Práctica 1 — Métodos Numéricos I.

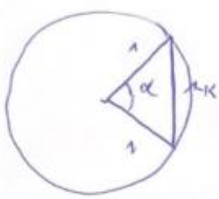
Karim Boujana Marcucci.

Ejercicio 1 (dosPi.c)

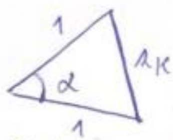
c) Demostración de las recurrencias.

1_c) Demostremos que $r_{2K} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - r_K^2}}$.

Primero veamos que geométricamente $r_K = \sqrt{2 - 2\cos\frac{2\pi}{K}}$, siendo K el número de vértices.



Observemos que, todo polígono regular se puede descomponer en triángulos isósceles para cada costado. Esto nos permite evaluar el triángulo que forman dos vértices consecutivos y el centro de la circunferencia.



Como la circunferencia es unitaria, el radio es 1, y los lados iguales valen 1 de longitud.

Esto nos permite poner r_K en función de α gracias al teorema del coseno. Y, en particular, el ángulo $\alpha = \frac{2\pi}{K}$, pues los vértices dividen la circunferencias en K segmentos iguales.

$\therefore\ r_K^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cos\frac{2\pi}{K} = 2 - 2\cos\frac{2\pi}{K} \Rightarrow r_K = \sqrt{2 - 2\cos\frac{2\pi}{K}}$.

$\Rightarrow r_{2K} = \sqrt{2 - 2\cos\frac{\pi}{K}}$.

Para probar c) solo queda demostrar que $2\cos\frac{\pi}{K} = \sqrt{4 - r_K^2}$.

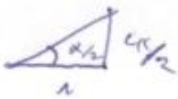
$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{\pi}{K} = 2 + 2\cos\frac{2\pi}{K} \Leftrightarrow 4\cos^2\frac{\pi}{K} - 2\cos\frac{2\pi}{K} = 2 \overset{(*)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{\pi}{K} - 2\cos^2\frac{\pi}{K} + 2\,\text{sen}^2\frac{\pi}{K} = 2 \Leftrightarrow \cos^2\frac{\pi}{K} + \text{sen}^2\frac{\pi}{K} = 1.$ $\square$

(*) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$.

Evaluemos geométricamente c_K.

Sabemos que el radio es 1 y el ángulo es $\frac{2\pi}{K}$.
Centrémonos en el triángulo formado por el punto tangente del contacto, el centro y un vértice.



De aquí se desprende que $\frac{c_K}{2} = \tan\frac{\pi}{K}$.

$$\Rightarrow c_K = 2\tan\frac{\pi}{K}.$$

Queremos probar que $c_K = \frac{2 s_K}{\sqrt{4-s_K^2}}$.

Por el apartado anterior sabemos que $\sqrt{4-s_K^2} = 2\cos\frac{2\pi}{K}$.

