برنامه‌نویسی و استقرای ریاضی

Programming and Mathematical Induction

مدرس:

سید کمال‌الدین غیاثی شیرازی

مرور استقرای ریاضی

$P(n)$

گزاره نما

گزاره

$P(n)$: آرایه A از عنصر اول تا n ام مرتب است.

$P(n)$: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

گام ابتدایی: $P(0)$ را مستقیماً ثابت می‌کنیم

گام استقرایی: فرض می‌کنیم $P(k)$ برقرار است، نشان می‌دهیم که $P(k+1)$ نیز برقرار است.

$$P(0) \to P(1) \to P(2) \to \dots \to P(n) \to \dots$$

تعمیم‌های استقرای ریاضی

شروع استقرای ریاضی از عددی بزرگ‌تر از ۲

گام ابتدایی: $p(0)$، $p(1)$، $\vdots$، $p(b)$ را مستقیماً ثابت می‌کنیم

گام استقرایی: با فرض اینکه $k > b$ ، $p(k)$ را فرض می‌کنیم

و $p(k+1)$ را ثابت می‌کنیم.

$2 \quad 3 \quad 2+2 \quad 5 \quad 3+3 \quad 5+2 \quad 5+3 \quad 5+2+2 \quad 5+5$

$2, 3, 5$

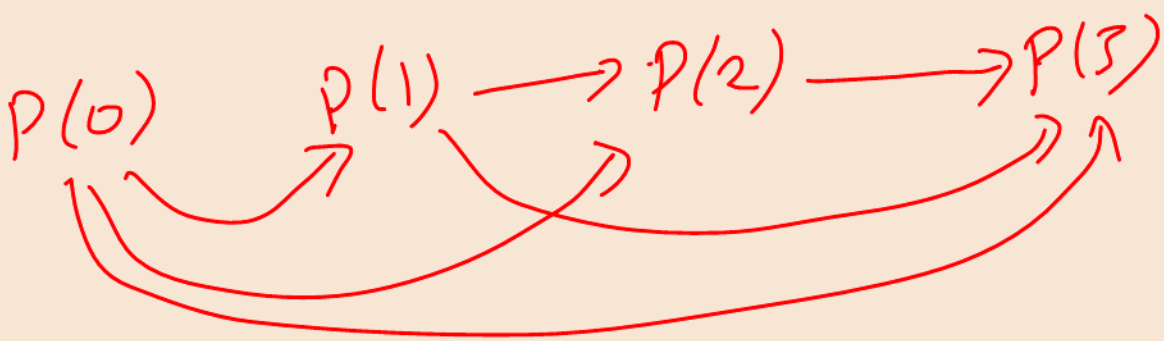
$\ast$

تعمیم‌های استقرای ریاضی

استقرای ریاضی قوی

گام ابتدایی: مثل قبل

گام استقرایی: فرض می‌کنیم $P(0), P(1), \dots, P(k)$ برقرار است، ثابت می‌کنیم $P(k+1)$ نیز برقرار است.



تعمیم‌های استقرای ریاضی

چندین حکم که برخی دیگری را نتیجه می‌دهد

$P(k) \to Q(k)$

$Q(k) \to P(k+1)$

$P(n)$

$Q(n)$

$$\begin{tikzcd}
P(0) \arrow[d] & P(1) \arrow[d] & P(2) \arrow[d] & \cdots \\
Q(0) \arrow[ur] & Q(1) \arrow[ur] & Q(2) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

مثال: ثابت کنید $1+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$P(n):\quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

گام ابتدایی: برای $n=0$ حکم را مستقیماً ثابت می‌کنیم. برای $n=0$ سمت چپ برابر صفر است و سمت راست نیز صفر است $\Rightarrow$ $P(0)$ برقرار است.

گام استقرایی: فرض کنیم $P(k)$ برقرار است، یعنی

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

نشان می‌دهیم $P(k+1)$ نیز برقرار است، یعنی

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 \underset{\text{طبق فرض استقرا}}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

در رابطه ۱

$$= \frac{(k+1)\left(k(2k+1) + 6k + 6\right)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

بنابراین $P(k+1)$ برقرار است.

از آنجا که هم گام ابتدایی و هم گام استقرایی اثبات شد، طبق اصل استقرا $P(n)$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است.

