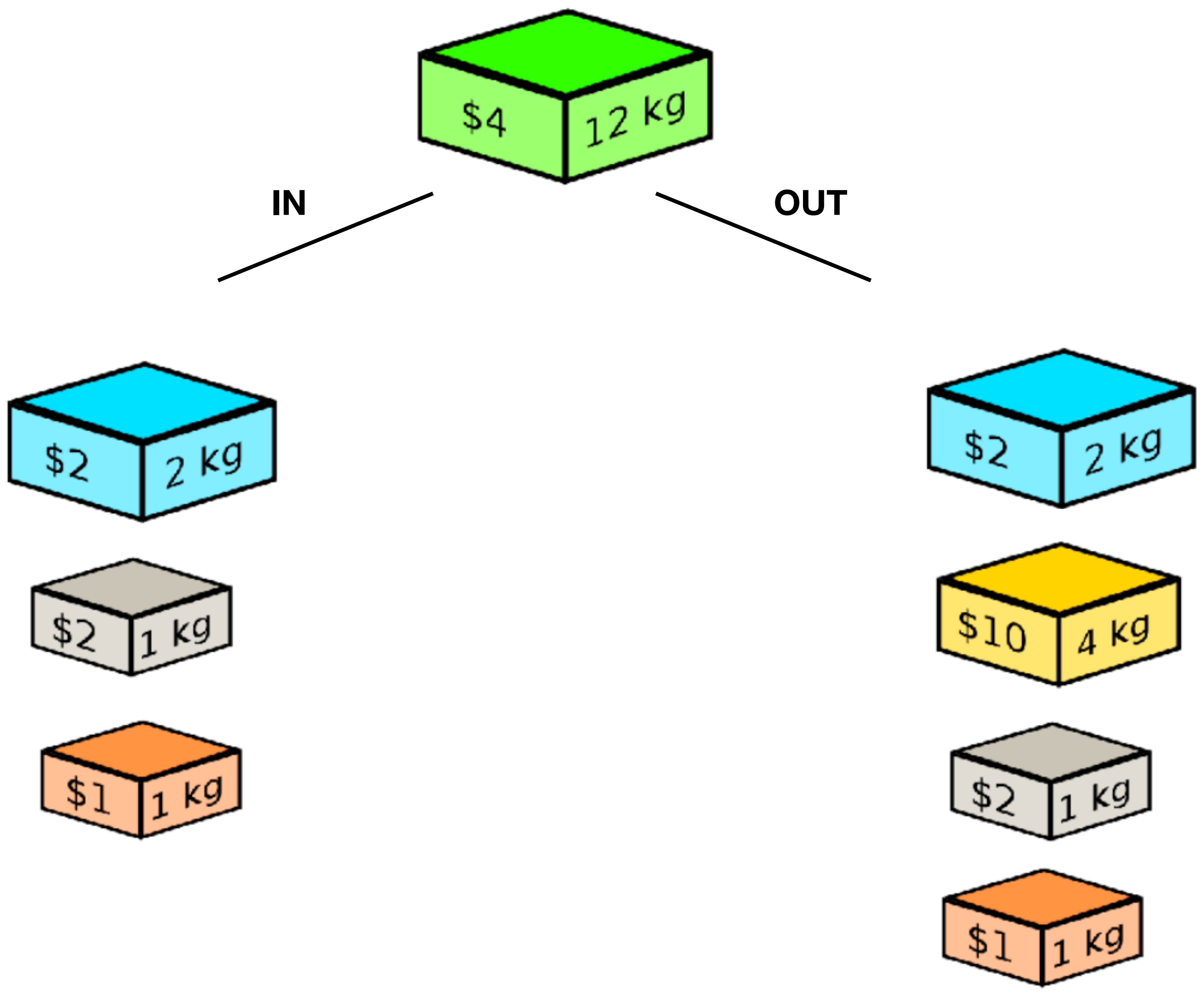
Problema de la motxilla

cota inferior: 7$

- Considerem un primer objecte, en aquest cas l'objecte de verd amb valor de $4 i pes de 12kg.

- Calculem la cota superior i inferior de les dues opcions (agafar i no agafar l'objecte) i en cas que la seva cota superior sigui millor que el millor resultat obtingut fins aleshores afegim el fill a la llista de nodes a explorar.

- **Si agafem l'objecte verd:**
    - **Cota superior**: 4$ + el valor de la resta d'objectes que **individualment** càpiguen dins la motxilla (4+2+2+1). L'objecte groc no és considerat ja que la capacitat restant de la motxilla és 3kg i l'objecte groc pesa 4 kg. Cota Superior: 9$
    - **Cota inferior**: 4$ + el valor dels objectes següents fins arribar a la capacitat màxima. Cota Inferior: 4 + 2 + 2 = 8$
  - –> La cota superior és més gran que la cota inferior actual-> afegim l'opció com a opció a explorar



Ramificació i poda

Problema de la motxilla

cota inferior: 7$

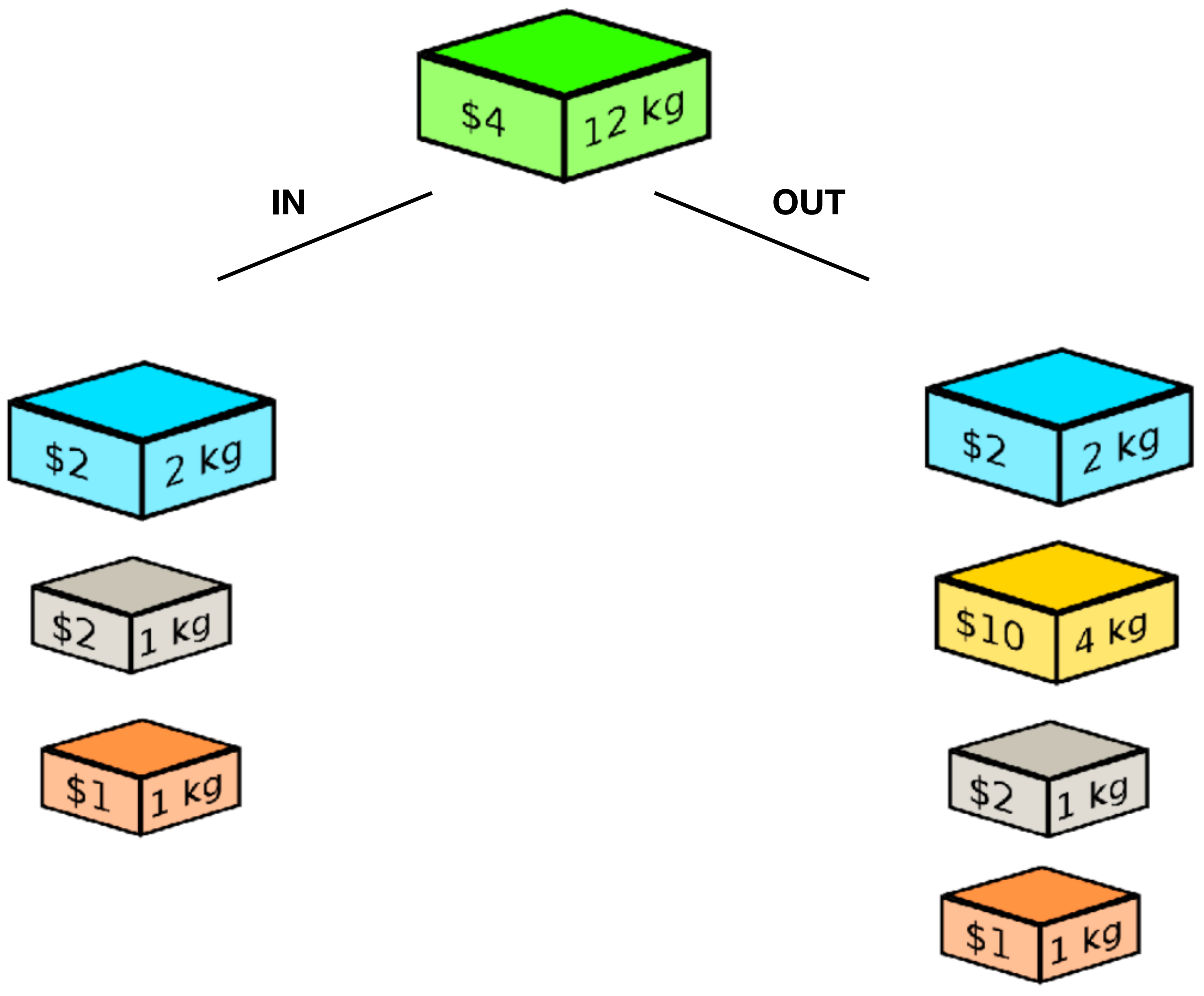
- Considerem un primer objecte, en aquest cas l'objecte verd amb valor de $4 i pes de 12kg.

- Calculem la cota superior i inferior de les dues opcions (agafar i no agafar l'objecte) i en cas que la seva cota superior sigui millor que el millor resultat obtingut fins aleshores afegim el fill a la llista de nodes a explorar.

- **Si NO agafem l'objecte verd:**

  - **Cota superior**: el valor de la resta d'objectes que **individualment** càpiguen dins la motxilla (2+10+2+1). Cota Superior: 15$
  - **Cota inferior**: el valor dels objectes següents fins arribar a la capacitat màxima. Cota Inferior: 2 + 10 +2 +1 = 15$

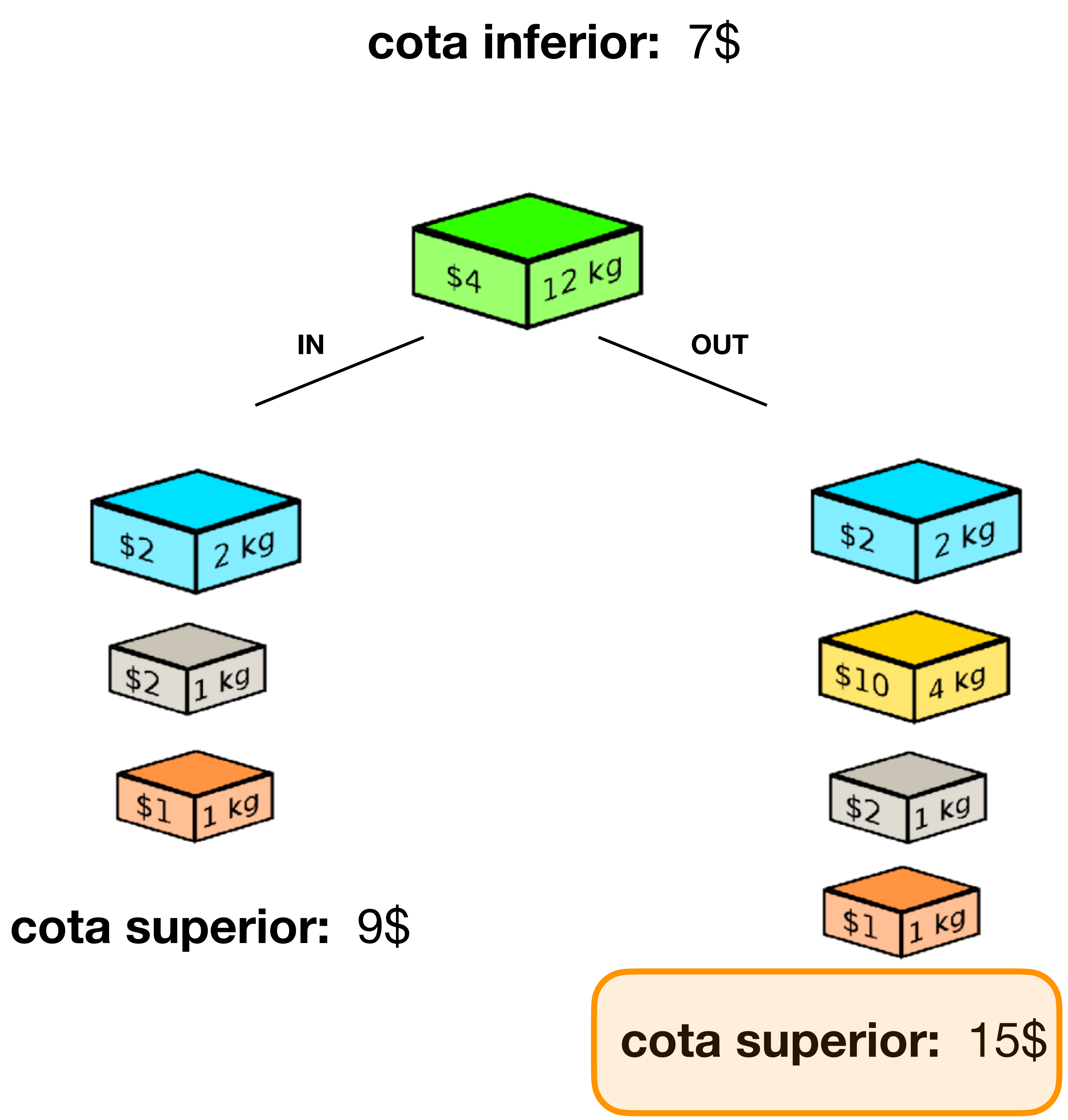
  - –> La cota superior és més gran que la cota inferior actual-> afegim l'opció com a opció a explorar
  - -> Actualitzem la cota inferior.