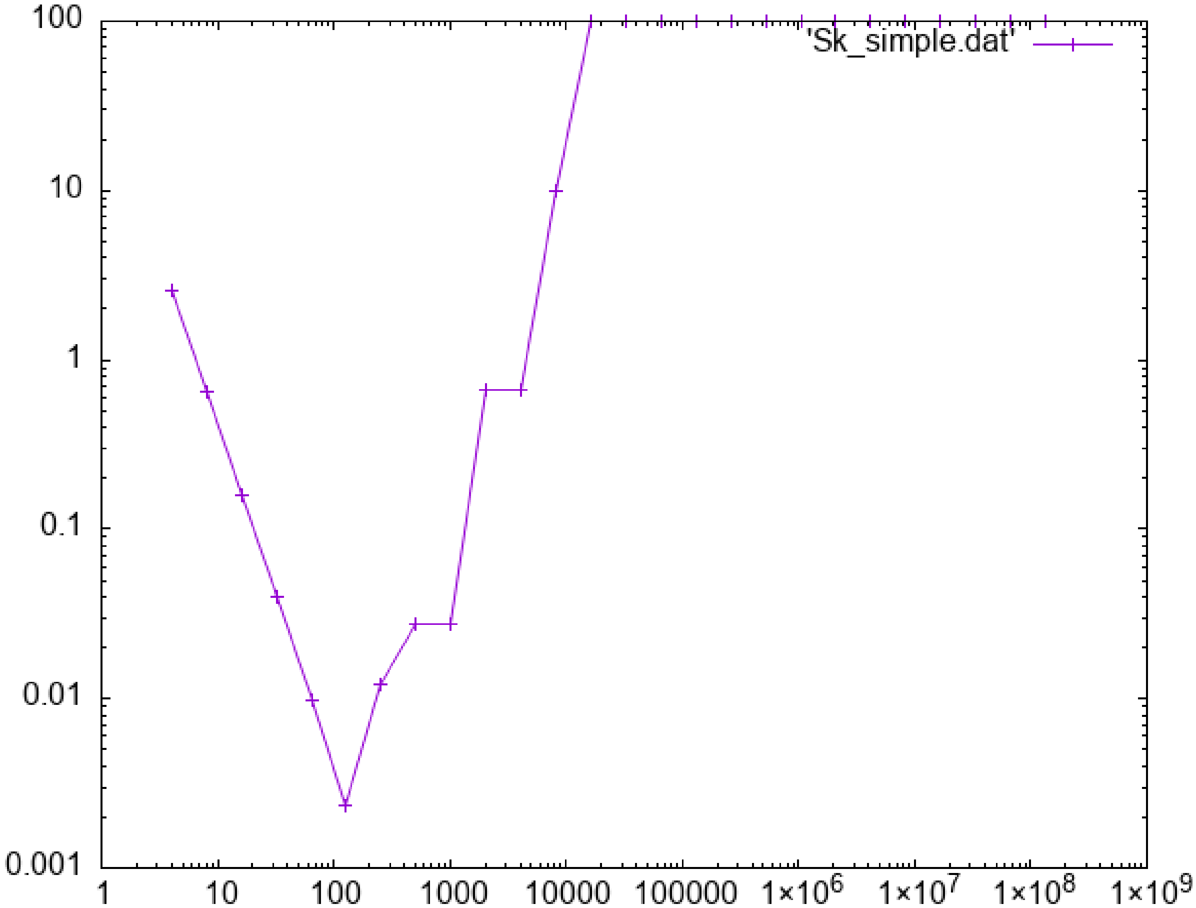
$$\therefore \frac{2 s_K}{\sqrt{4-s_K^2}} = \frac{\cancel{2}\, s_K}{\cancel{2}\cos\frac{\pi}{K}} = \frac{\sqrt{2-2\cos\frac{2\pi}{K}}}{\cos\frac{\pi}{K}} = \frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos\frac{2\pi}{K}}{2}}}{\cos\frac{\pi}{K}}.$$