[illegible]

استقرای ریاضی و حلقه تکرار

Loop Invariance

$P(1) \to P(2) \to P(3) \dots \to P(n) \to P(n+1)$

for $i = 1$ to n

$P(i)$

فرض: $P(i)$

دستورات

$P(i+1)$

اثبات درستی الگوریتم

طراحی الگوریتم

اثبات درستی الگوریتم مرتب‌سازی درجی با استقرا

P(n) : آرایه A از خانه 1 تا n مرتب است (شامل n عنصر اول آرایه A قبل از اجرای الگوریتم است)

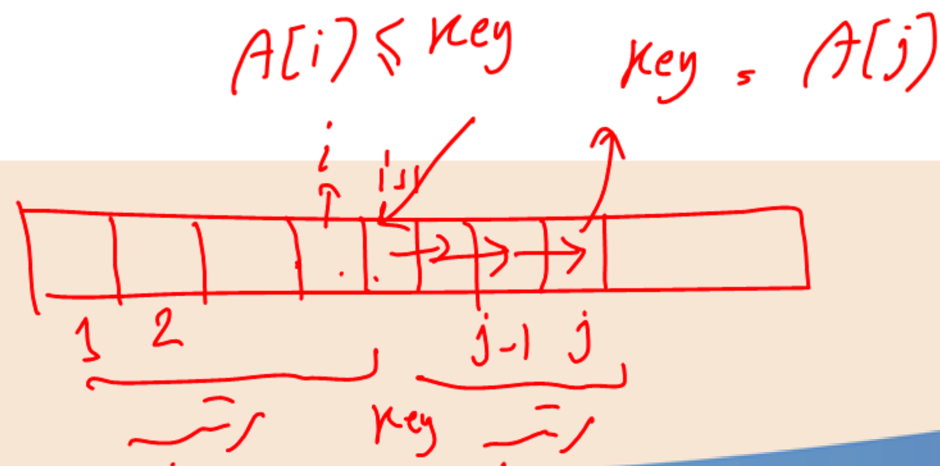
INSERTION-SORT(A)

P(1) برقرار است

فرض می‌کنیم P(j-1) برقرار است

```
for j = 2 to A.length
    key = A[j]
    // Insert A[j] into the sorted sequence A[1 .. j - 1].
    i = j - 1
    while i > 0 and A[i] > key
        A[i + 1] = A[i]
        i = i - 1
    A[i + 1] = key
```

باید ثابت کنیم ← P(j)



استقرای ریاضی و توابع بازگشتی

$[0], 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$

$ 1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 6 \;\; \dots$

$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

```
f(n)
    if n < 3
        return 1
    else
        return f(n-1) + f(n-2)
```

$$\overbrace{f(n-1)}^{f_{n-1}} + \overbrace{f(n-2)}^{f_{n-2}}$$

ابتدای استقرا

گام استقرا

برمی‌گرداند

$p(1)$
$p(2)$

اثبات:

گام ابتدایی:

گام استقرایی:

$p(n)$: تابع f برای ورودی n مقدار n امین عدد در دنباله فیبوناچی را

$p(1)$ و $p(2)$ برقرارند.

اثبات درستی تابع بازگشتی محاسبه دنباله فیبوناچی

$P(n)$: تابع $f(.)$ برای ورودی n مقدار f_n را برمی‌گرداند.

گام ابتدایی: با توجه به شرط $if\ (n<3)$ برای $n=1$ و $n=2$ تابع مقدار 1 را برمی‌گرداند که برابر f_1 و f_2 نیز هست $\Leftarrow$ $P(1)$ و $P(2)$ برقرار است.

گام استقرایی: طبق فرض استقرای قوی، $k\geq 3$ $P(1)$, ..., $P(k-1)$ برقرار است

یعنی $f(k-1)=f_{k-1}$, ..., $f(1)=f_1$. نشان می‌دهیم $P(k)$، یعنی $f(k)=f_k$

با توجه به اینکه $k\geq 3$ که else اجرا می‌شود و داریم

$$f(k) = f(k-1) + f(k-2) \underbrace{=}_{\text{طبق فرض استقرا}} f_{k-1} + f_{k-2} \underbrace{=}_{\text{طبق تعریف دنباله فیبوناچی}} f_k$$

$\Leftarrow$ $P(k)$ اثبات شد.