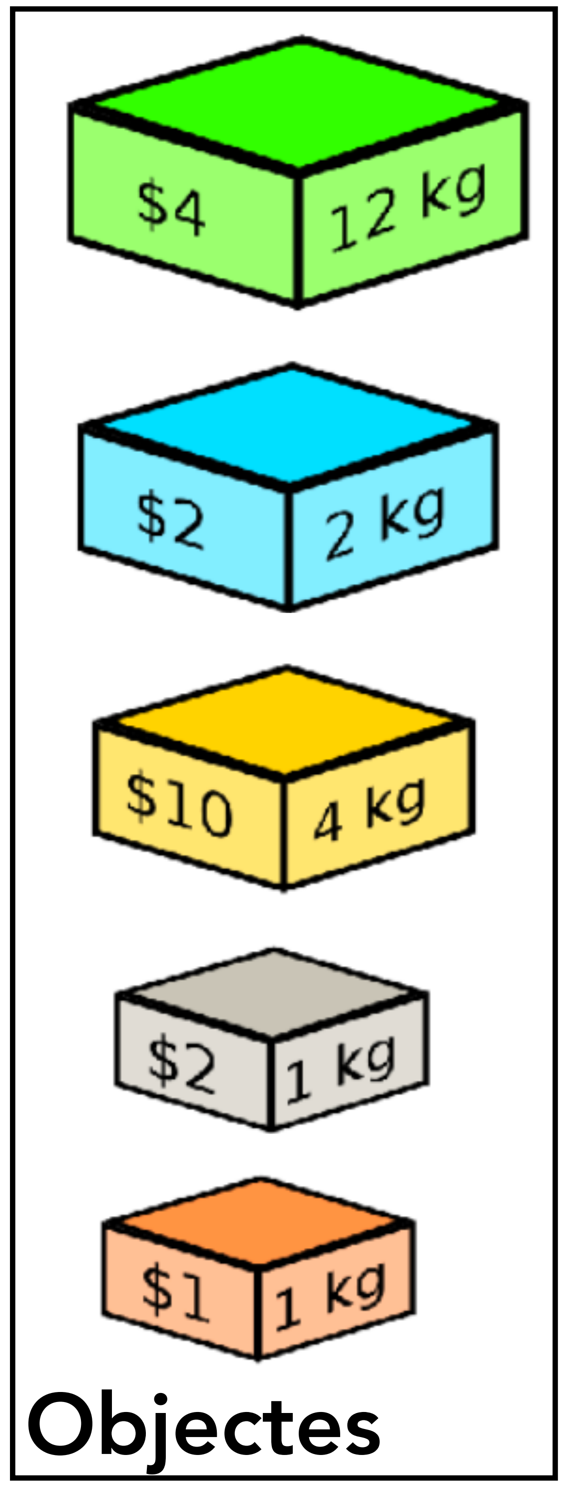
Ramificació i poda

Problema de la motxilla

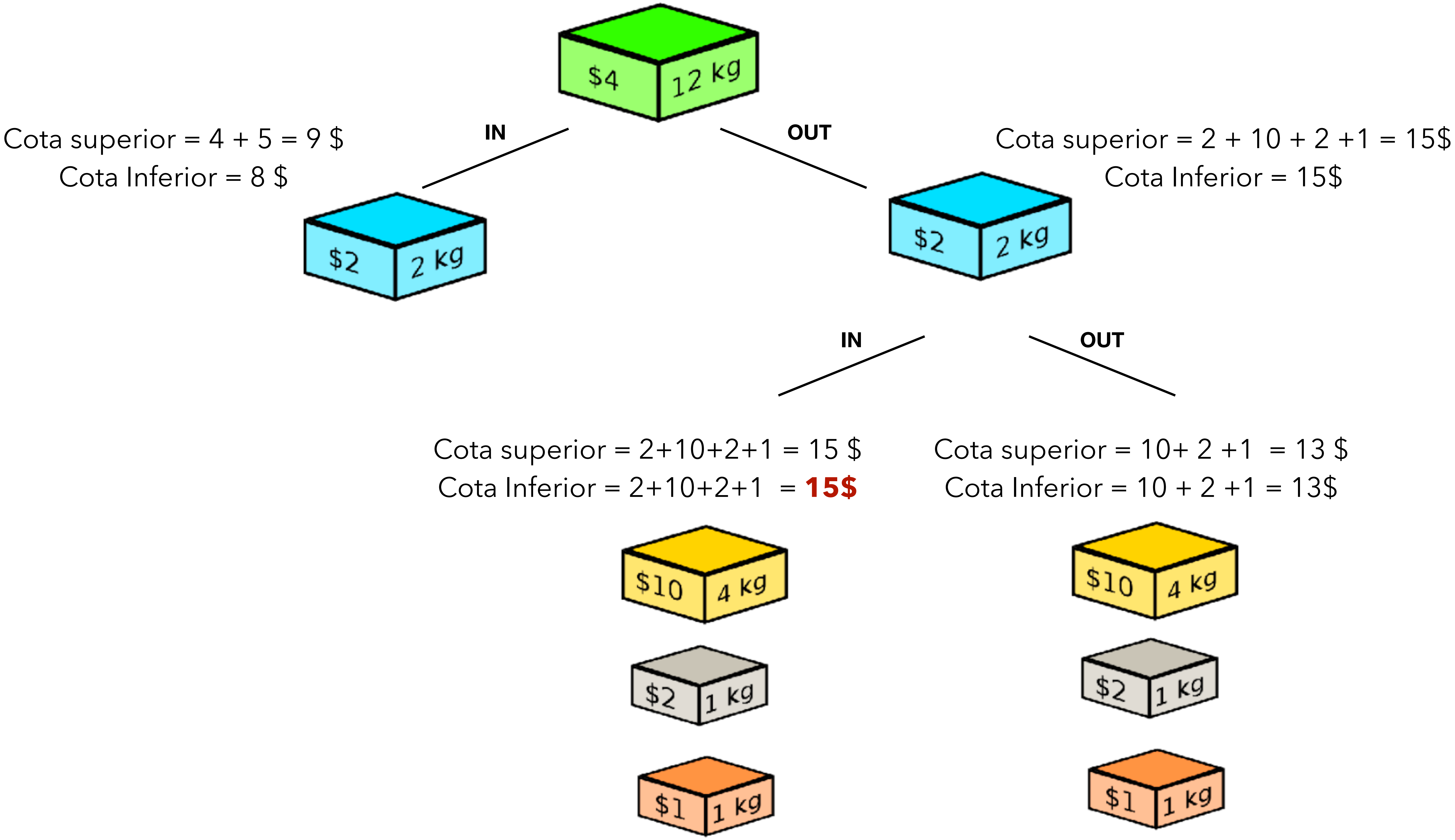
- Tercer pas: Decidim el següent node a explorar tenint en compte la cota inferior i/o la cota superior de tots els nodes actius. En el nostre cas tenim 2 nodes actius. Explorem el node corresponent a no agafar l'objecte verd, ja que aquest node té una cota superior més gran.