Y sabemos que $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

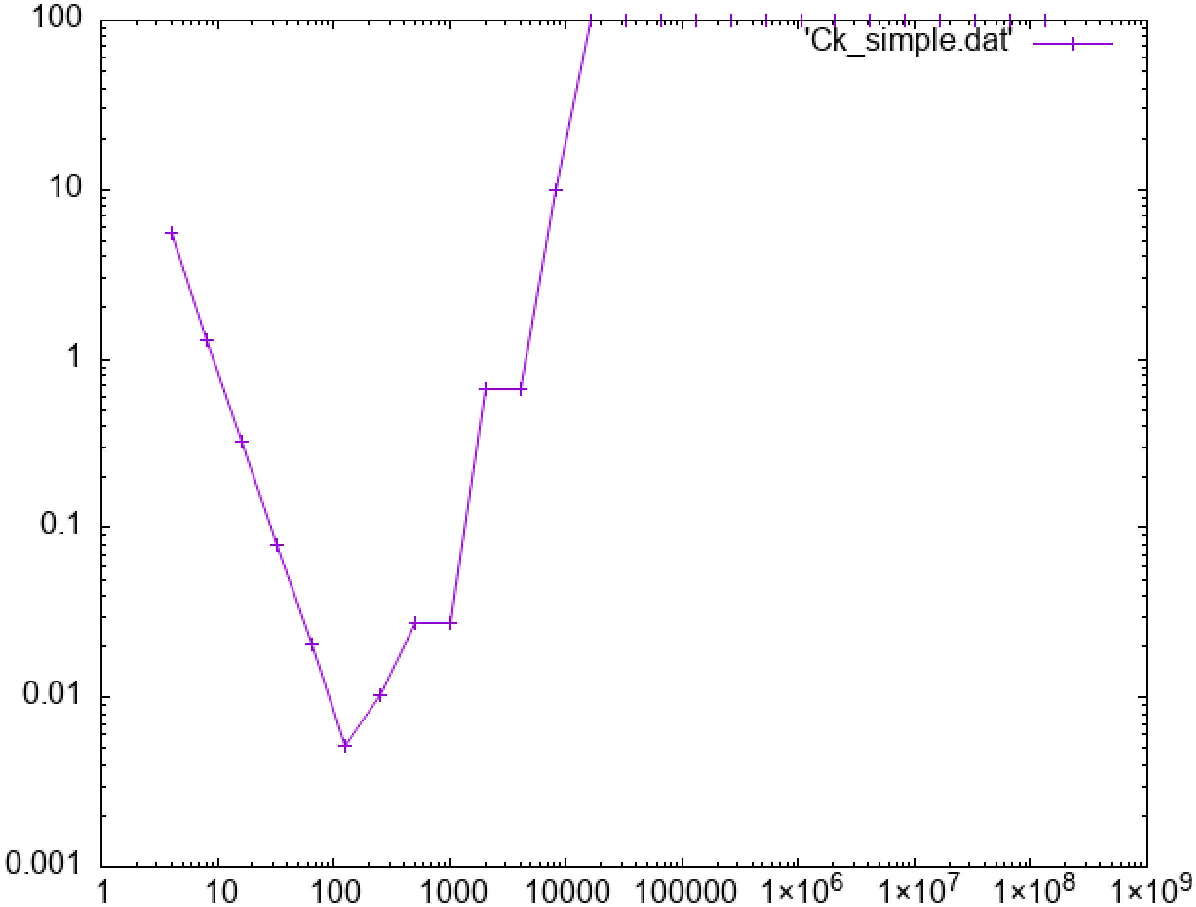
$$\therefore \cancel{2\sqrt{\frac{1-\cos}{2}}}\quad 2\cdot\frac{\sqrt{\frac{1-\cos\frac{2\pi}{K}}{2}}}{\cos\frac{\pi}{K}} = 2\,\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{K}}{\cos\frac{\pi}{K}} = 2\tan\frac{\pi}{K}.\ \square$$

