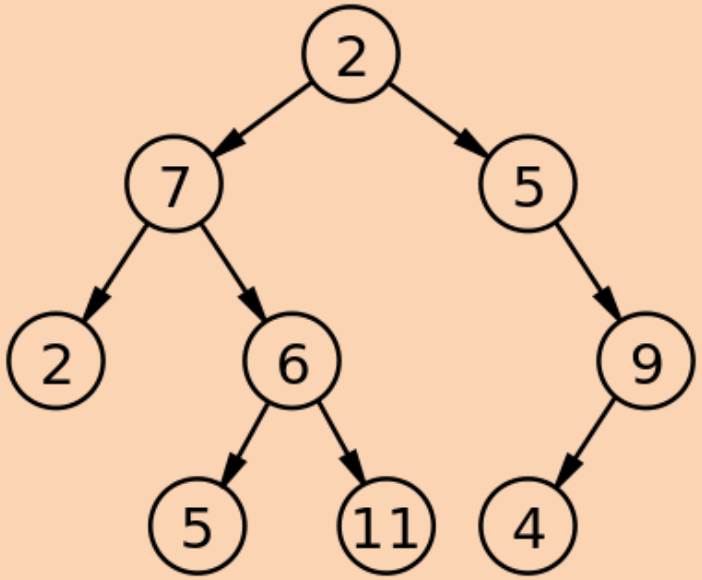
ساختمان‌های داده

مرتب‌سازی سریع

QuickSort



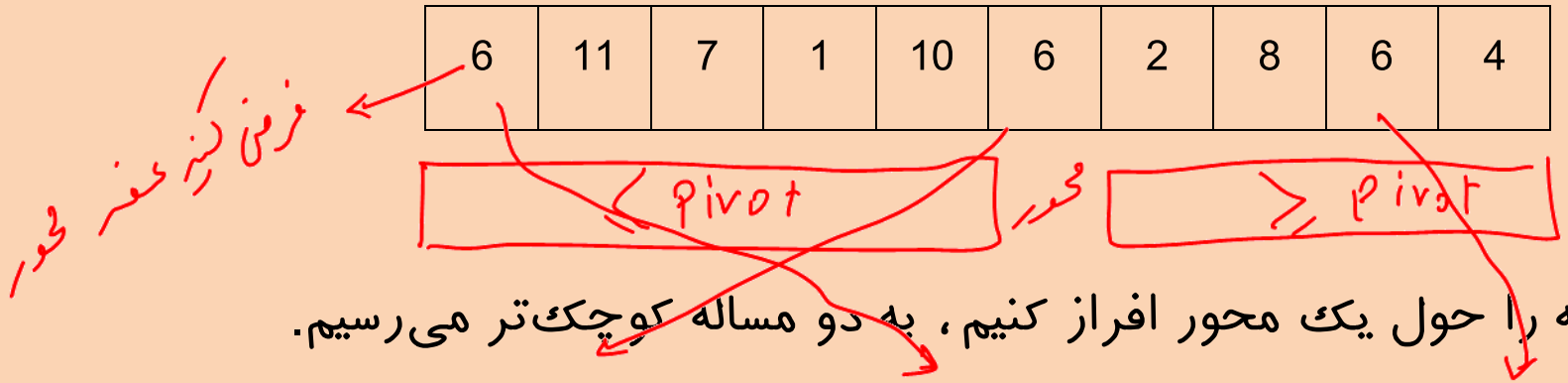
مدرس:

سید کمال الدین غیاثی شیرازی

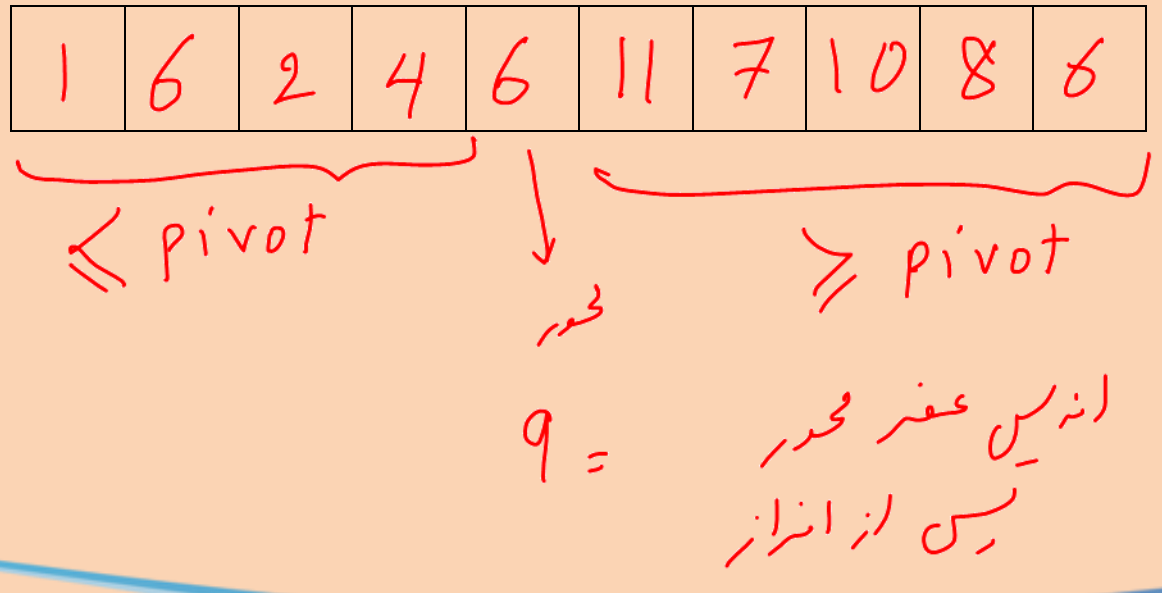
ایده اصلی

partition pivot

- اگر عناصر آرایه را حول یک محور افراز کنیم، به دو مساله کوچک‌تر می‌رسیم.

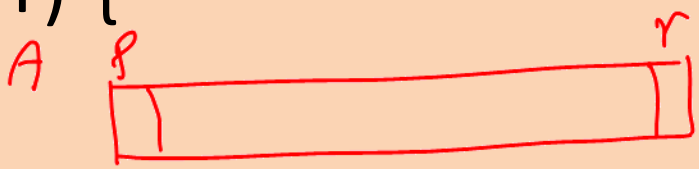


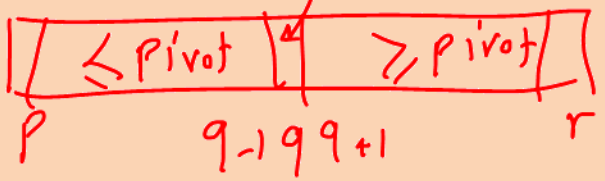
- اگر عناصر آرایه را حول یک محور افراز کنیم، به دو مساله کوچک‌تر می‌رسیم.



الگوریتم مرتب‌سازی سریع معمولی (با افراز دوراهه)

```
void QuickSort(int A[],int p, int r) {
    if (r > p)     {
        int pivot = ChoosePivot(A, p, r)
        q = Partition (A, p, r, pivot)
        QuickSort (A, p, q-1);
        QuickSort (A, q+1, r);
    } else { }
}
```





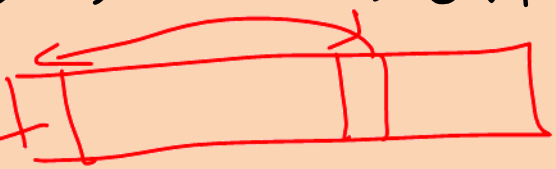
QuickSort

پیاده سازی دیگری برای

```
QuickSort(A, p, r)
    if p < r
    |   ChoosePivot(A, p, r)        محور به ابتدای آرایه می آید
    |   q ← Partition(A, p, r)
        QuickSort(A, p, q-1)
        QuickSort(A, q+1, r)
```