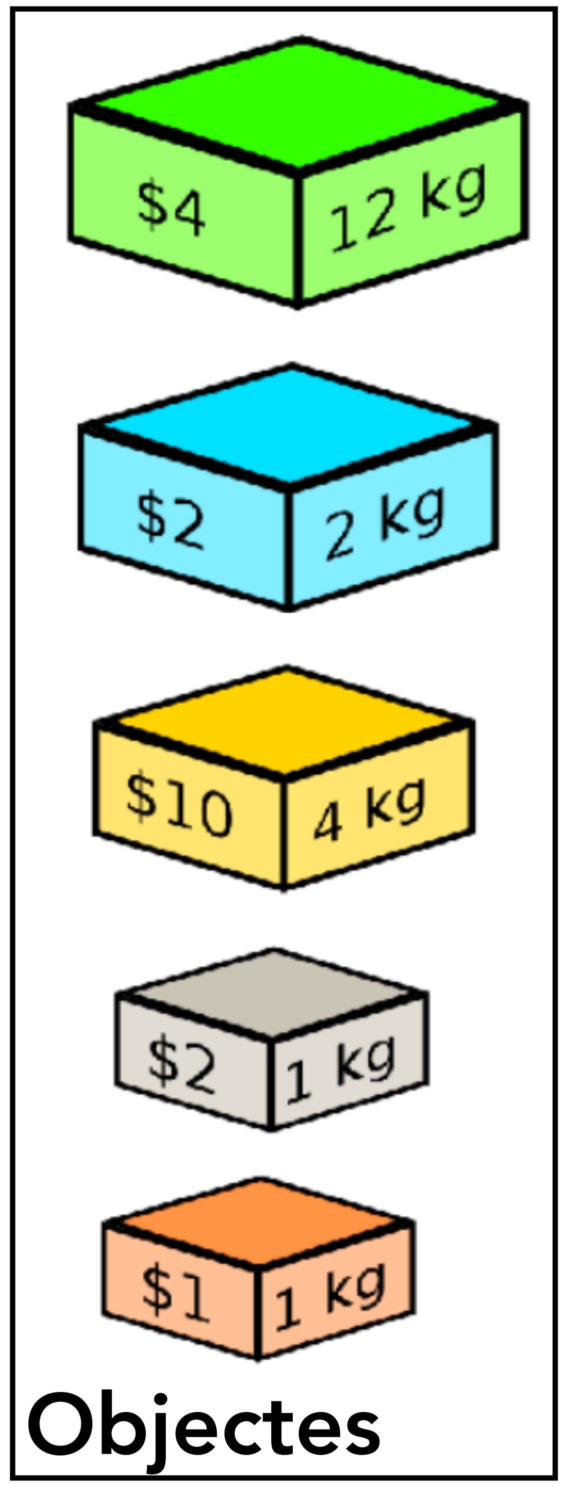
Problema de la motxilla



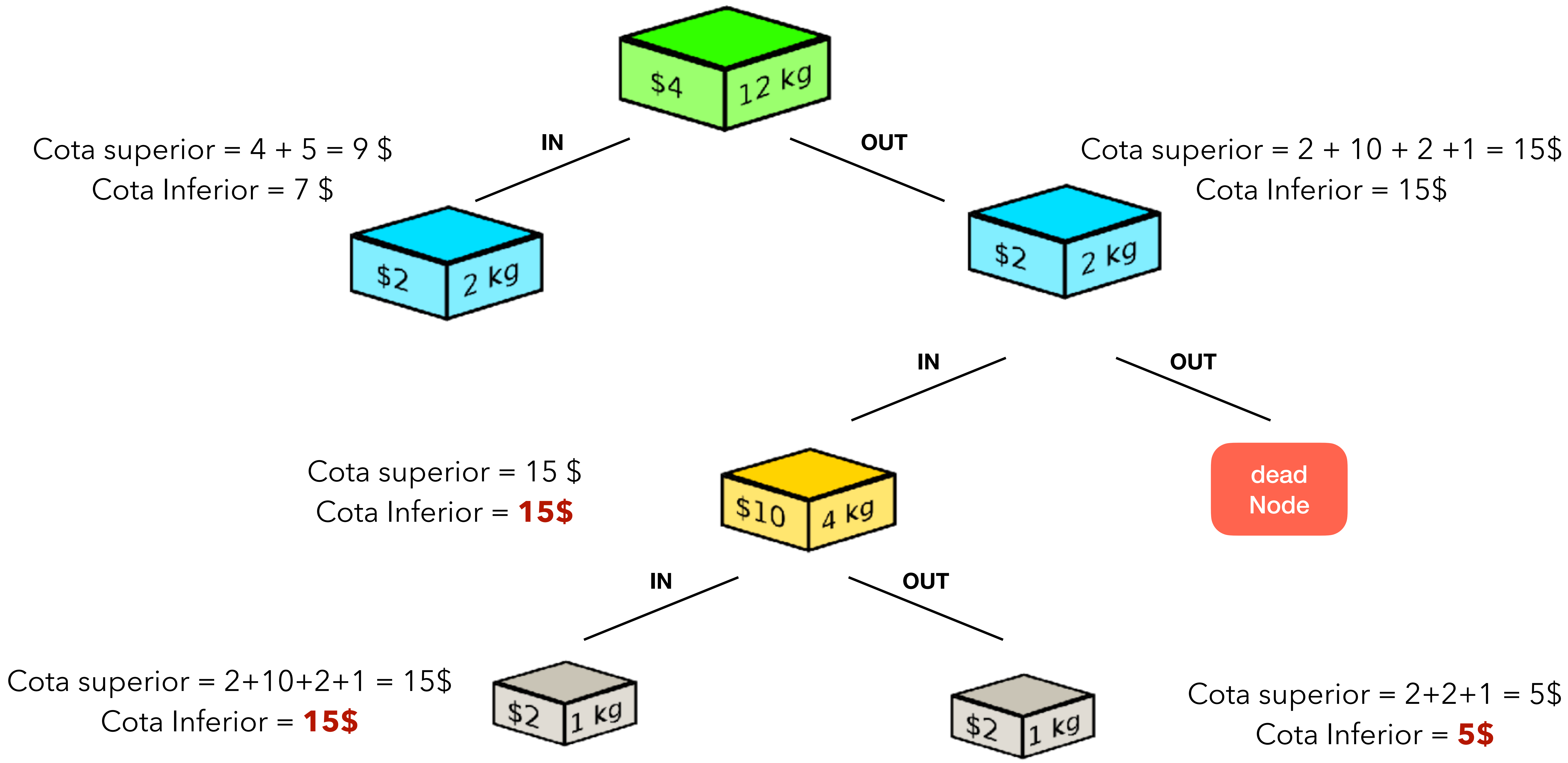
Definim cota inferior: 8$



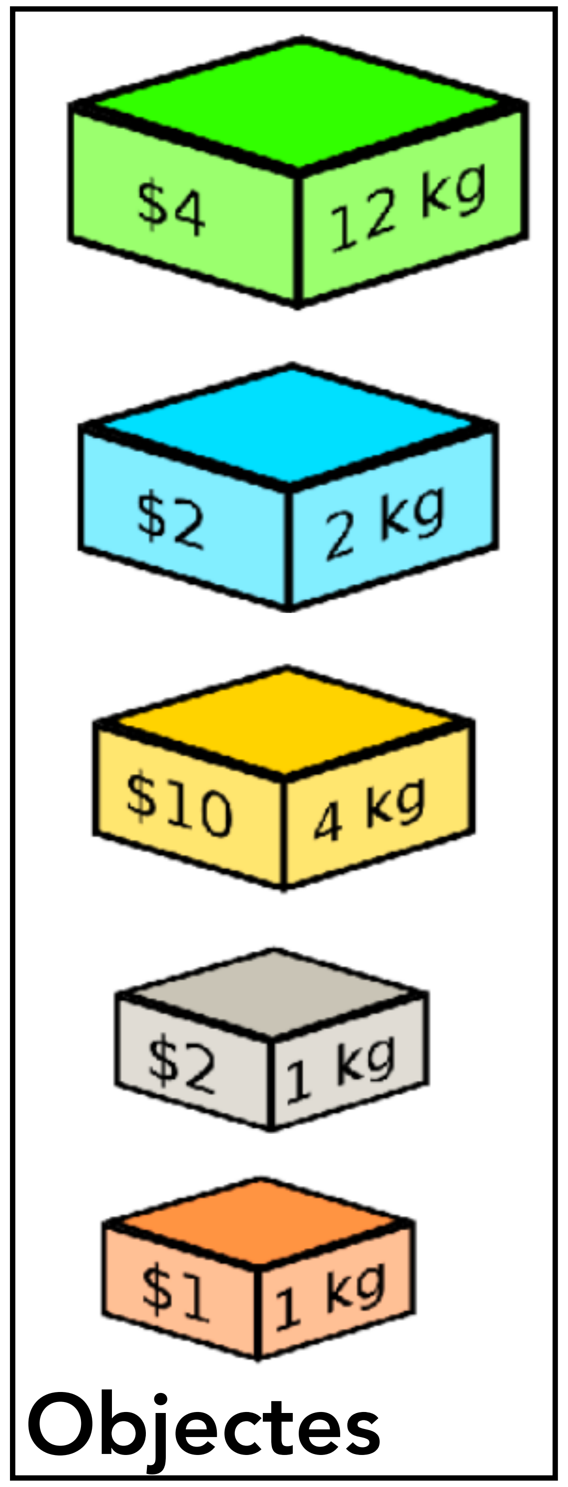
Problema de la motxilla



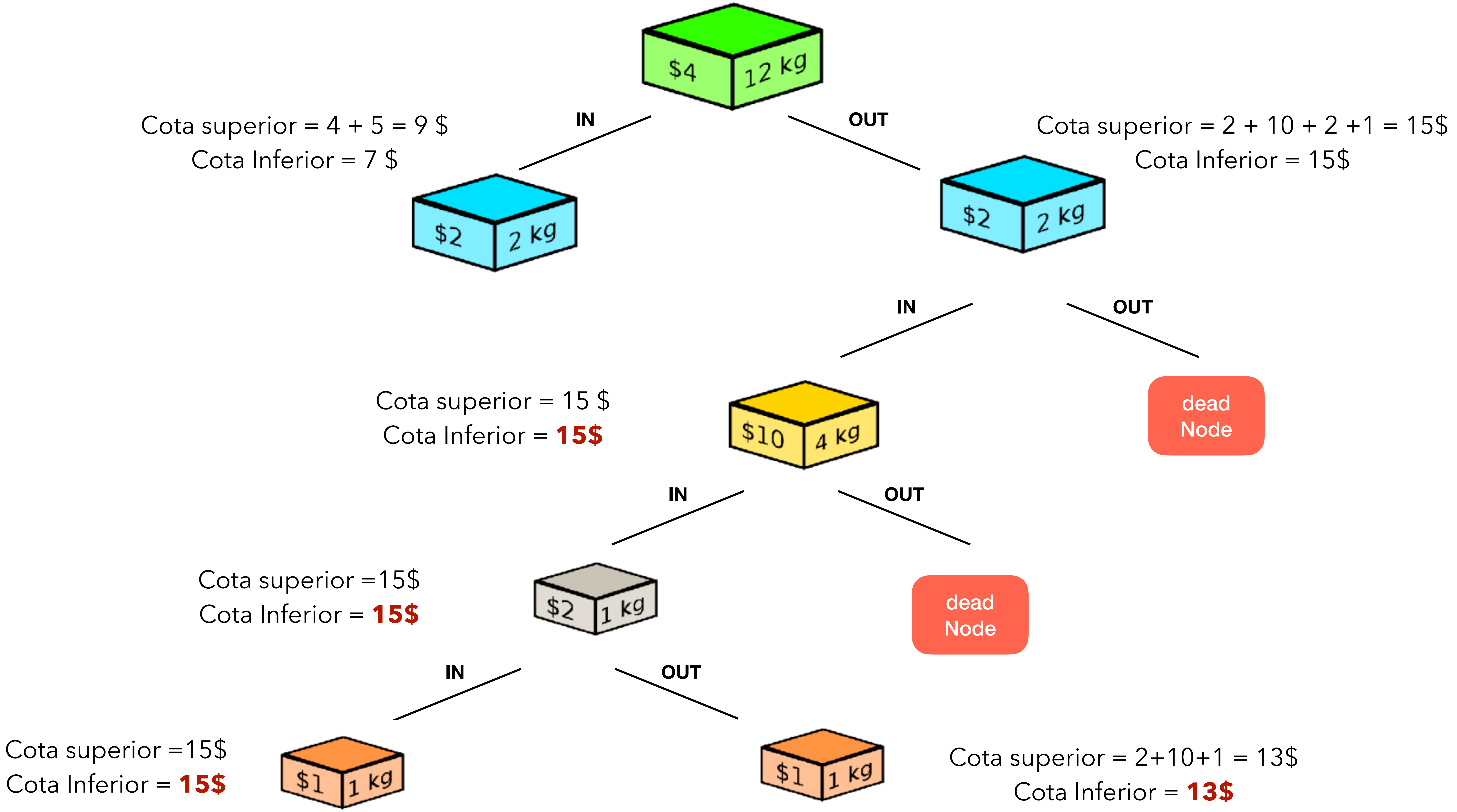
Definim cota inferior: 15$



Problema de la motxilla



Definim cota inferior: 15$

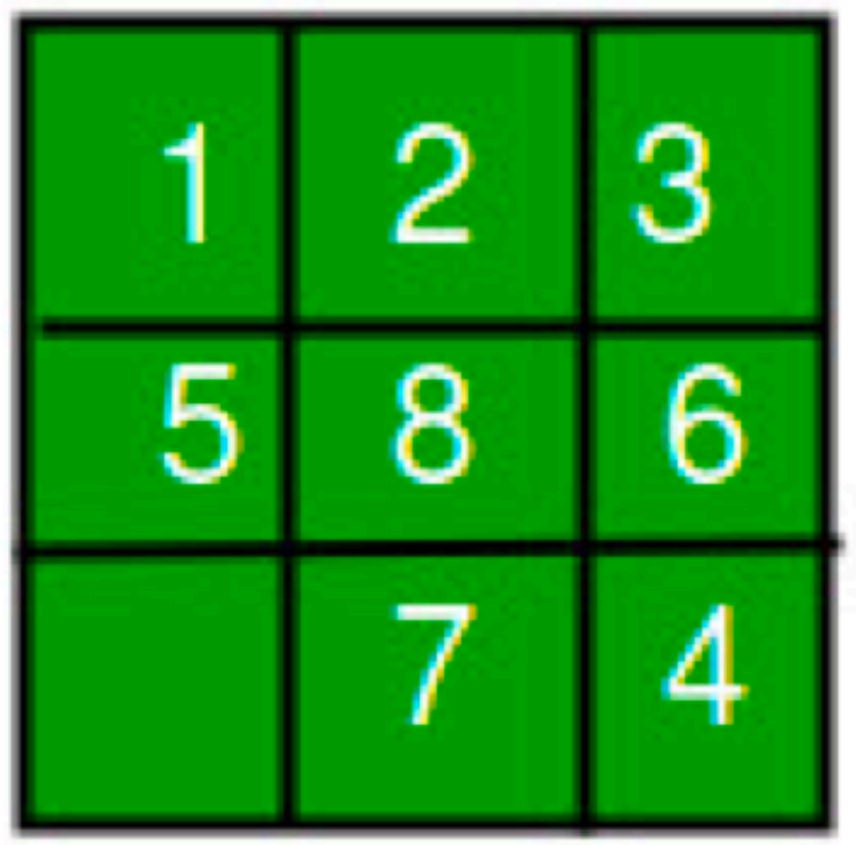


Ramificació i poda

Puzzle 8

- Donat un taulell de 3x3 amb 8 números i un espai buit. L'objectiu és col·locar els números a les cel·les perquè coincideixin amb la configuració final. Podem lliscar les cel·les adjacents (dreta, esquerra, amunt i avall) a l'espai buit. Exemple:

Configuració Inicial



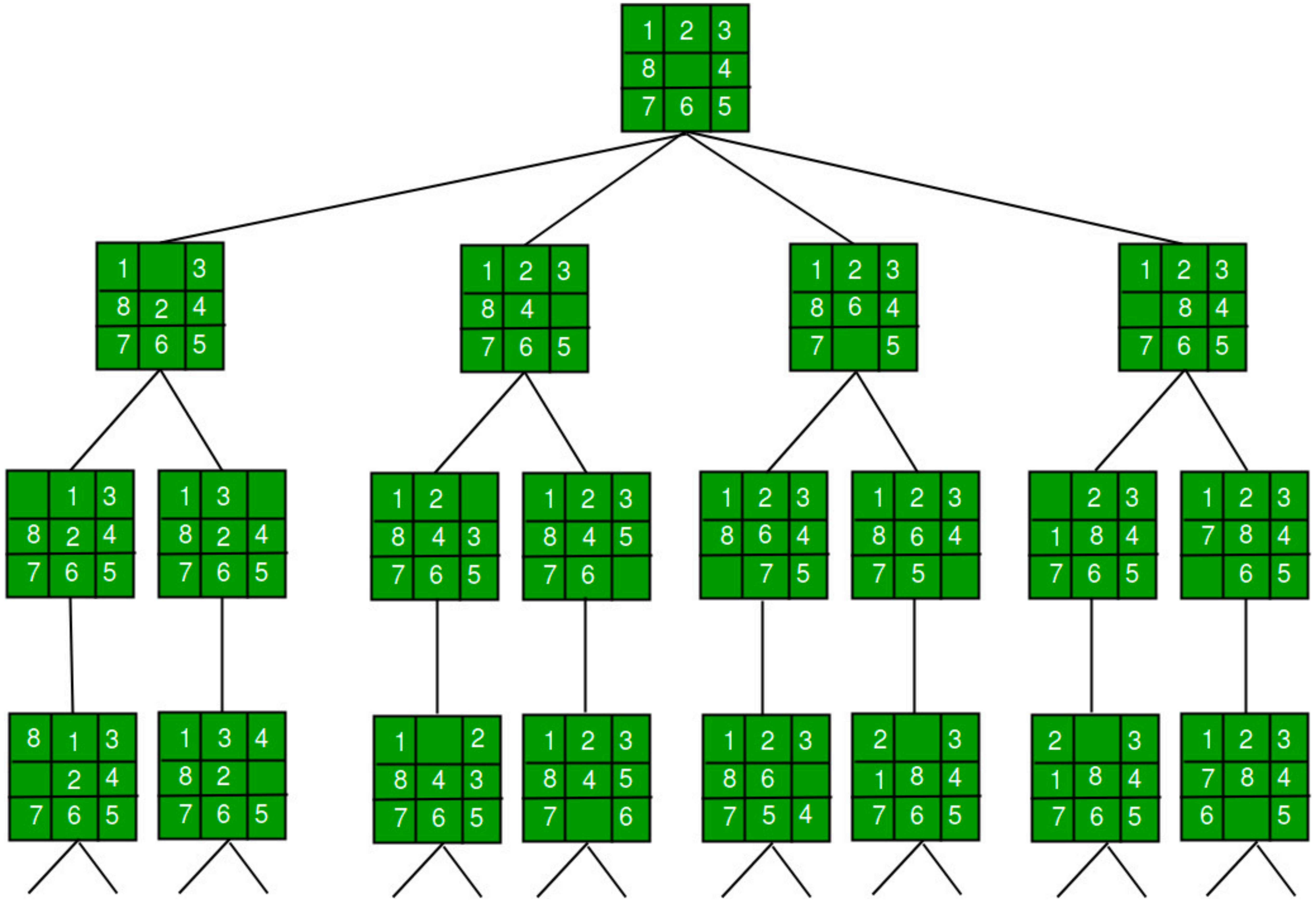
Configuració Final

Ramificació i poda

Puzzle 8: **Solució per força bruta**

- Podem fer una cerca utilitzant el mètode DFS (Mirem de totes les configuracions d'un problema determinat, és a dir, tots els estats als quals es pot accedir des de l'estat inicial).

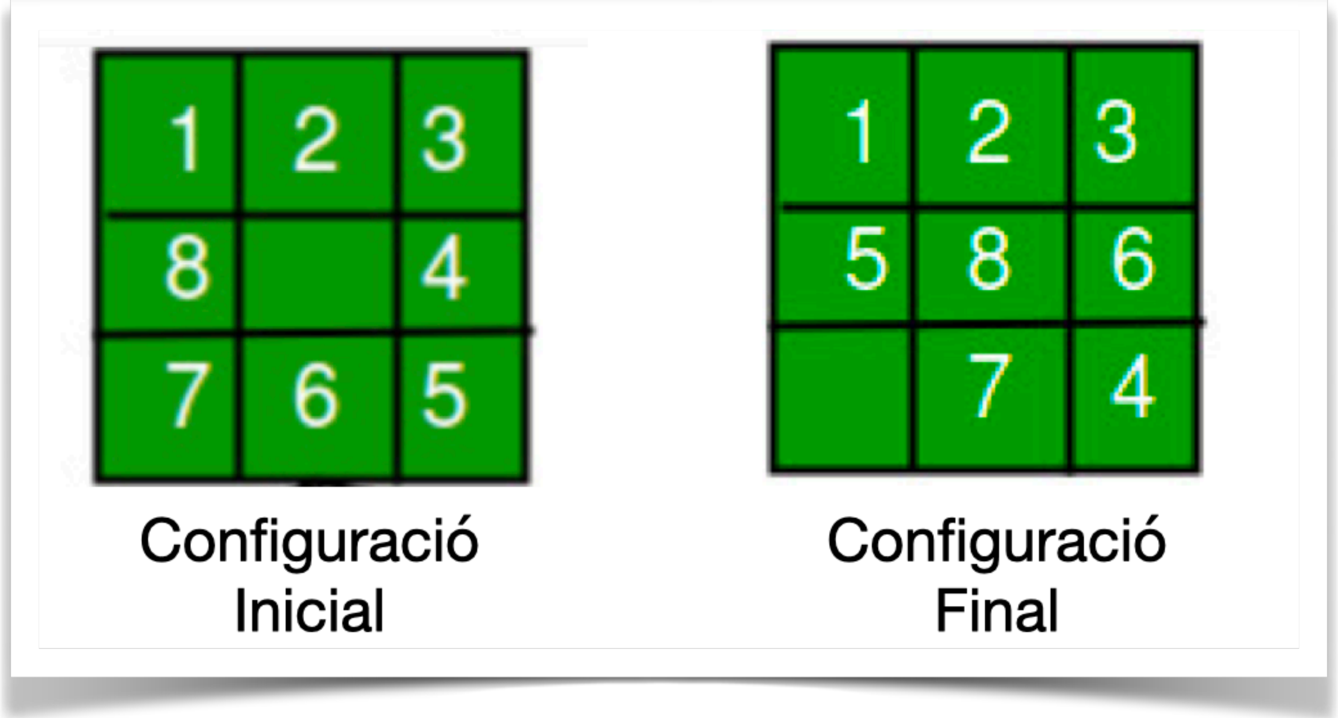
- Aquesta solució té un problema donat que els moviments successius ens poden allunyar de l'objectiu en lloc d'apropar-nos. Pot ser que no es trobi mai una solució amb aquest enfocament.

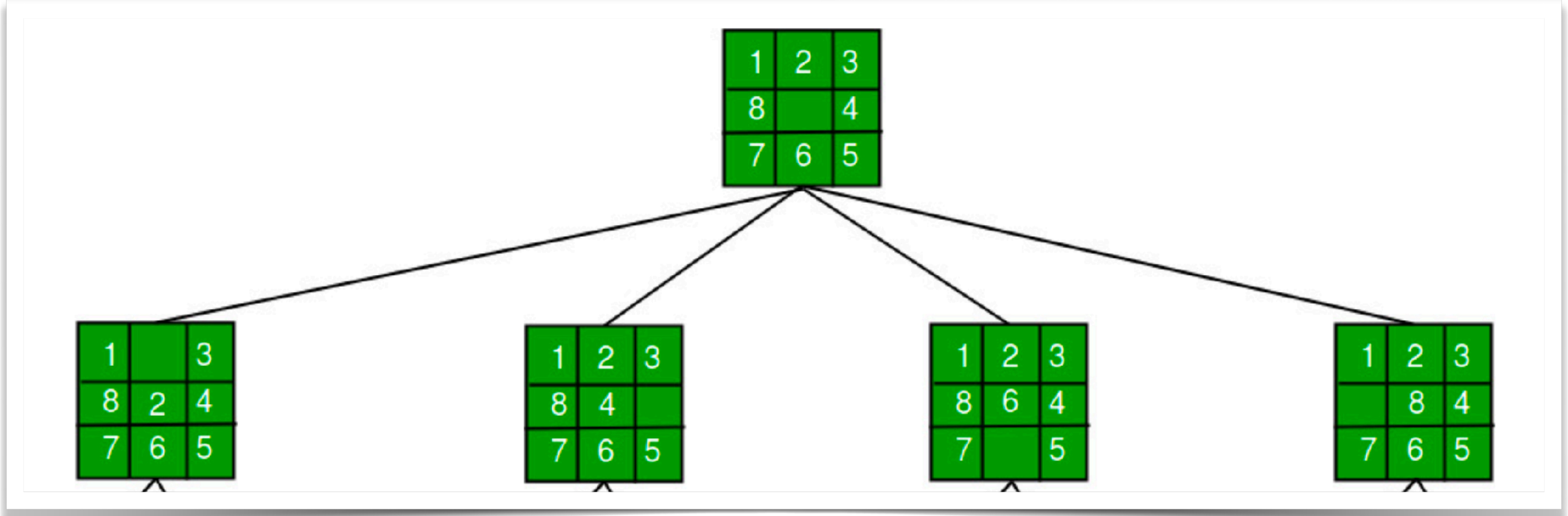


Ramificació i poda

Puzzle 8 - Solució amb ramificació i poda

Associem a cada node de l'arbre un cost. El cost ens permetrà determinar quin és el següent **E-Node.**
El següent **E-Node** serà aquell amb un **cost menor**. Com podem definir el cost de cada node?





Solució amb ramificació i poda

La funció de cost per al problema anterior:
Assumim que moure una cel·la cap a qualsevol direcció té un cost de 1.

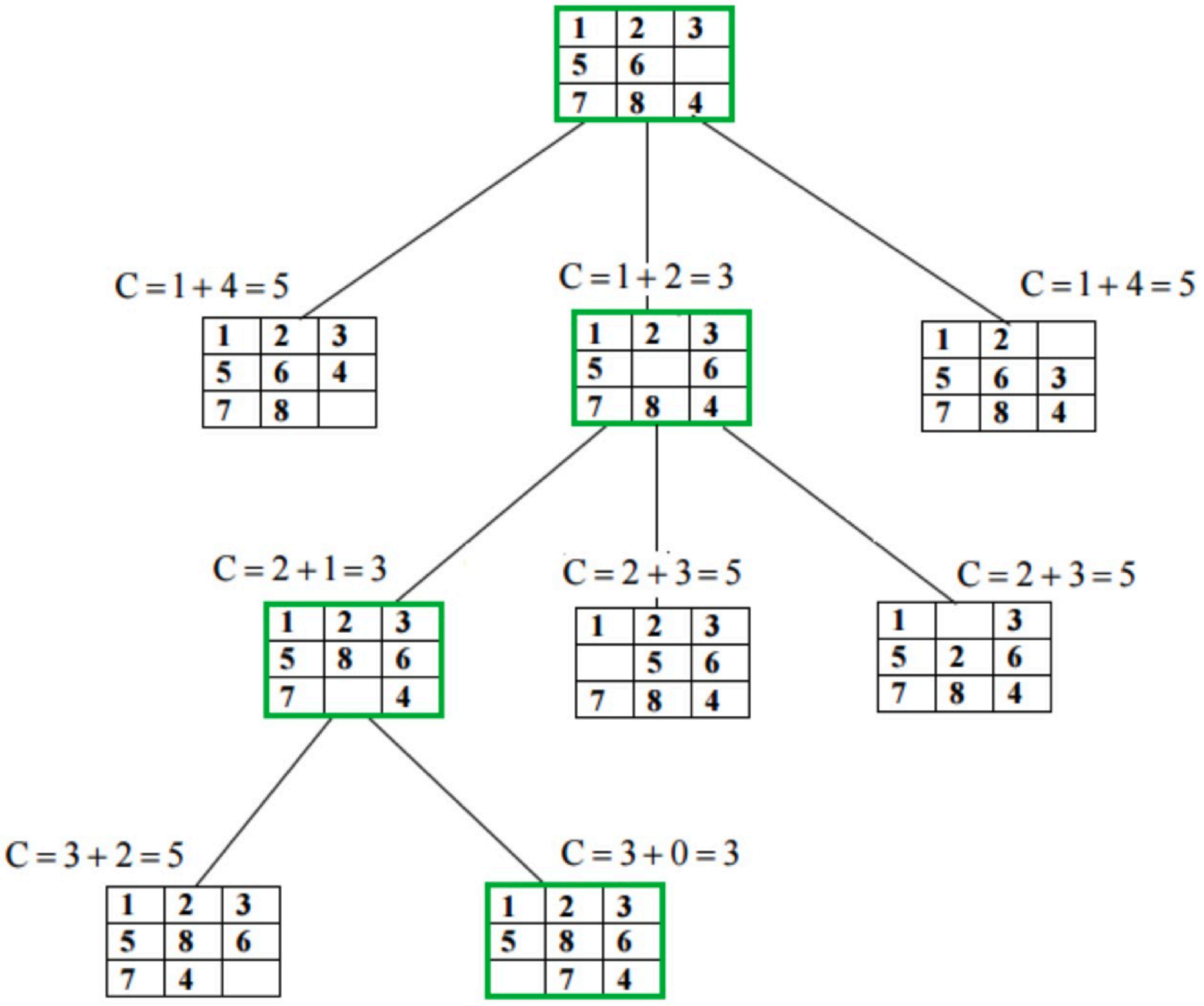
- $C(X) = g(X) + h(X)$ on:
    - $g(X)$ és el cost d'arribar al node X des de l'arrel. És a dir, el número de moviments realitzats fins aleshores.
    - $h(X)$ és el cost d'arribar a una solució des de el Node X. Podem estimar el número de moviments mínims que s'han de realitzar mirant el número de posicions on tinguem un número i aquest sigui diferent del número objectiu de la solució.

