MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2025-26. Semestre de tardor

Pràctica 3: Interpolació polinòmica

Interpolació de Lagrange

Donats $n+1$ punts del pla (x_i, f_i) , $i = 0,1,2,\ldots n$ amb totes les abscisses x_i diferents entre si, volem determinar un polinomi $p(x) \in P_n[x]$ tal que

$$p(x_i) = f_i \ , \quad i = 0,1,2,\ldots,n \ .$$

1 Nombre de condició de la matriu de Vandermonde

Si escrivim el polinomi p com a $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, llavors, imposant les condicions d'interpolació, el problema es pot plantejar com resoldre el sistema $Ma = f$, on

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

A la matriu M se l'anomena matriu de Vandermonde.

a) En un fitxer de nom **normmax.c** escriviu una funció `double normMax(int m, double **matA)` que calculi la norma del màxim de la matriu matA.

b) En un fitxer de nom **condv.c** escriviu una funció de prototipus `double condV(int m, double tol)` que avaluï el nombre de condició respecte de la norma del màxim de la matriu de Vandermonde de dimensió m en m punts equiespaiats en l'interval $[-1,1]$, és a dir, $x_i = -1 + \frac{2i}{m-1}$, $i = 0,\ldots,m-1$. Per això s'usaran les funcions de la pràctica anterior que es troben als fitxers **triang.c** i **elim.c**.

c) En un fitxer **main-Vandermonde.c** escriviu una funció `main` que llegeix una dimensió mínima `mmin`, una dimensió màxima `mmax` i una tolerància `tol`, i escriviu en un fitxer per a cada m entre `mmin` i `mmax`, la dimensió m de la matriu i el logaritme decimal del nombre de condició corresponent.

d) Dibuixeu la gràfica corresponent al fitxer anterior, i comenteu els resultats.

2 Mètode de les diferències dividides de Newton

Es millor resoldre el problema de la interpolació amb un polinomi de grau n usant el mètode de les diferències dividides de Newton. En aquest cas escrivim el polinomi p com a

$$p(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + b_n(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1}),$$

i calculem les diferències dividides, definides de forma recurrent per:

$$\begin{aligned} f[x_i] &= f_i \\ f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}, x_{i+j+1}] &= \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+j+1}] - f[x_i, \ldots, x_{i+j}]}{x_{i+j+1} - x_i} \end{aligned}$$

Els coeficients buscats són

$$b_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k], \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

a) Escriviu una funció de prototipus

```
void dif_div(int n, double *x, double *f);
```

que, donats els vectors `x` i `f`, que contenen $\{x_0, \ldots, x_n\}$ i $\{f_0, \ldots, f_n\}$, respectivament, omple el vector `f` amb les diferències dividides

$$f[x_0], f[x_0, x_1], \ldots, f[x_0, \ldots, x_n],$$

en aquest ordre. Guardeu-la en un fitxer de nom `diDi.c`.

b) Escriviu una funció de prototipus

```
double hornerNew(int n, double *b, double *x, double z)
```

que, donats els vectors `x` i `b`, que contenen $\{x_0, \ldots, x_n\}$ i $\{f[x_0], f[x_0, x_1], \ldots, f[x_0, \ldots, x_n]\}$, respectivament, avalua el polinomi interpolador en el punt `z`, usant la regla de Horner.

Guardeu-la en un fitxer de nom `hornern.c`.

3 Aplicacions

Volem aplicar la interpolació de Lagrange per a diverses funcions. Suposarem en tot els exemples que interpolem en $n+1$ punts equiespaiats a l'interval $[-1, 1]$, és a dir $x_i = -1 + \frac{2i}{n}$, $1 \leq i \leq n$. Feu una funció main en un fitxer **aplicacio.c**, que llegirà el grau del polinomi interpolador i generarà un fitxer de resultats que permetin dibuixar amb **gnuplot** el polinomi interpolador. Per a cada exemple, es dibuixaran amb **gnuplot** els polinomis interpoladors per diversos valor del grau i la funció interpolada.

Considerarem les següents funcions: 1) $f_1(x) = e^x$, 2) $f_2(x) = |x|$, 3) $f_3(x) = 1/(1+25x^2)$ (exemple de Runge) i 4) $f_4(x) = f_3(x)^2$. Cada funció estarà en un fitxer de nom **f_n.c**, on **n** correspon a seu subíndex.

Comenteu els resultats.

Derivació numèrica

La primera derivada d'una funció $f(x)$ en un punt x_0 es pot aproximar, si h és prou petit, per les expressions següents:

$$F_1(x_0, h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{i} \quad F_2(x_0, h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

Programeu les funcions

```
double der(double x0, double h);     i
double derCen(double x0, double h);
```

que, donats x_0 i h retornen $F_1(x_0,h)$ i $F_2(x_0,h)$, respectivament. Guardeu-les en un fitxer de nom **derivades.c**.

Programeu una funció `main`, que guardareu en el fitxer **main-deriv.c**, que llegeixi x_0, avaluï $F_1(x_0,h)$ i $F_2(x_0,h)$ per a valors decreixents del pas h i escrigui en un fitxer, per a cada pas, el seu valor i l'error en les aproximacions (en punt flotant amb notació exponencial i controlant el nombre de dígits de la mantissa).

Feu una gràfica dels errors en funció del pas. Comenteu els resultats.

Com a exemples, podeu prendre les funcions f_1, f_3 i f_4 de l'apartat anterior.

Per entregar (al Campus Virtual, abans del 25 de novembre a les 23:50):

- Creeu un directori anomenat **Cognom-Nom-P3** i poseu-hi els fitxers corresponents a aquesta pràctica.
- Creeu un fitxer .c per a cadascun dels apartats amb el nom indicat.
- Escriviu les respostes a les preguntes que hi ha a l'enunciat de la pràctica en un fitxer diferent.
- Adjunteu els gràfics que es demanen.
- Poseu Nom i Cognoms com a comentari d'inici a cadascun dels fitxers.
- Useu notació científica per a escriure els valors reals.
- Entregueu un zip amb tot el directori. El nom del zip ha de ser de la forma **Cognom-Nom-P3.zip**