d) Para los resultados de graficar estas aproximaciones de pi, en todos los casos se puede observar un descenso original del error, para que luego este error relativo vuelva a subir, llegando a ser peor que el original error relativo original en el caso de usar al recurrencia Sk con precisión simple.

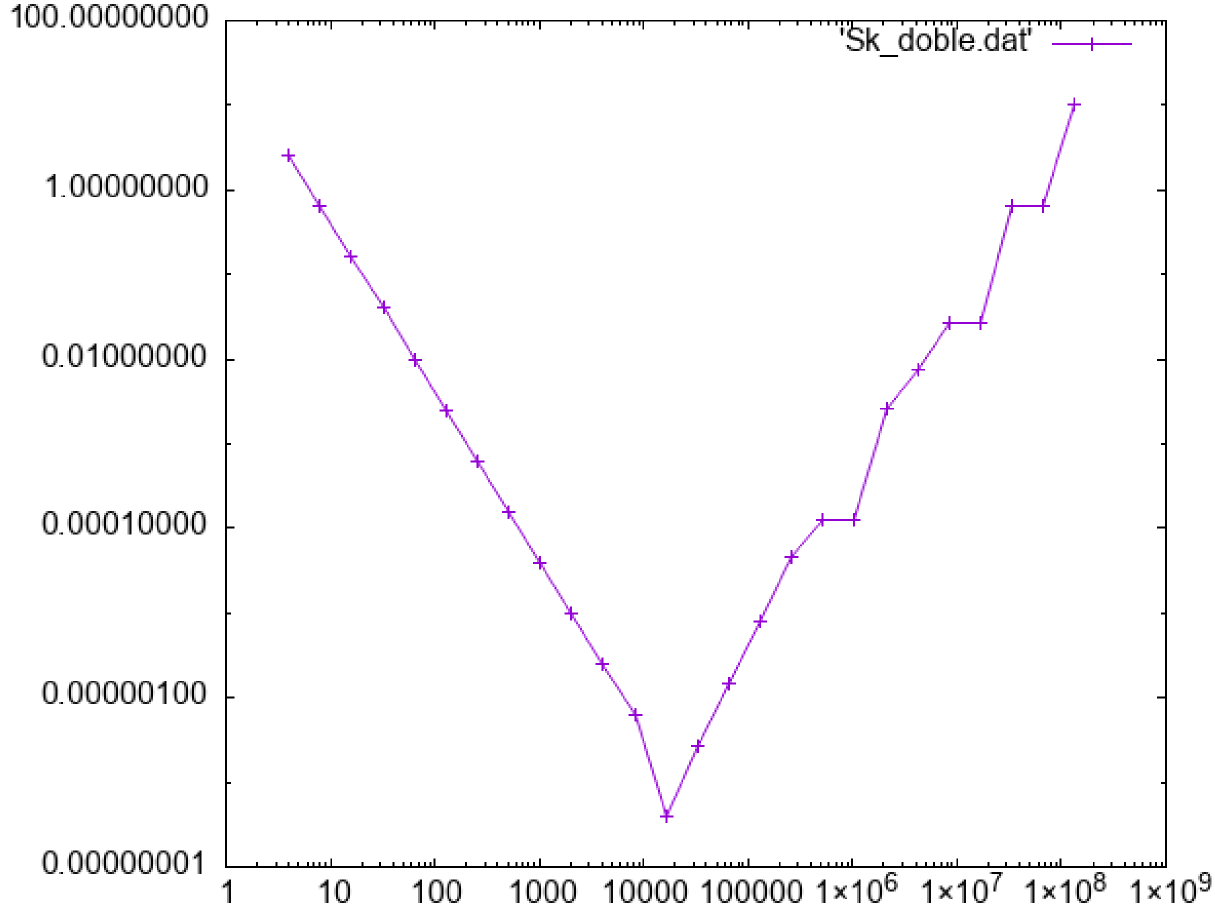
Esto ocurre por la acumulación del error relativo, cada vez la fórmula se calcula para valores más pequeños, es decir, la raíz de la raíz de la raíz … de cuatro menos dos eventualmente causa un error de cancelación, que se acumula y hace que el error relativo incremente dramáticamente. A continuación, veamos las gráficas generadas con gnuplot.