Configuració Inicial

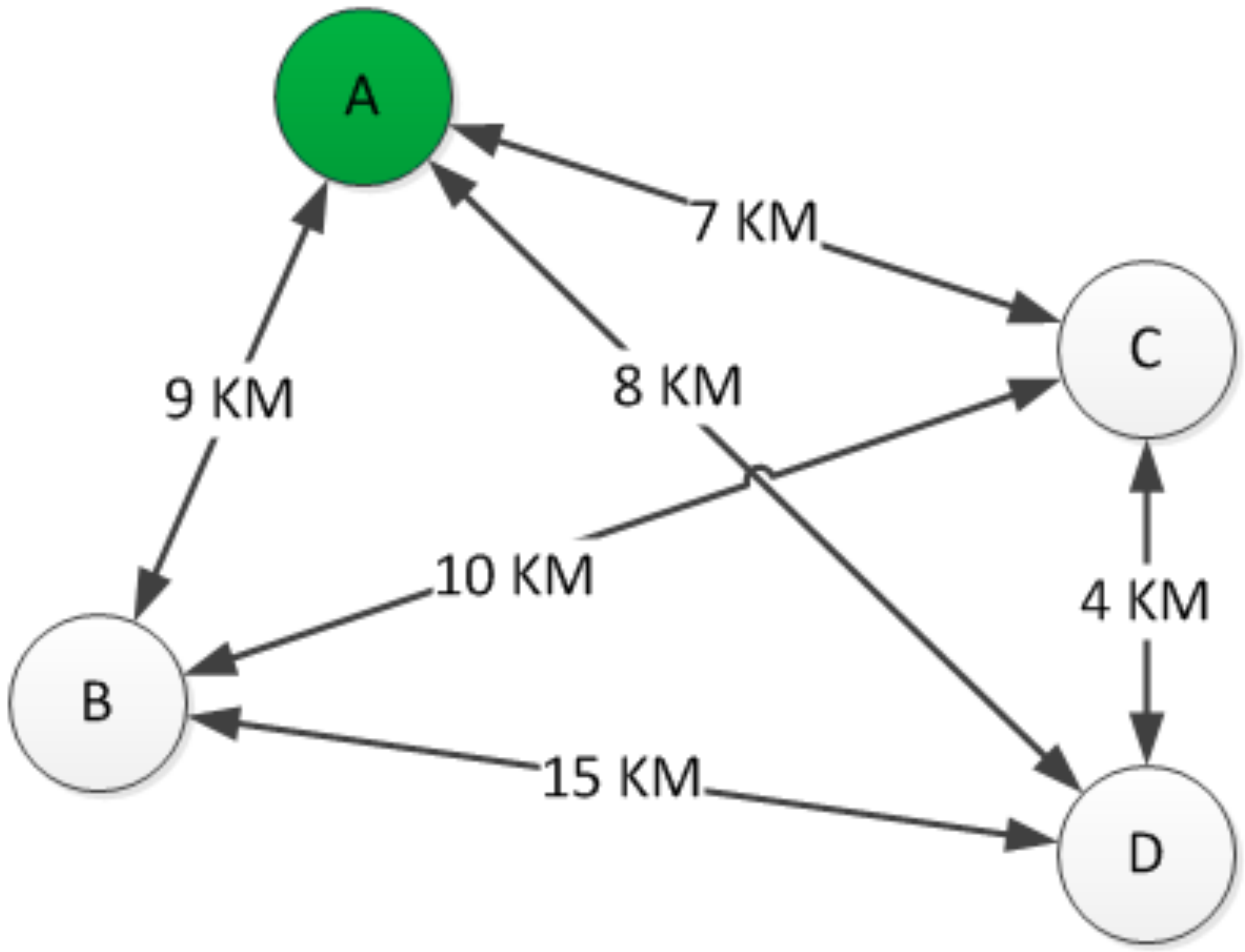
1	2	3
5	6	
7	8	4

Configuració Final

1	2	3
5	8	6
	7	4



Problema del viatjant de comerç



Problema del viatjant de comerç

- Problema: Trobar un recorregut de longitud mínima per a un viatger que hagi de visitar diverses ciutats i després tornar al punt d'inici, on la distancia existent entre cada parella de ciutats és coneguda.

- És a dir, donat un graf dirigit amb arestes amb cost positiu, es vol trobar un **circuit de longitud mínima** que **comenci i acabi** en el **mateix node passant** exactament un cop per a cada un dels **nodes restants.**

  - → Passar per tots els nodes **minimitzant** el cost de la ruta, passant només un cop per cada node i acabant en el node de sortida (circuit ***hamiltonià***)

Solució amb

ramificació i poda?

Ramificació i poda

- La **clau**: funció de **prioritat i cota**
- Per tal de resoldre el problema del viatjant de comerç, mitjançant el mètode de ramificació i poda,haurem de construir un **arbre** on les **fulles** siguin **camins hamiltonians.**

Ramificació i poda

Travelling Salesman Problem

- Formalitzem el problema
  - Sigui $G = (V, A)$ un graf dirigit

    $V = \{1,2,..,n\}$

    $D[i, j]$ el cost de l'aresta entre el node i i j on$(i, j) \in A$

    $D[i, j] = \inf$ si $(i, j) \notin A$
  - Comencem en nostre circuit en el node i
  - Els candidats seran: $E = \{1,X,1 \mid X$ es una permutació de (2,3,...,n)$\}$
    - **Solucions factibles:**
      - $E = \{1,X,1 \mid X = x_1, x_2, \ldots, x_{n-1},$ **es una permutació de (2,3,...n) tal que**$(i_j, i_{j+1}) \in A, 0 < j < n, (1,x_1) \in A, (x_{n-1,1}) \in A\}$

  - **Funció objectiu:**
    - $F(X) = D[1,x_1] + D[x_1, x_2] + D[x_2, x_3] + \ldots + D[x_{n-2}, x_{n-1}] + D[x_{n-1},1]$

Ramificació i poda

- Definició d'una **cota** (X,k) molt senzilla:
  - Suma de les arestes ja escollides

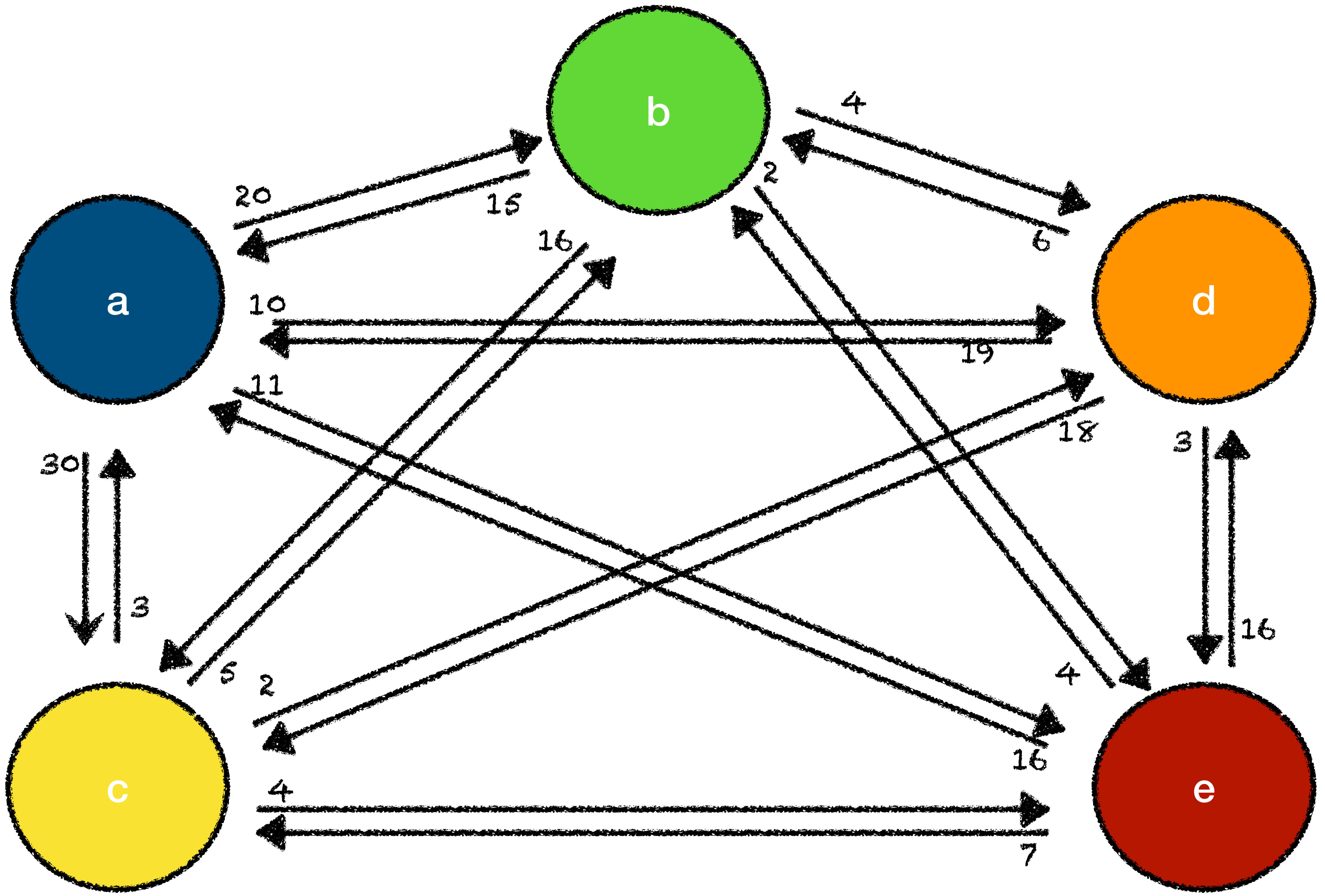
$$cota(X,k) = D[1,X_1] + \sum_{i=1,\ldots,k-2} D[X_i, X_{i+1}] + D[X_{k-1},1]$$

  - Exemple: (n=5)

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

Ramificació i poda

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$



Ramificació i poda

- **Cota senzilla**: Suma de les arestes ja escollides

$$cota(X,k) = D[1,X_1] + \sum_{i=1,\ldots,k-2} D[X_i, X_{i+1}] + D[X_{k-1},1]$$

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

Cota superior: un camí qualsevol

Suposem el camí: 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 1

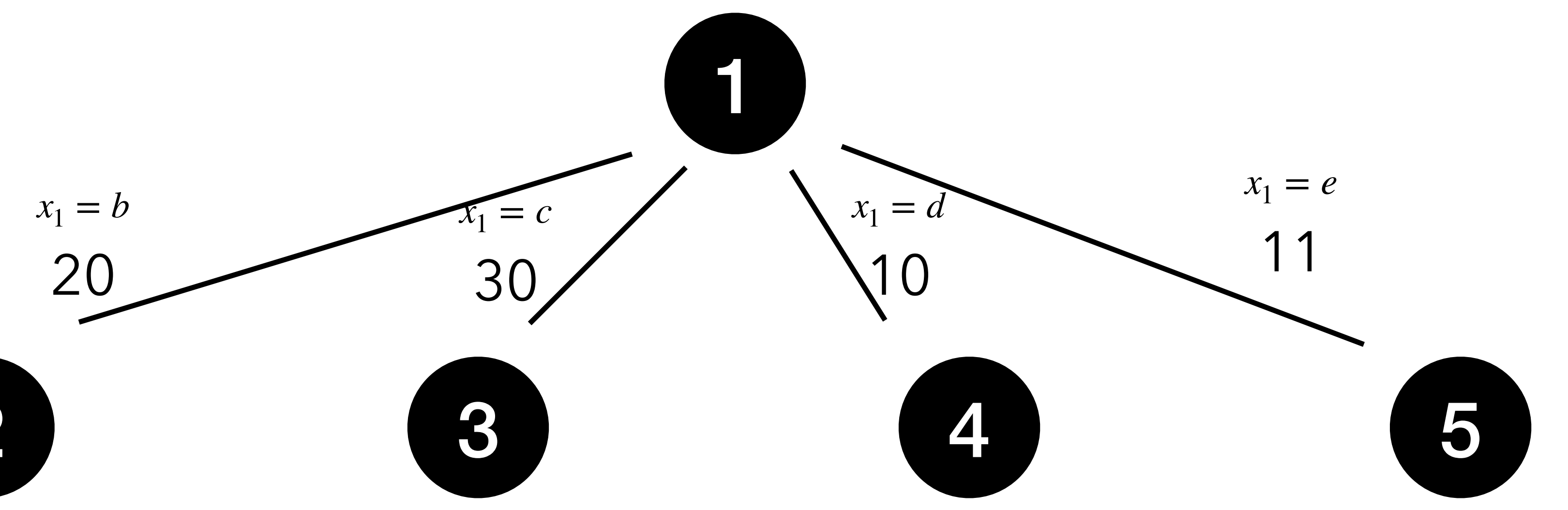
Cota superior = 20 +16 + 2 + 3 + 16 = 57

$$\begin{bmatrix} \infty & \boxed{20} & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & \boxed{16} & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & \boxed{2} & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & \boxed{3} \\ \boxed{16} & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

Ramificació i poda

Travelling Salesman Problem

Cota superior = 20 +16 + 2 + 3 + 16 = 57



Cota superior:

20 + 16 + 2 + 3 +16 = **57**

30 + 4 + 4 + 19 + 4 = **54**

10 + 2 + 3 + 6 + 7 = **28**

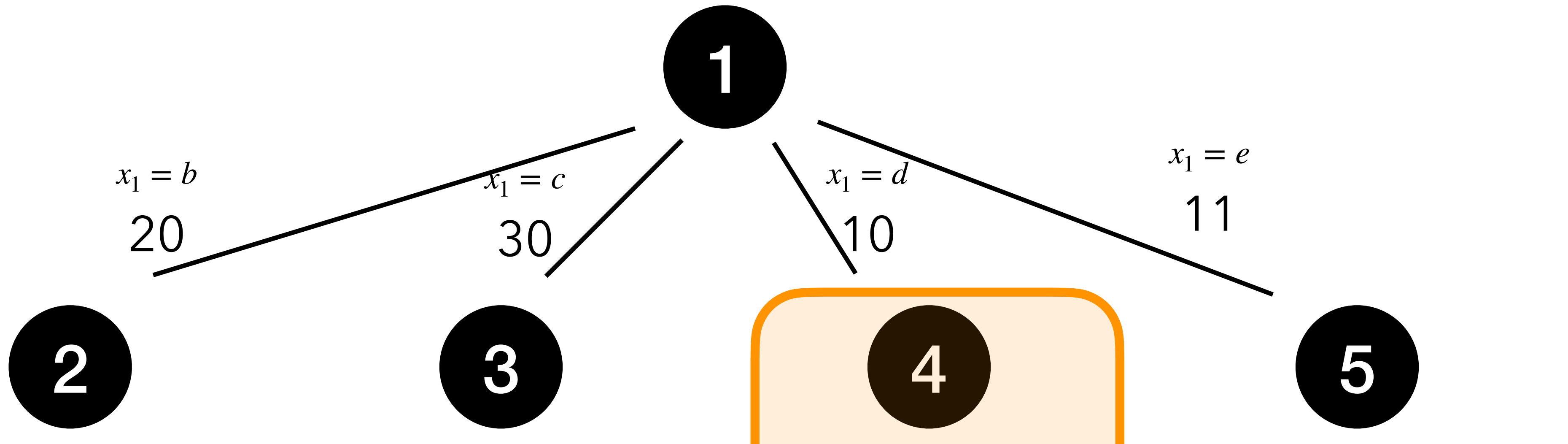
11 + 15 + 5 + 18 +16 = **65**

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & \boxed{16} & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & \boxed{2} & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & \boxed{3} \\ \boxed{16} & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & \boxed{4} & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & \boxed{4} \\ \boxed{19} & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & \boxed{4} & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & \boxed{2} \\ \boxed{3} & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & \boxed{6} & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & \boxed{7} & 16 & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ \boxed{15} & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & \boxed{5} & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & \boxed{18} & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & \boxed{16} & \infty \end{bmatrix}$$

