Práctica 4.

Apartado 1.

Consideremos $f_1 = \frac{1}{1+x}$. $f_1 \in C^{\infty}$, ya que es composición de funciones que lo son. En particular, f_1'' es continua.
Por tanto, estamos justificados al aplicar la regla del trapezoide, donde $R_T = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta)$, con $a < \eta < b$; en este caso,

$$R_T = -\frac{2-0}{12} \cdot h^2 \cdot \left(\frac{2}{(1+\eta)^3}\right), \text{ donde } \eta \in (0,2)$$

Consideremos $|R_T| = \left|\frac{1}{6} \cdot h^2 \cdot \left(\frac{2}{(1+\eta)^3}\right)\right| \leq \left|\frac{1}{6} h^2 \cdot \frac{2}{1}\right| \ \forall \eta \in (0,2)$.

$$\Rightarrow |R_T| < \left|\frac{1}{3} h^2\right| < 10^{-5} \Leftrightarrow h < \sqrt{10^{-5} \cdot 3} \text{ y } \frac{1}{3} h^2 > -10^{-5} \ \forall h \in \mathbb{R}$$

$$\therefore h < 0{,}005477\ldots$$

y como $h = \frac{b-a}{n} \Leftrightarrow \frac{b-a}{n} < 0{,}005477\ldots \Leftrightarrow \frac{2-0}{0{,}005477\ldots} < n$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{3 \cdot 10^{-5}}} \approx 365{,}148\ldots < n \Rightarrow n = 366.$$

Evaluemos $f_2(x) = e^{2x}\sin(3x)$. $f_2 \in C^\infty$ por un argumento análogo. Y $f_2''(x) = e^{2x}(12\cos(3x) - 5\,\text{sen}(3x))$. Para $\int_0^2 f_2(x)\,dx$, consideremos la regla del trapecio:

$$R_T = -\frac{2-0}{12}\cdot h^2\left(e^{2\eta}(12\cos(3\eta) - 5\,\text{sen}(3\eta))\right), \text{ con } \eta \in (0,2).$$

Consigamos un máximo de $f_2''(x)$ $\forall x \in [0,2]$.

$g(x) = f_2''(x)$.

$$g'(x) = e^{2x}(9\cos(3x) - 46\,\text{sen}(3x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow 9\cos(3x) = 46\,\text{sen}(3x)$$

$$\Leftrightarrow 9\sqrt{1-\text{sen}^2(3x)} = \frac{46}{9}\,\text{sen}(3x).$$

$$\Leftrightarrow 1 - \text{sen}^2(3x) = \frac{46^2}{9^2}\,\text{sen}^2(3x)$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{46^2+9^2}{9^2}\,\text{sen}^2(3x) \Leftrightarrow \text{sen}^2(3x) = \frac{9^2}{46^2+9^2}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \text{Arcsen}\left(\frac{9}{\sqrt{46^2+9^2}}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\text{Arcsen}\left(\frac{9}{\sqrt{46^2+9^2}}\right)}{3}.$$

En el intervalo $[0,2]$, la solución es:

$$x_1 = 0{,}0644\ldots = \frac{\text{Arcsen}\left(\frac{9}{\sqrt{46^2+9^2}}\right)}{3}$$

$$x_2 = 1{,}1116\ldots = \frac{\text{Arcsen}\left(\frac{9}{\sqrt{46^2+9^2}}\right) + \pi}{3}$$

Evaluemos g en 0, 2, x_1 y x_2.

$g(0) = 12$

$g(x_1) = 12{,}30363\ldots$

$g(x_2) = -99{,}91199\ldots$

$g(2) = 705{,}3601\ldots$

Y como e^{2x} monótona creciente, $e^4 \geq e^{2x}$ $\forall x \in [0,2]$

$$\therefore |R_T| = \left|\frac{1}{6}\cdot h^2\left(e^{2\eta}(12\cos(3\eta) - 5\,\text{sen}(3\eta))\right)\right|, \ \eta \in (0,2).$$

$$|R_T| \leq \left|\frac{1}{6} h^2 \cdot e^4 \cdot 705{,}3602\right| < 10^{-4} \Leftrightarrow h < \sqrt{\frac{6\cdot 10^{-4}}{e^4\cdot 705{,}3602}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-0}{n} < \sqrt{\frac{6\cdot 10^{-4}}{e^4\cdot 705{,}3602}} \Leftrightarrow n > \frac{2\sqrt{e^4\cdot 705{,}3602}}{\sqrt{6\cdot 10^{-4}}} \approx 16023 \text{ intervalos}.$$

Por tanto, necesito 366 intervalos para la primera función, y 16024 para la segunda función.

Apartado 2.

Experimentalmente, encontré las raíces para cada función.

Para f3, con tolerancia 1e-15, tengo de raíces:
1.41239117202388442251504e+00 y 3.05710354999473787884767e+00.

Para f4, con tolerancia 1e-15, tengo de raíces: -1.40166702386557484594221e+00 y
4.62311624628456119268094e+00.