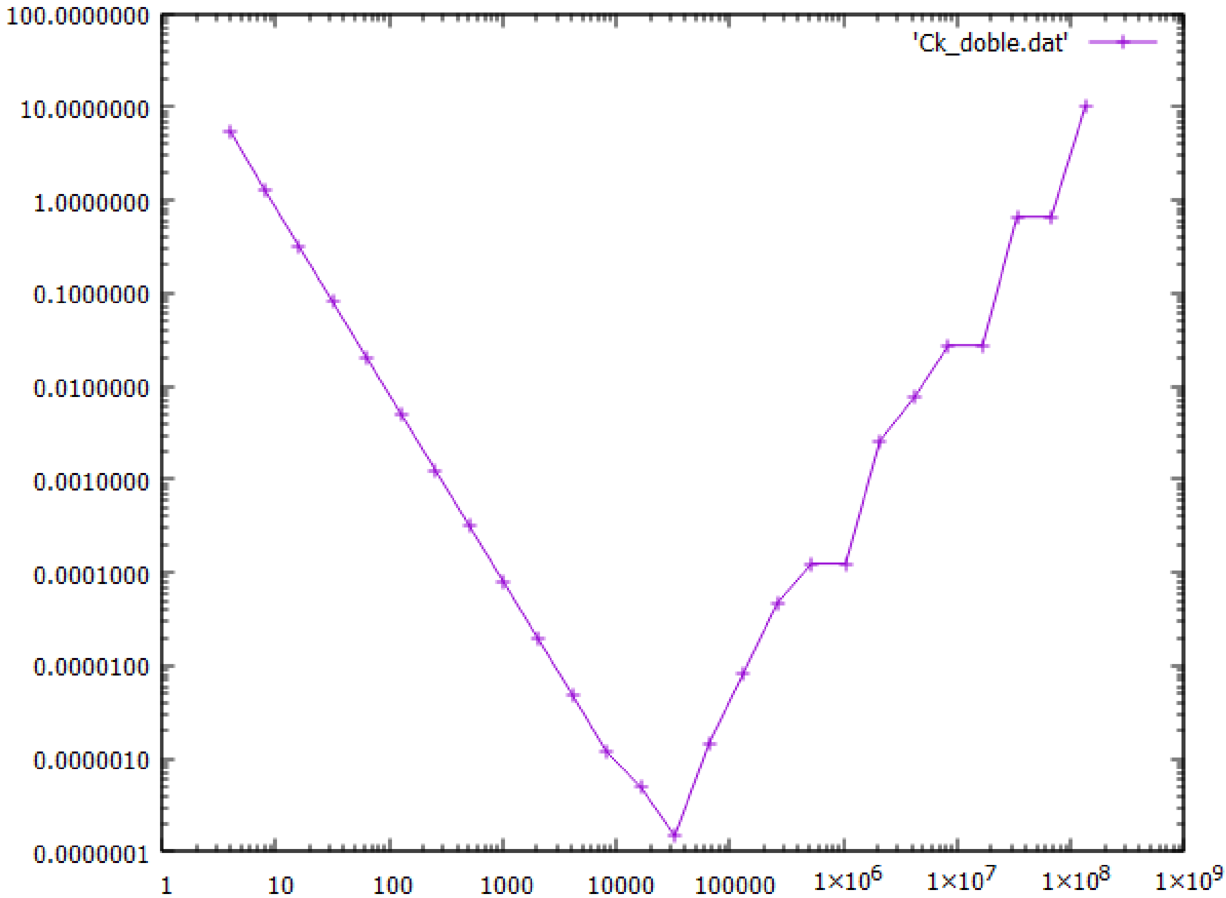
'Sk_simple.dat'
100
10
1
0.1
0.01
0.001
1
10
100
1000
10000
100000
1×10^6
1×10^7
1×10^8
1×10^9