Ramificació i poda

Travelling Salesman Problem

Cota superior = 20 +16 + 2 + 3 + 16 = 57



Cota superior:

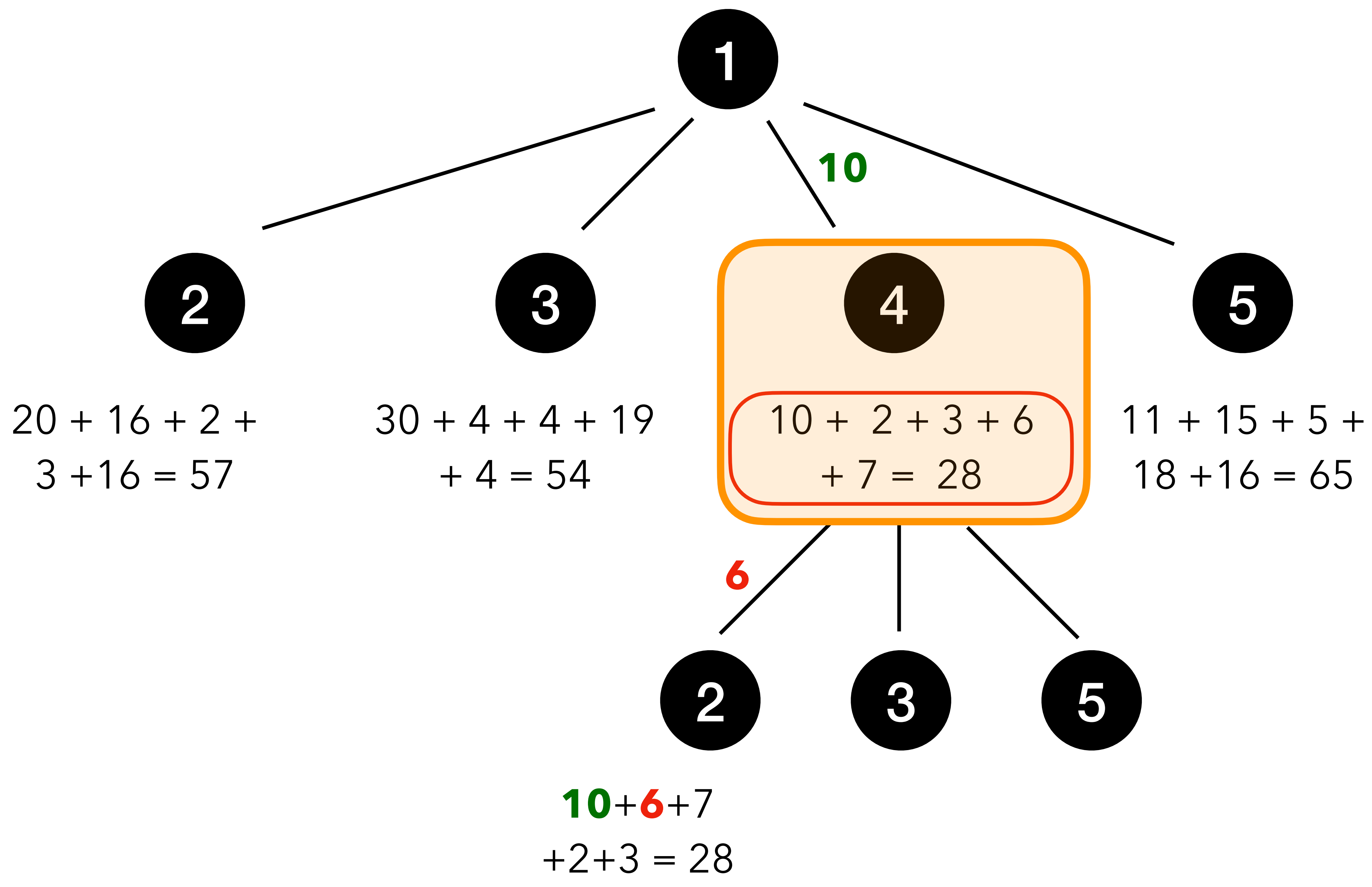
- Node 2: **20** + 16 + 2 + 3 +16 = **57**
- Node 3: **30** + 4 + 4 + 19 + 4 = **54**
- Node 4: **10** + 2 + 3 + 6 + 7 = **28**
- Node 5: **11** + 15 + 5 + 18 +16 = **65**

$$\begin{bmatrix} \infty & \boxed{20} & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & \boxed{16} & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & \boxed{2} & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & \boxed{3} \\ \boxed{16} & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & 20 & \boxed{30} & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & \boxed{4} & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & \boxed{4} \\ \boxed{19} & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & \boxed{4} & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & \boxed{10} & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & \boxed{2} \\ \boxed{3} & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & \boxed{6} & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & \boxed{7} & 16 & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & \boxed{11} \\ \boxed{15} & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & \boxed{5} & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & \boxed{18} & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & \boxed{16} & \infty \end{bmatrix}$$

Ramificació i poda

Travelling Salesman Problem

Cota superior = 20 +16 + 2 + 3 + 16 = 57

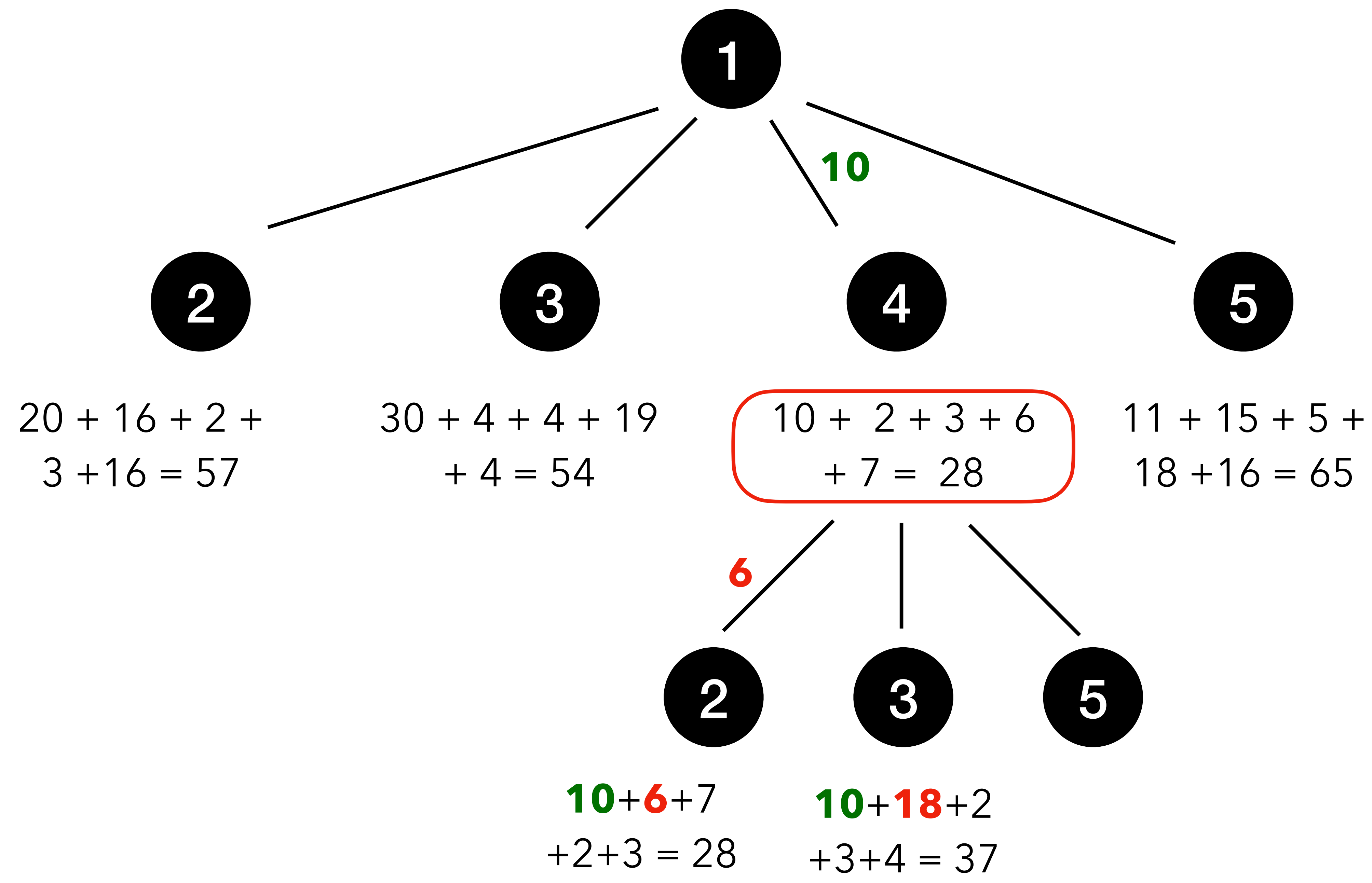


∞	∞	∞	10	∞
15	∞	16	4	2
3	∞	∞	2	4
∞	6	∞	∞	∞
16	∞	7	16	∞

Ramificació i poda

Travelling Salesman Problem

Cota superior = 20 +16 + 2 + 3 + 16 = 57

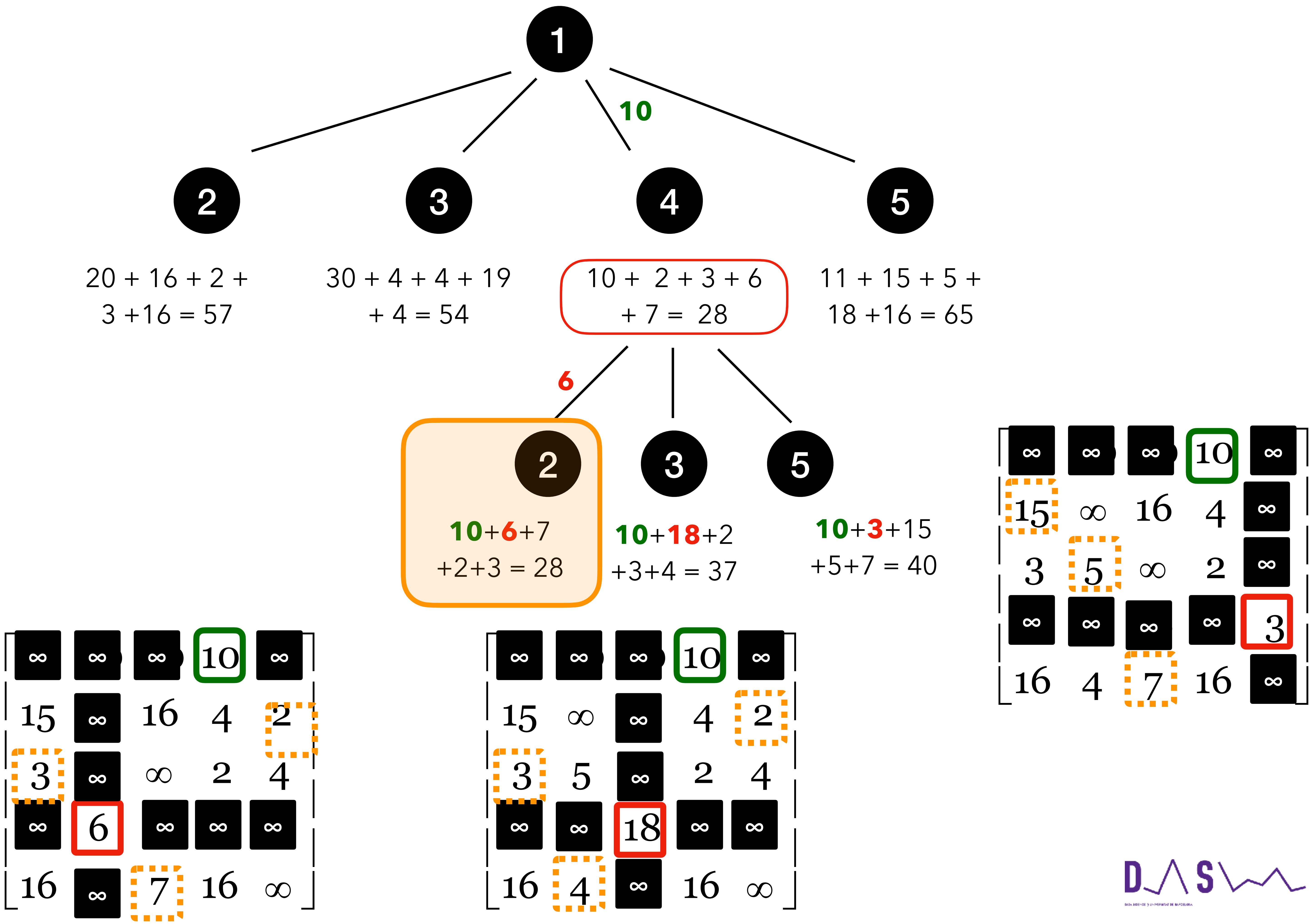


$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \boxed{10} & \infty \\ 15 & \infty & 16 & 4 & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \infty & \infty & 2 & 4 \\ \infty & \boxed{6} & \infty & \infty & \infty \\ 16 & \infty & \boxed{7} & 16 & \infty \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \boxed{10} & \infty \\ 15 & \infty & \infty & 4 & \boxed{2} \\ \boxed{3} & 5 & \infty & 2 & 4 \\ \infty & \infty & \boxed{18} & \infty & \infty \\ 16 & \boxed{4} & \infty & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

Ramificació i poda

Travelling Salesman Problem

Cota superior = 20 +16 + 2 + 3 + 16 = 57



Ramificació i poda

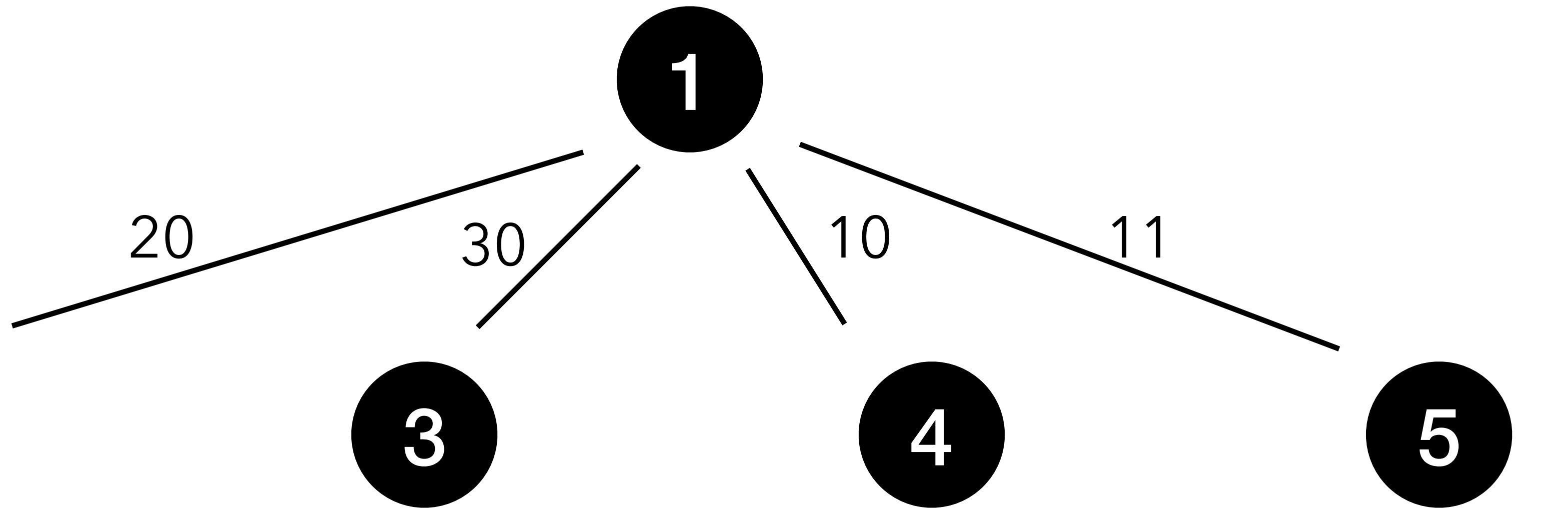
Però que ens diu la cota superior???

