ساختمان داده ها

مروری بر نظریه احتمال

مدرس: غیاثی‌شیرازی
دانشگاه فردوسی مشهد

آزمایش، برآمد، فضای نمونه ای، رخداد

- آزمایش(Experiment) فرآیندی است که
  - تکرار پذیر است
  - نتیجه اجرای آن مجموعه ای مشخص از برآمدها (Outcome) است.
- به مجموعه تمام برآمدها فضای نمونه‌ای (Sample Space) گفته می شود. در اینجا فضای نمونه ای را Ω نشان می دهیم.
- به هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای یک رخداد (event) گفته می شود.

مثال: آزمایش پرتاب یک تاس

- اعداد ۱ تا ۶ برآمدهای این آزمایش هستند.
- فضای نمونه ای این آزمایش مجموعه $\{1,2,\dots,6\}$ است.
- مجموعه $\{1,3,5\}$ یک رخداد را نشان می دهد که معادل این است که نتیجه آزمایش عددی فرد باشد.

مثال: آزمایش پرتاب سه سکه

- سه تایی هایی مانند (شیر، شیر، خط) برآمدهای این آزمایش هستند.
- فضای نمونه ای این آزمایش شامل ۸ برآمد است.
- مجموعه {(خط، خط، خط) ,(شیر، شیر، شیر)} یک رخداد را نشان می دهد که معادل این است که هر سه سکه مثل هم بیایند.

تابع احتمال

- تابع احتمال به هر رخداد، احتمال آن را نسبت می دهد.
- تابع احتمال در سه اصل زیر صدق می کند:
  - احتمال هر رخداد نامنفی است. یعنی برای هر $A \subseteq \Omega$ داریم:

$$P(A) \geq 0$$

  - احتمال فضای نمونه ای برابر یک است:

$$P(\Omega)=1$$

  - اگر A و B ناسازگار باشند، یعنی اشتراک آنها تهی باشد، آنگاه:

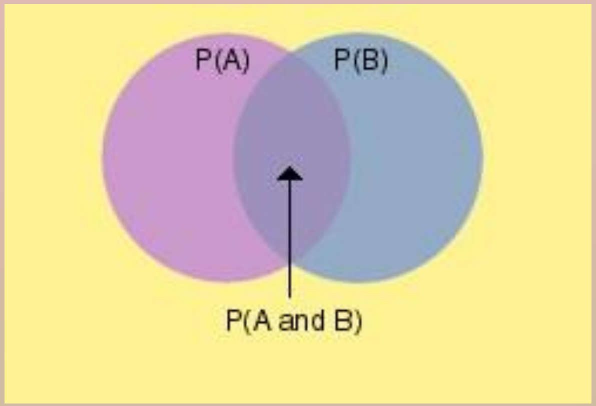
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

احتمال شرطی
(Conditional Probability)

- اگر A و B دو رخداد دلخواه باشند، آنگاه رخداد A به شرط B چنین تعریف می شود:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- احتمال شرطی فوق، احتمال رخداد A را با فرض اینکه بدانیم رخداد B رخ داده است نشان می دهد.



قانون احتمال کل
(Law of Total Probability)

- اگر مجموعه های $A_1,\ldots,A_n$ دو به دو مجزا باشند و اجتماع آنها Ω باشد (به عبارت دیگر فضای Ω را افراز کنند) آنگاه برای هر رخداد B داریم:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

قضیه بیز (Bayes' Theorem)

- فرم اول:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

- فرم دوم: اگر مجموعه های $A_1,\ldots,A_n$ دو به دو مجزا باشند و اجتماع آنها Ω باشد (به عبارت دیگر فضای Ω را افراز کنند) آنگاه برای هر رخداد B داریم:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

استقلال رخدادها

(Independence of events)

- دو رخداد A و B را مستقل گوییم هرگاه:

$$P(A\cap B) = P(A).P(B)$$

- و یا به طور معادل:

$$P(A|B) = P(A)$$

- و یا باز هم به طور معادل:

$$P(B|A) = P(B)$$

متغیر تصادفی (Random Variable)

- یک متغیر تصادفی X تابعی است از فضای نمونه ای به اعداد حقیقی (یا مختلط). یعنی:

$$X:\ \Omega \to \mathbb{R}$$

- مثال: در آزمایشی که دو تاس همزمان پرتاب می شوند، مجموع مقادیر دو تاس یک متغیر تصادفی است.
- در آزمایش پرتاب سکه، تابعی که شیر را به 1+ و خط را به 1- نگاشت می کند نمونه ای از یک متغیر تصادفی است.

امید ریاضی (Expected Value)

- امید ریاضی یک متغیر تصادفی، مقدار متوسط آن را نشان می دهد و از رابطه زیر به دست می آید:

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega)$$

متغیر تصادفی نشانگر

Indicator Random Variable

- I_A متغیری تصادفی است که اگر رخداد A رخ داده باشد برابر 1 و در غیر این صورت برابر 0 است.

$$I_A(x) := \begin{cases} 1 & if \quad x \in A \\ 0 & if \quad x \notin A \end{cases}$$

- برای متغیرهای تصادفی نشانگر داریم:

$$E(I_A) = \sum_{\omega \in \Omega} P(w) I_A(w)$$

$$= \sum_{\omega \in \mathrm{A}} P(w).1 + \sum_{\omega \notin \mathrm{A}} P(w).0 = P(A)$$

مثال:

- فرض کنید احتمال رو آمدن هر وجه تاس با مقدار آن متناسب باشد. فرض کنید متغیر تصادفی X به هر وجه تاس مربع مقدار آن را منتسب می کند.
- امید ریاضی X را به دست آورید.

خطی بودن امید ریاضی

- امید ریاضی عملگری خطی است.

$$E\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i E(X_i)$$

- اثبات:

$$E\left(\sum_i X_i\right) = \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) \sum_i X_i(\omega)$$

$$= \sum_i \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)\, X_i(\omega) = \sum_i E(X_i)$$

استقلال متغیرهای تصادفی
(Independence of Random Variables)

- دو متغیر تصادفی X و Y را مستقل گوییم هرگاه برای هر دو عدد حقیقی x و y داشته باشیم:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

- توجه کنید که X=x و Y=y دو رخداد هستند.

مطالعه بیشتر

- فصل اول کتاب «نظریه احتمال و کاربرد آن» نوشته دکتر سید تقی اخوان نیاکی