100
10
1
0.1
0.01
0.001
1
10
100
1000
10000
100000
1×10^6
1×10^7
1×10^8
1×10^9
'Ck_simple.dat'



'Sk_doble.dat'
100.00000000
1.00000000
0.01000000
0.00010000
0.00000100
0.00000001
1
10
100
1000
10000
100000
1×10^6
1×10^7
1×10^8
1×10^9

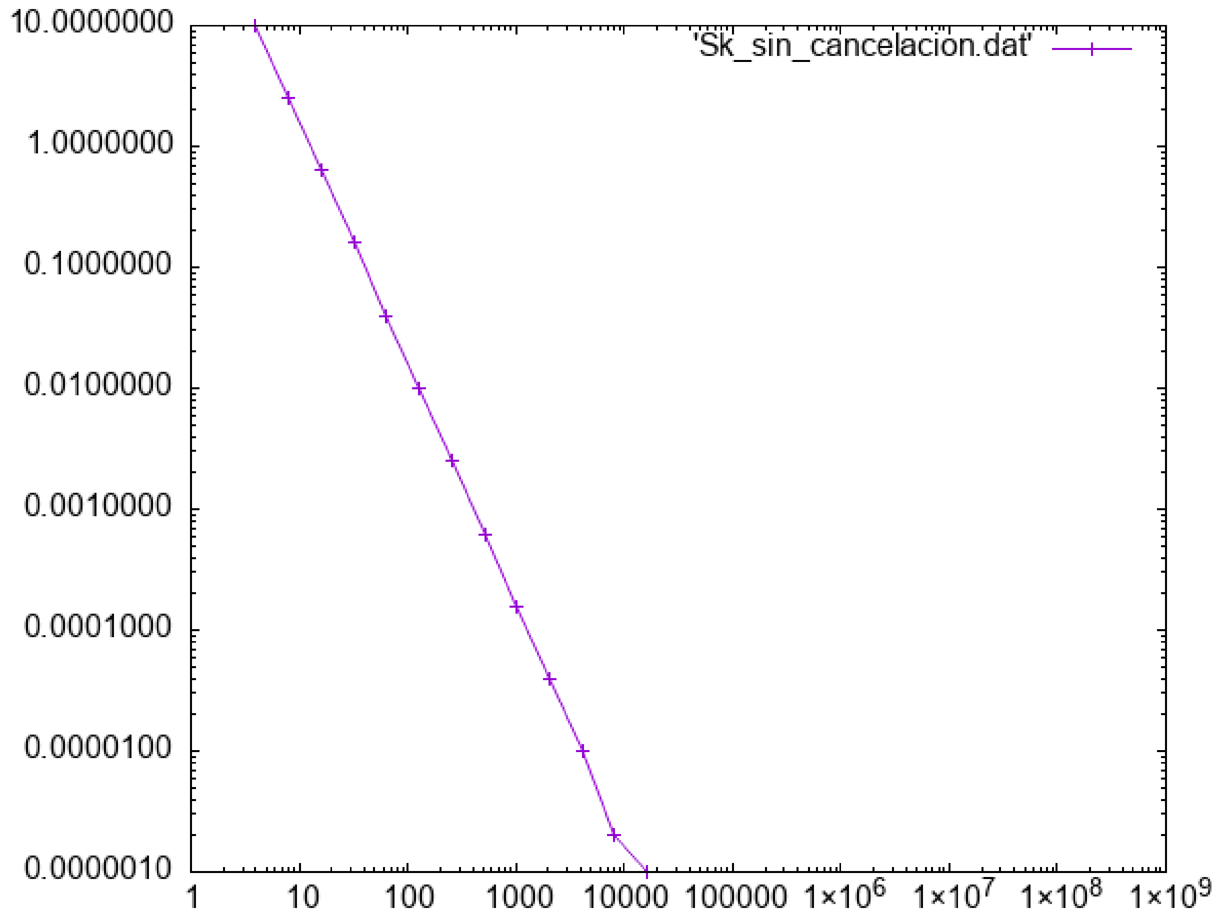

'Ck_doble.dat'
100.0000000
10.0000000
1.0000000
0.1000000
0.0100000
0.0010000
0.0001000
0.0000100
0.0000010
0.0000001
1
10
100
1000
10000
100000
1×10^6
1×10^7
1×10^8
1×10^9

e) Para sk podemos utilizar esta fórmula, que computacional y numéricamente es mejor.

$$a_K = 2 \cdot \sqrt{\frac{1-\cos\frac{2\pi}{K}}{2}} = 2 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{K}$$

Esta representación es mejor puesto que evita la cancelación dada al restar $1-\cos\frac{2\pi}{K}$, y dividir 2π entre valores muy grandes.

Podemos observar que es mucho mejor viendo la gráfica que produce su error relativo, el cual llega al 0%.



2. a)

a) Sea $f(x) = e^{x}$.

Su polinomio de Taylor $p_{n,x_0}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^{k}$.

En este caso, ya que $f^{(k)}(x) = e^{x} \quad \forall k \in \mathbb{N}$, se tiene que para $x_0 = 0$:

$$p_{n,0}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k}}{k!}$$

El resto de Lagrange tiene que $f(x) = p_{n,x_0}(x) + r_{n,x_0}(x)$.

Si consideramos $p_{n,x_0}(x) = \tilde{f}(x) \Rightarrow |e_a(\tilde{f}(x))| =$

$= |f(x) - \tilde{f}(x)| = |f(x) - p_{n,x_0}(x)| = |r_{n,x_0}(x)|$,

Por tanto, si acotamos $|r_n(x)|$ habremos acotado el error.

Se ve que $r_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$ con $\alpha \in \langle x_0, x \rangle$.

Por definición, $r_{n,x_0}(x_0) = 0$, y $|r_{n,x_0}(x)| = \left|\frac{e^{\alpha}}{(n+1)!}\right| \left|x^{(n+1)}\right|$, $\alpha \in \langle 0, x \rangle$.

$|r_{n,0}(x)|$ alcanza su valor máximo cuando $\alpha = |x|$, pues es creciente monótona respecto de x. Podemos fijar dos cotas respecto del signo de x.

Si x positiva: $|e_a(\tilde{f}(x))| \leq \left|\frac{e^{x} \cdot x^{(n+1)}}{(n+1)!}\right|$

Si x negativa: $|e_a(\tilde{f}(x))| \leq \left|\frac{1 \cdot x^{(n+1)}}{(n+1)!}\right|$

Se puede generalizar a una cota más "holgada" con:

$$|e_a(\tilde{f}(x))| \leq \left|\frac{e^{|x|} \cdot x^{(n+1)}}{(n+1)!}\right|.$$

Por otra parte, para conseguir una precisión de 10^{-8}, solo es necesario conseguirla para $x = -1$ y $x = 1$, pues el error es mayor mientras más nos alejamos de x_0. Y se observa que la fórmula generalizada es la misma para 1 y -1.

Se comprueba experimentalmente en mi práctica que la n necesaria es 11.

3.- Se observa que para $x_0 = 1$ y $x_1 = 1/3$.
la sucesión degenera a $\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

$$\therefore \quad \frac{3}{8}(3x_0 - x_1)\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{8}\cancelto{0}{(3x_1 - x_0)}\, 3^n =$$

$$= \cancelto{1}{\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{3}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Y para $x_0 = \frac{1}{3}$ y $x_1 = 1$, la recurrencia degenera a 3^{n-1}.

$$\therefore \quad \frac{3}{8}\cancelto{0}{(3x_0 - x_1)}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{8}(3x_1 - x_0)\, 3^n =$$

$$= \frac{1}{\cancel{8}}\,\frac{\cancel{8}}{3}\cdot 3^n = 3^{-1}\cdot 3^n = 3^{n-1}.$$