Podem millorar aquesta solució utilitzant la **cota inferior** enlloc de la cota superior.

Ramificació i poda

Travelling Salesman Problem

Cota superior = 20 +16 + 2 + 3 + 16 = 57



Cota inferior:

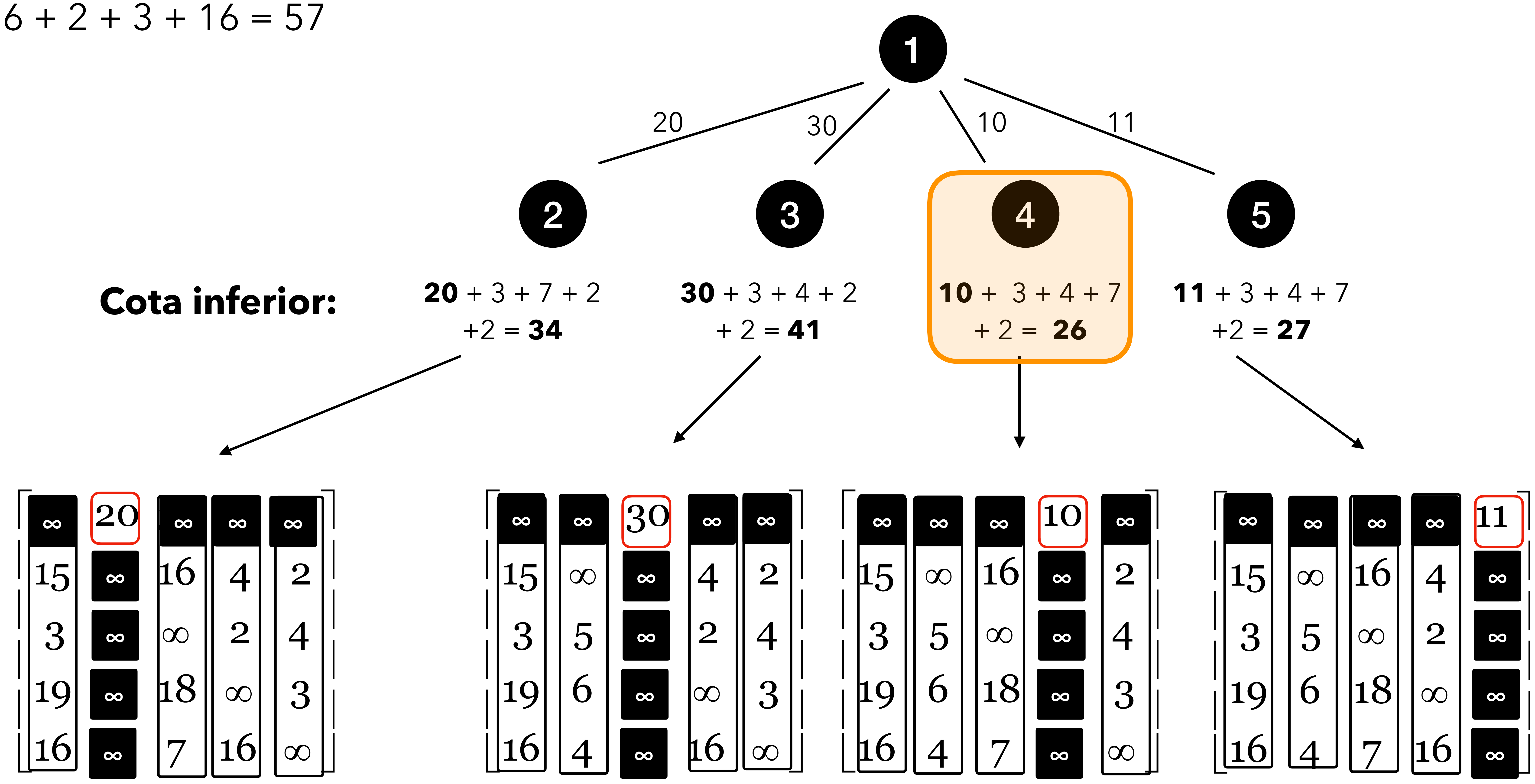
- Node 2: **20** + 3 + 7 + 2 +2 = **34**
- Node 3: **30** + 3 + 4 + 2 + 2 = **41**
- Node 4: **10** + 3 + 4 + 7 + 2 = **26**
- Node 5: **11** + 3 + 4 + 7 +2 = **27**

$$\begin{bmatrix} \infty & \boxed{20} & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & 20 & \boxed{30} & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & \boxed{10} & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & \boxed{11} \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

Ramificació i poda

Travelling Salesman Problem

Cota superior = 20 +16 + 2 + 3 + 16 = 57

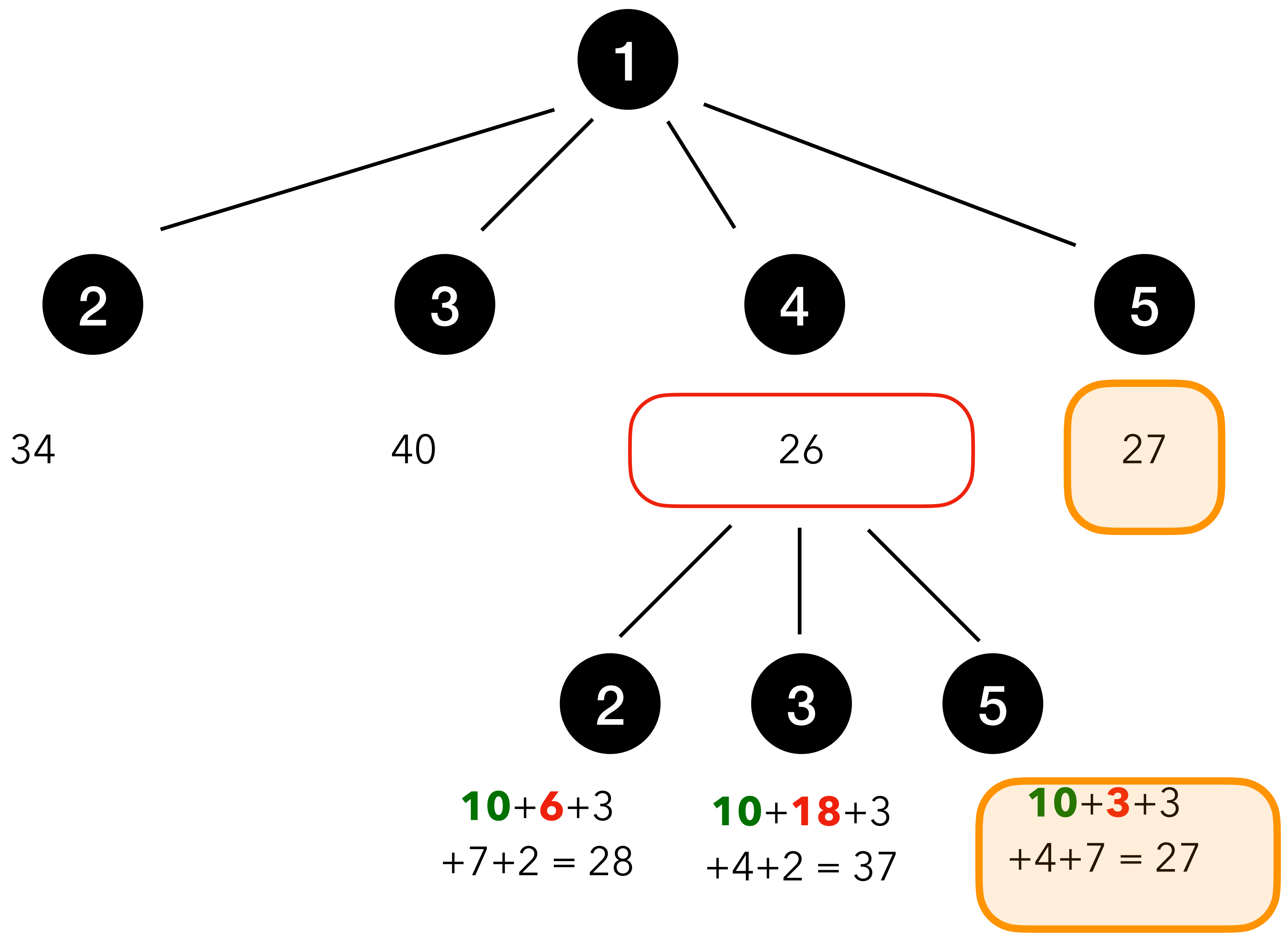


Ramificació i poda

Travelling Salesman Problem

Cota superior = 20 +16 + 2 + 3 + 16 = 57

Cota inferior:



$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \boxed{10} & \infty \\ 15 & \infty & 16 & \infty & 2 \\ 3 & \infty & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \boxed{6} & \infty & \infty & \infty \\ 16 & \infty & 7 & \infty & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \boxed{10} & \infty \\ 15 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ 3 & 5 & \infty & \infty & 4 \\ \infty & \infty & \boxed{18} & \infty & \infty \\ 16 & 4 & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \boxed{10} & \infty \\ 15 & \infty & 16 & \infty & \infty \\ 3 & 5 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \boxed{3} \\ 16 & 4 & 7 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

El problema està en com calcular, de la millor manera,
les **cotes**

Una solució mitjançant la **Matriu Reduïda**

Ramificació i poda

- Si s'escull *t* com el mínim dels elements de la fila (columna) i-essima i es resta *t* de tots els elements de la fila (columna), la fila resultant (columna) es reduïda.
- La reducció de la matriu s'aconseguix fent la reducció per files i columnes de la matriu.
- La quantitat total ***L*** restada de files i columnes és una **cota inferior** de la longitud d'un circuit hamiltonià de longitud mínima.

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

Reducció de la matriu,
L = 25

matriu original | matriu reduïda

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 12 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 12 \\ 3 & 1 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

Quina és la matriu reduïda?
Quin cost té la reducció?

matriu original

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 12 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 12 \\ 3 & 1 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu reduïda

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & \infty & 10 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & \infty & 1 & 3 \\ 14 & 3 & 13 & \infty & 0 \\ 10 & 0 & 1 & 13 & \infty \end{bmatrix}$$

Quina és la matriu reduïda?
Quin cost té la reducció?

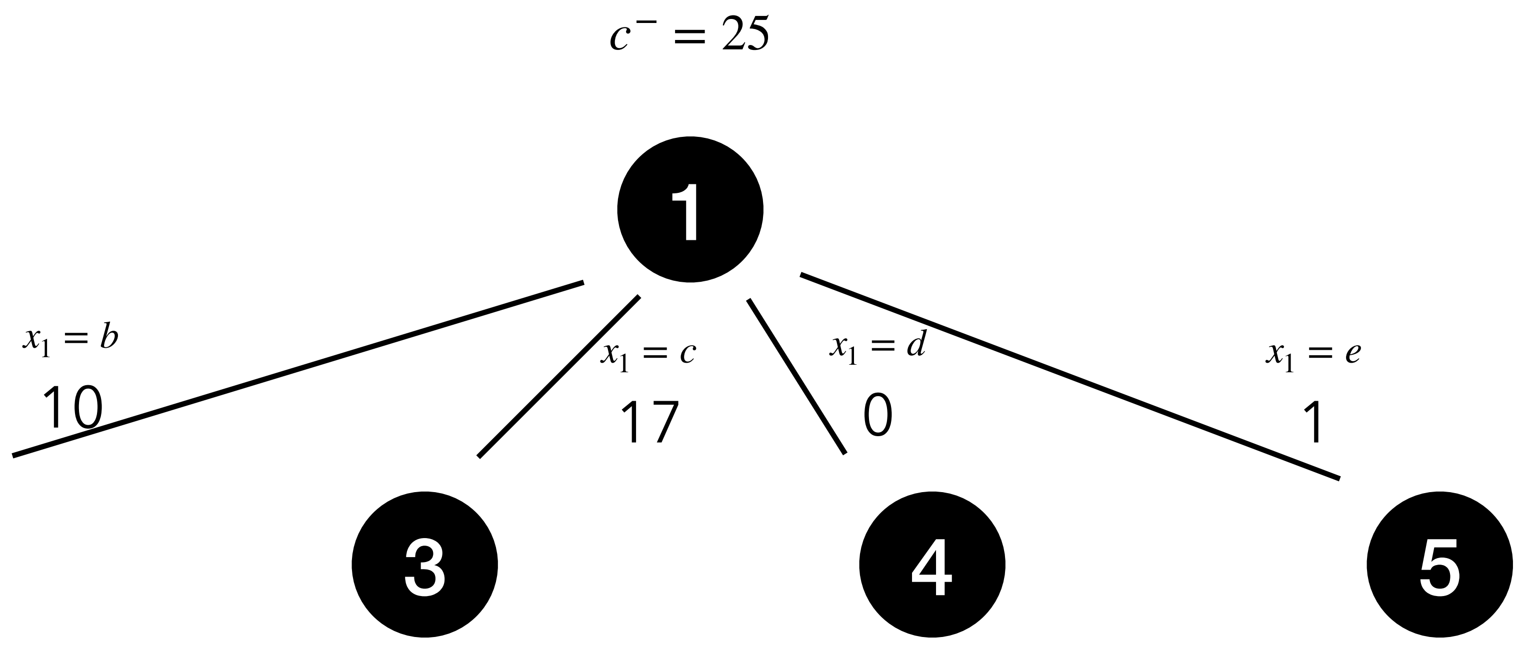
Ramificació i poda

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu original

$$\begin{bmatrix} \infty & \boxed{10} & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu reduïda (L=25)



$c^- = 25 + 10 = 35$

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & \infty & \infty & 0 & 2 \\ 15 & \infty & 12 & \infty & 0 \\ 11 & \infty & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

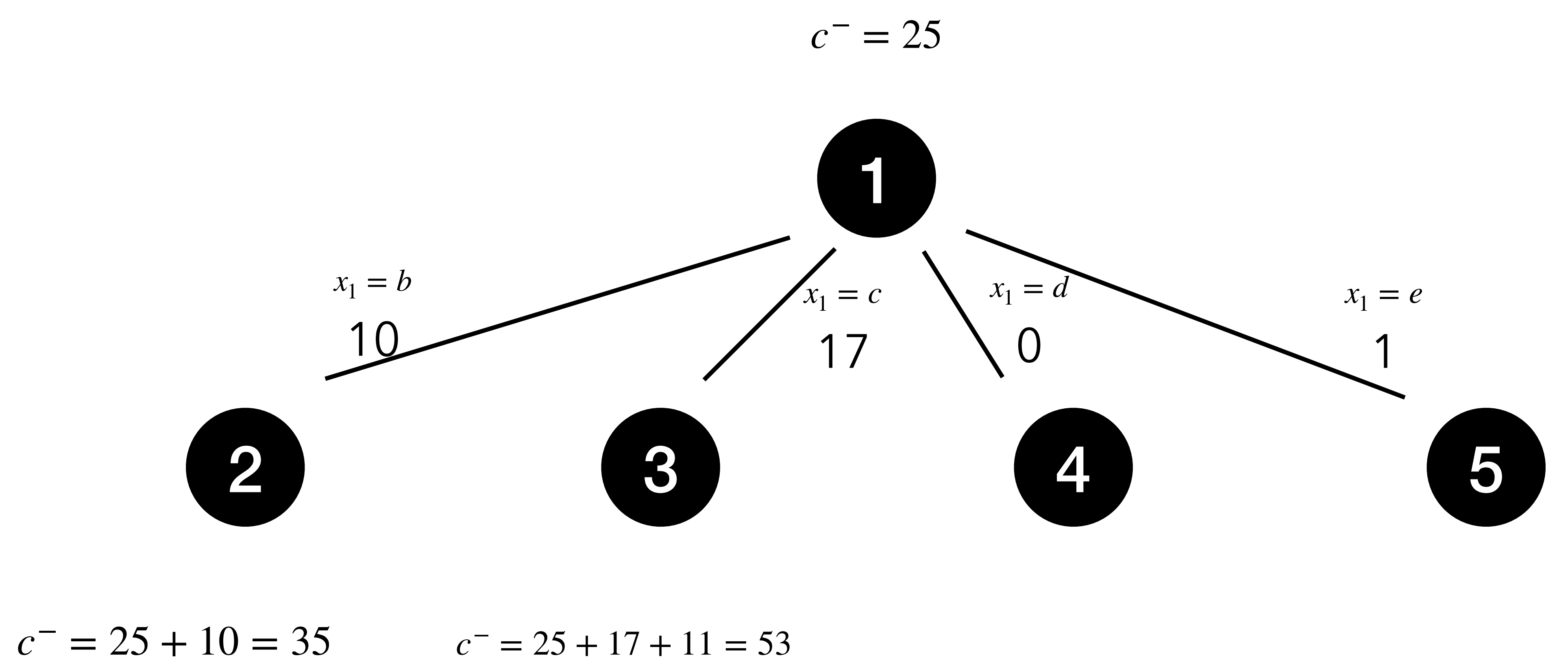
Totes les columnes i files tenen un 0

La matriu ja està reduïda

Ramificació i poda

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \infty & 10 & \boxed{17} & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu original — matriu reduïda (L=25)



$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & \infty & 2 & 0 \\ \infty & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & \infty & \infty & 0 \\ 11 & 0 & \infty & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

La matriu no està reduïda, l'hem de reduir

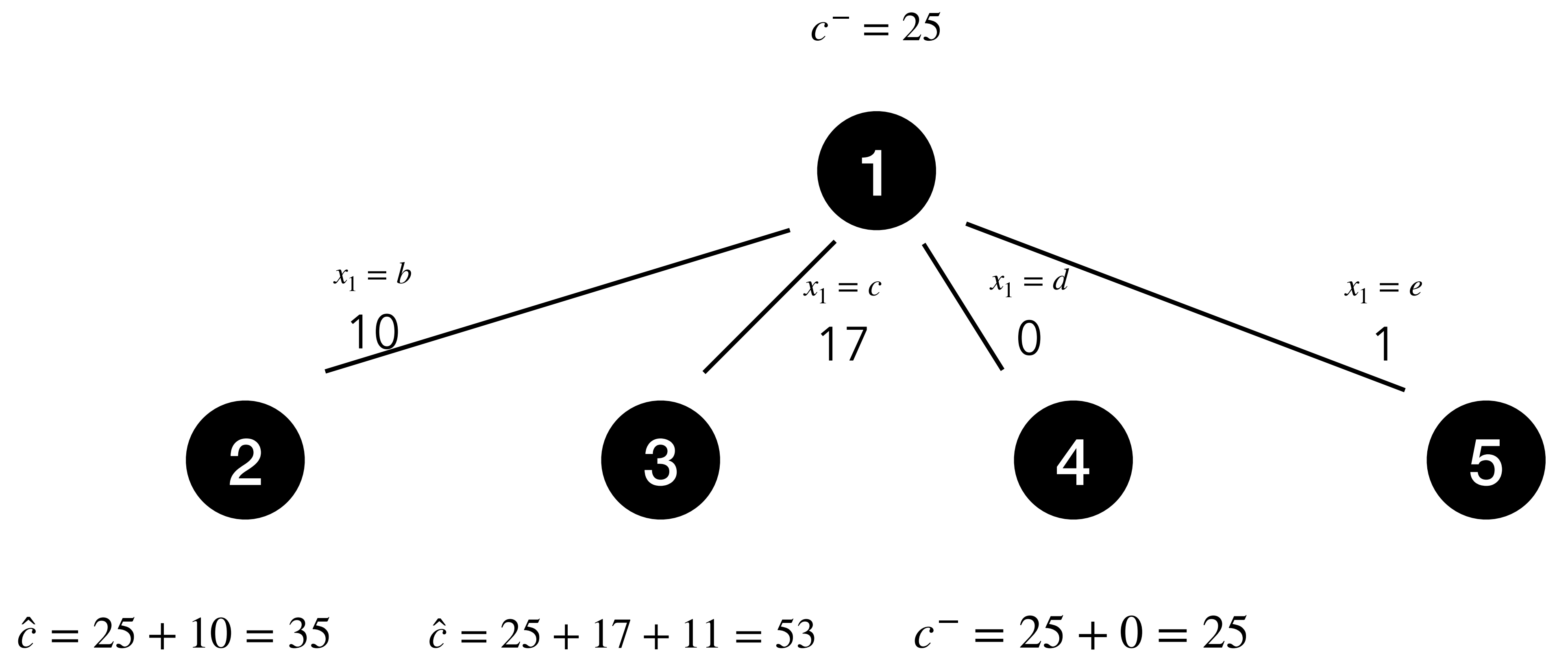
$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 2 & 0 \\ \infty & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 4 & 3 & \infty & \infty & 0 \\ 0 & 0 & \infty & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu reduïda (L = 11)

Ramificació i poda

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & \boxed{0} & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu original — matriu reduïda (L=25)



$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Totes les columnes i files tenen un 0

La matriu està reduïda

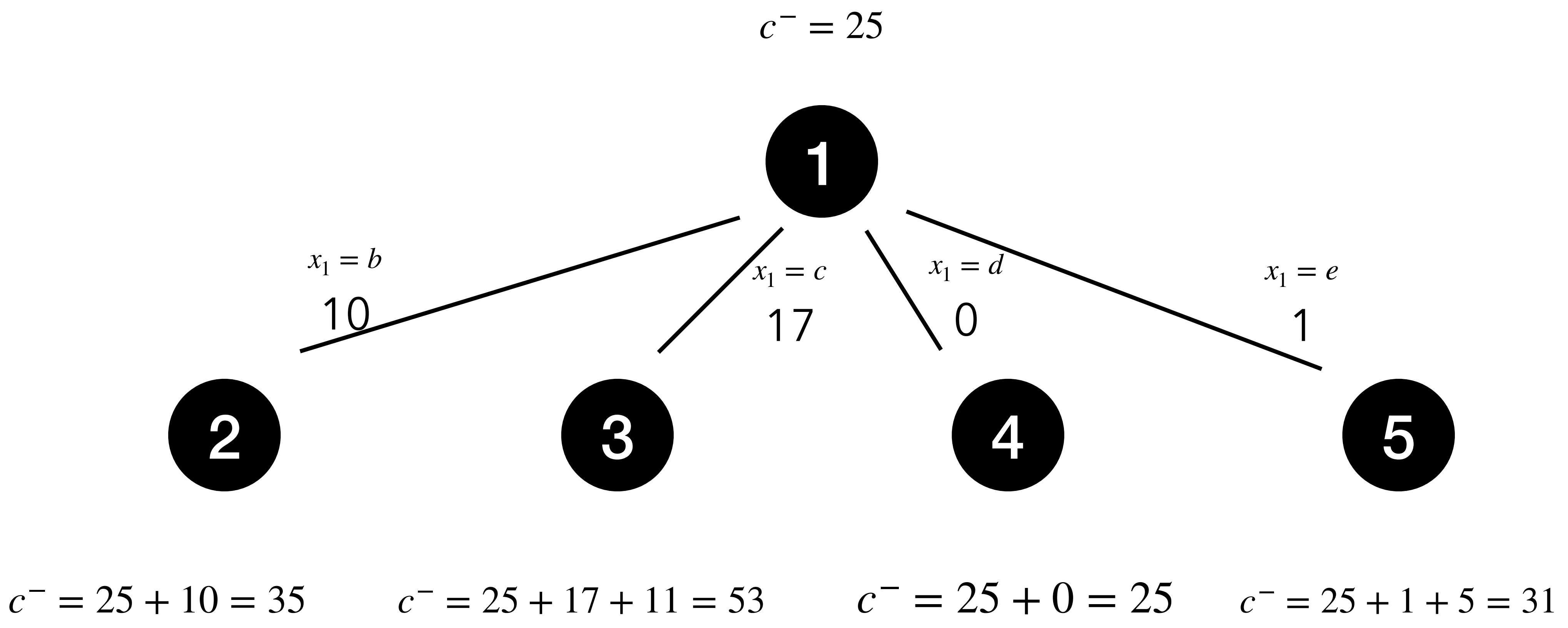
Ramificació i poda

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu original

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & \boxed{1} \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu reduïda (L=25)



$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & 2 & \infty \\ 0 & 3 & \infty & 0 & \infty \\ 15 & 3 & 12 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

La matriu no està reduïda, l'hem de reduir

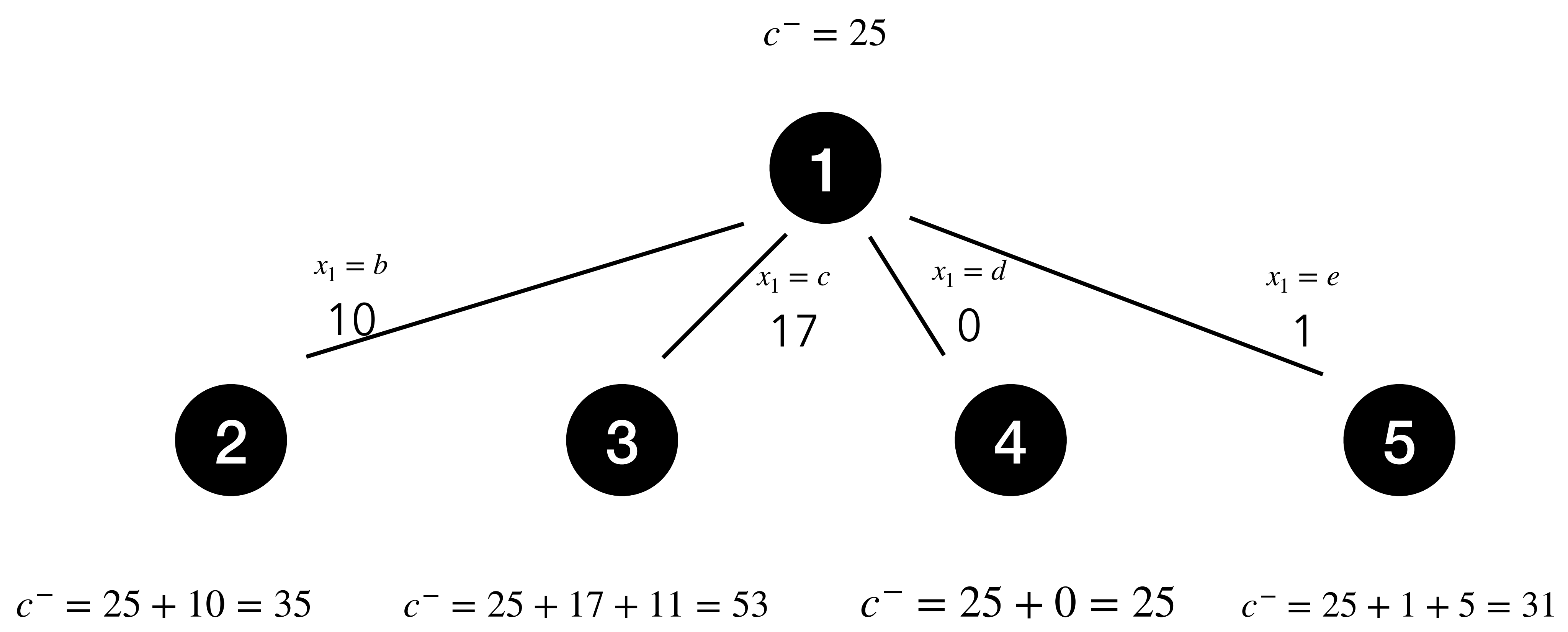
$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 10 & \infty & 9 & 0 & \infty \\ 0 & 3 & \infty & 0 & \infty \\ 12 & 0 & 9 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu reduïda (L = 5)

Ramificació i poda

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 0 & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu original — matriu reduïda (L=25)



Quin node explorem?

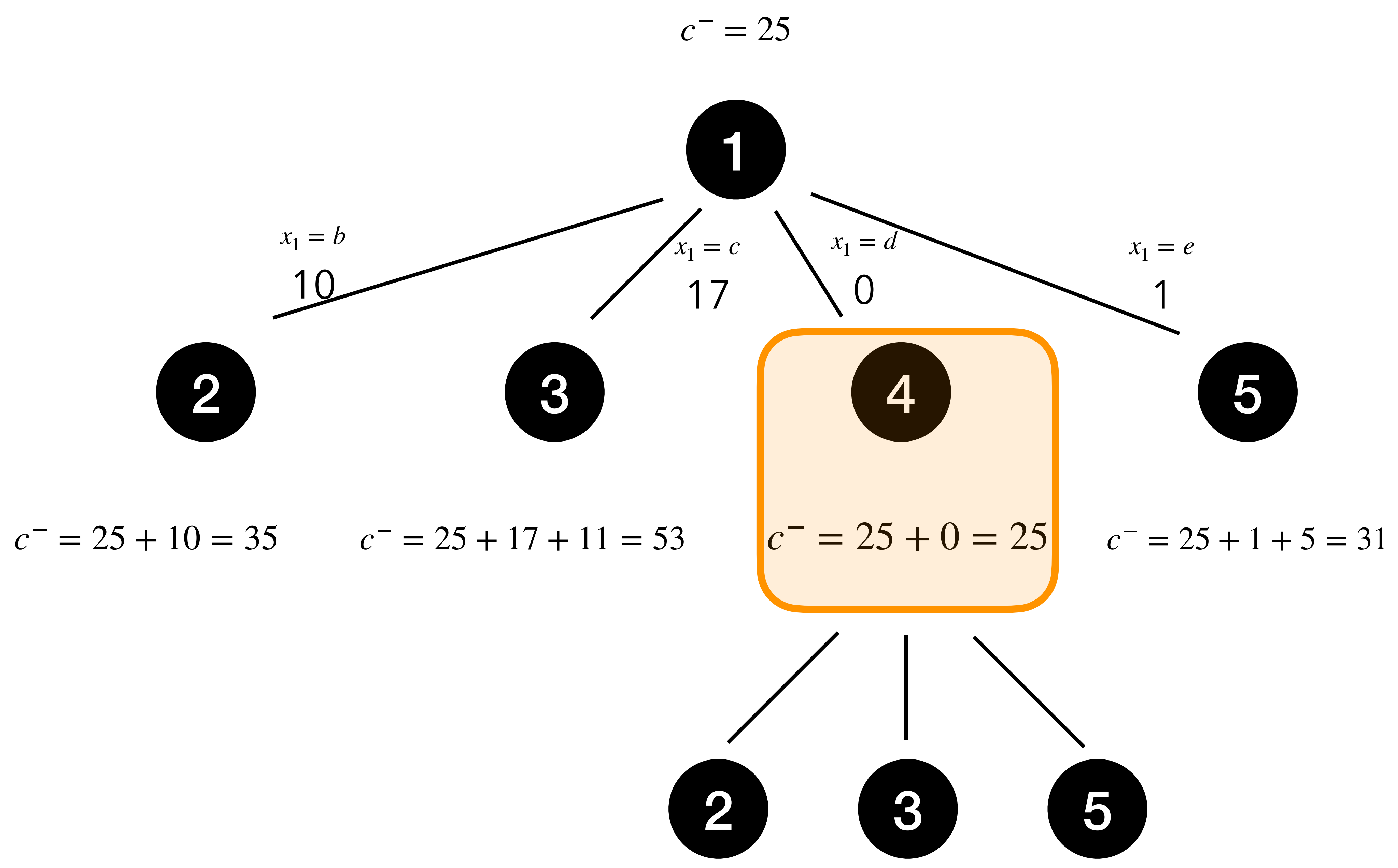
Ramificació i poda

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu original

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & \boxed{0} & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & \boxed{3} & \boxed{12} & \infty & \boxed{0} \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu reduïda (L=25)

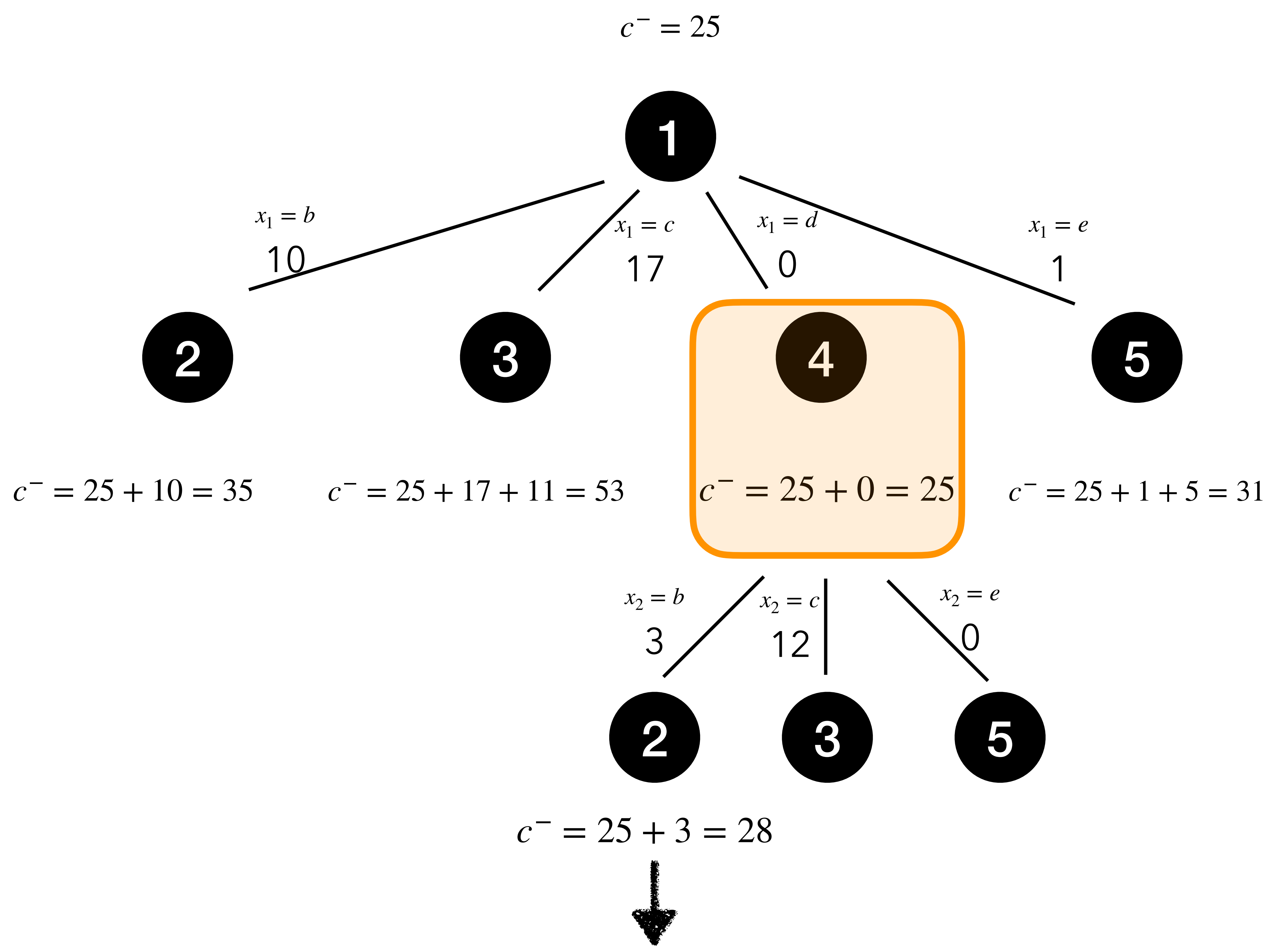


$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Ramificació i poda

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & \boxed{0} & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & \boxed{3} & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu original — matriu reduïda (L=25)



$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \boxed{3} & 12 & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & \infty & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 11 & \infty & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

La matriu està reduïda

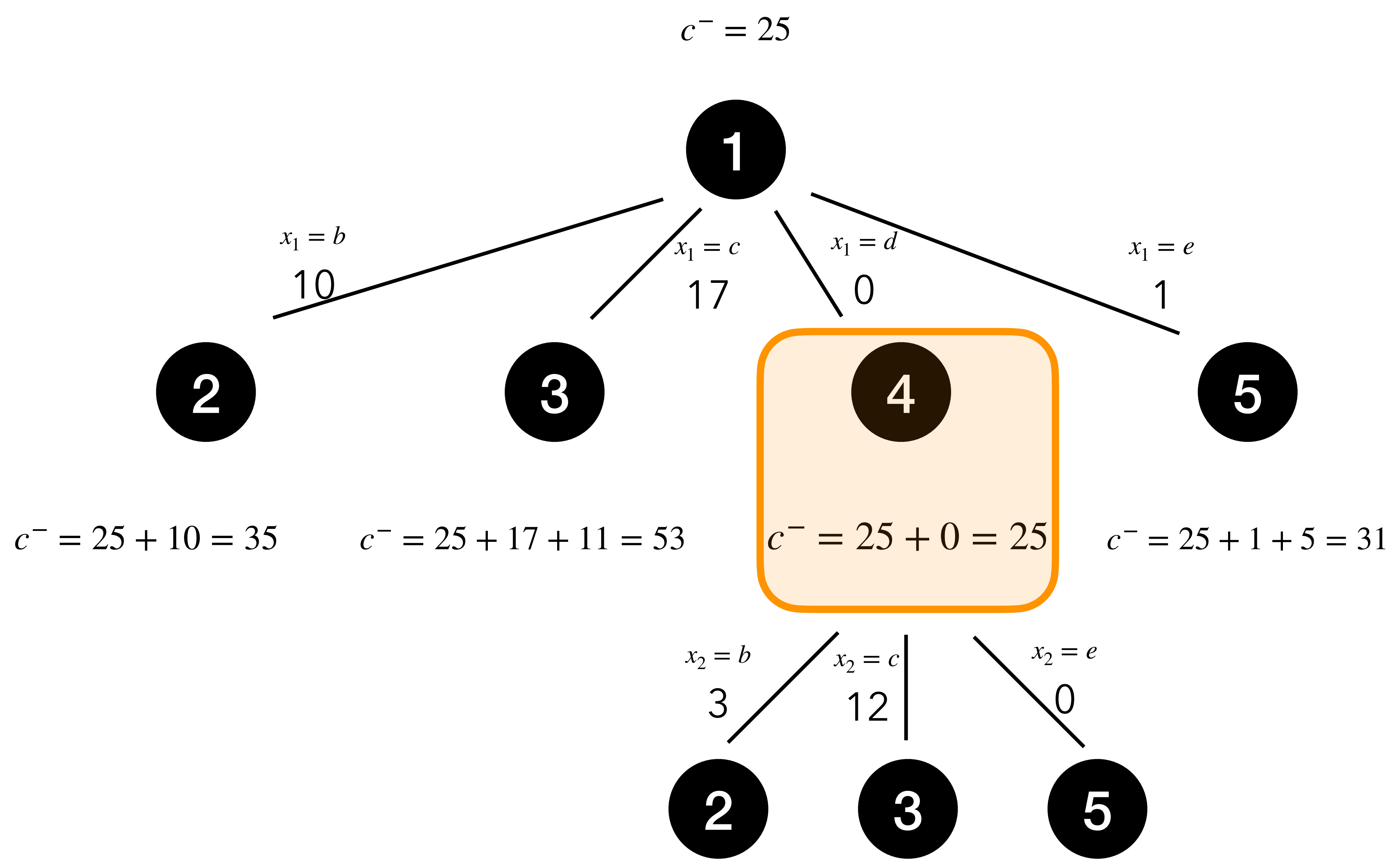
Ramificació i poda

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu original

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & \boxed{0} & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & \boxed{12} & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu reduïda (L=25)



$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & \boxed{12} & \infty & 0 \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

$c^- = 25 + 12 + 13 = 50$

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & \infty & \infty & 0 \\ \infty & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 11 & 0 & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Necessitem reduir matriu

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & \infty & \infty & 0 \\ \infty & 1 & \infty & \infty & 0 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 0 & 0 & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

matriu reduïda (L = 13)

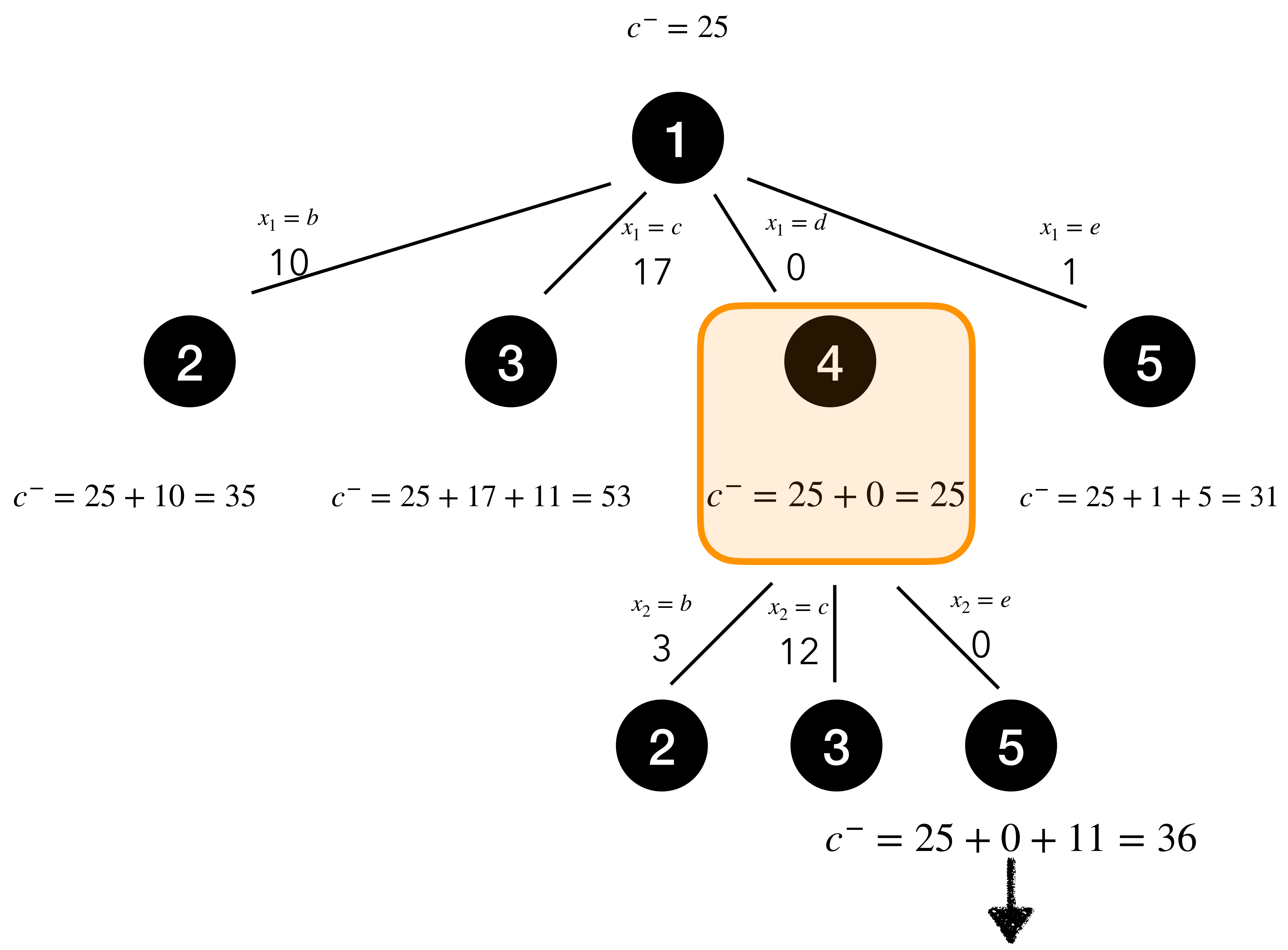
Ramificació i poda

$$\begin{bmatrix} \infty & 20 & 30 & 10 & 11 \\ 15 & \infty & 16 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & \infty & 2 & 4 \\ 19 & 6 & 18 & \infty & 3 \\ 16 & 4 & 7 & 16 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu original

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & \boxed{0} & 1 \\ 12 & \infty & 11 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 2 \\ 15 & 3 & 12 & \infty & \boxed{0} \\ 11 & 0 & 0 & 12 & \infty \end{bmatrix}$$

matriu reduïda (L=25)



$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & 0 \\ 0 & 3 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & 12 & \infty & \boxed{0} \\ 11 & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

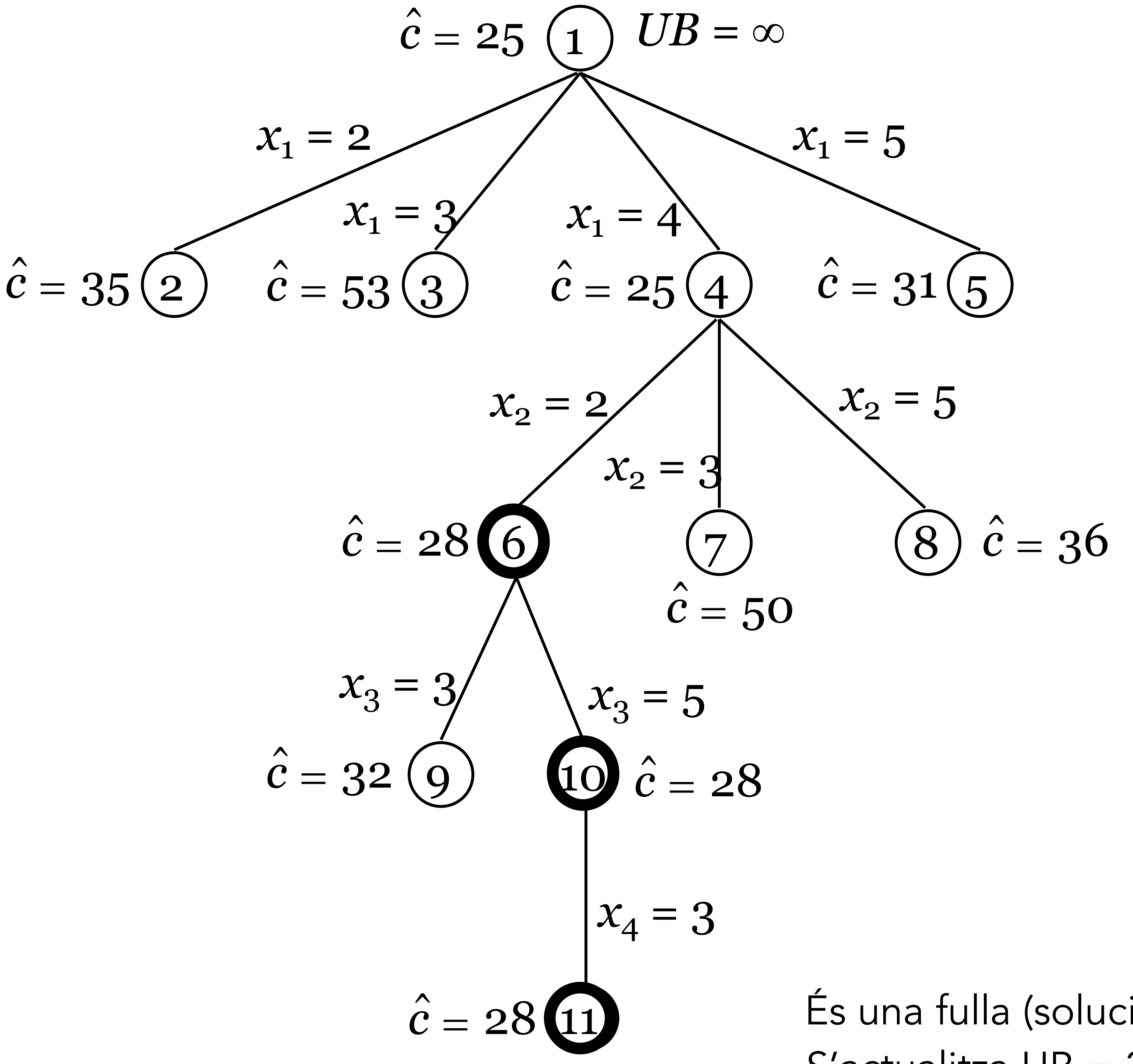
$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 12 & \infty & 11 & \infty & \infty \\ 0 & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

Necessitem reduir matriu

$$\begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ 0 & 3 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

matriu reduïda (L = 11)

Ramificació i poda



És una fulla (solució)
S'actualitza UB = 28

El següent node en curs seria el 5,
però cost(5)>UB
per tant l'algoritme termina i el
hamiltonià mínim es
1,4,2,5,3,1

Ramificació i poda

- Càlcul de la cota inferior. Suposarem que tots els camins comencen i acaben al **node 1**
  - Sigui **A** la matriu reduïda per a un ***node i***.
  - Sigui ***j*** un veí de ***i:***.
  - La **matriu B** reduïda per **j**, i per tant la $c^{-}(j)$, és calcula de la següent manera:

    1. Canviar tots els elements de la fila ***i*** i de la columna ***j*** de ***A*** per ∞.

       Així evitem incloure més arestes que surtin de **i** o arribin a **j**

    2. Canviar l'element (***j***,**1**) de ***A*** per ∞.

       Així evitem considerar l'aresta (**j**,**1**).

    3. Reduïm la matriu resultat per obtenir **B**.

       Si ***r*** és el valor total de la reducció de la matriu en el pas (3): $c^{-}(j) = c^{-}(i) + A[i, j] + r$