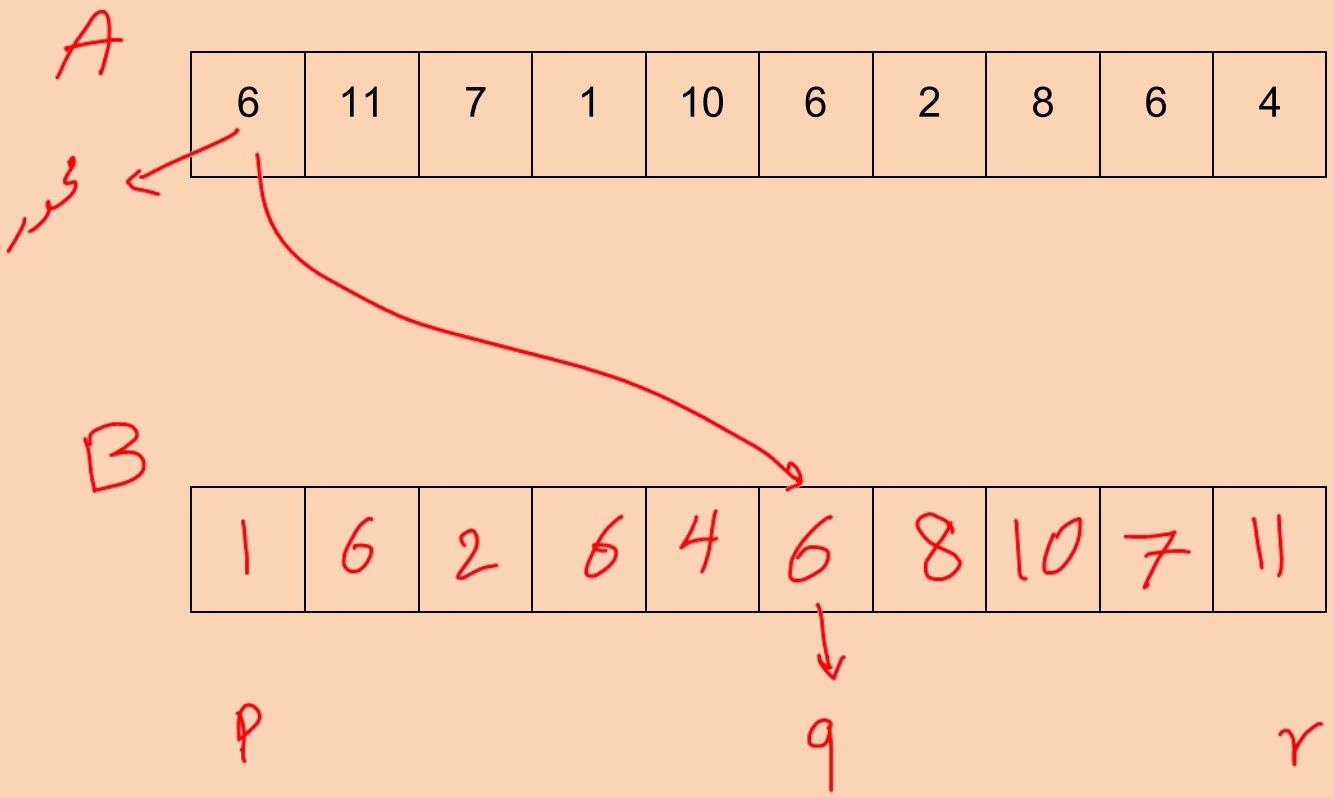
انتخاب محور (ChoosePivot)

- ایده آل این است که اندازه آرایه چپ و راست مساوی باشد.
  - روش اول: انتخاب سمت چپ‌ترین داده
  - روش دوم: انتخاب میانه عناصر چپ، وسط و آخر
  - روش سوم (برگزیده): انتخاب یک عنصر به صورت تصادفی
- فرض می‌کنیم پس از انتخاب عنصر محور، محل آن با عنصر اول آرایه عوض می‌شود.



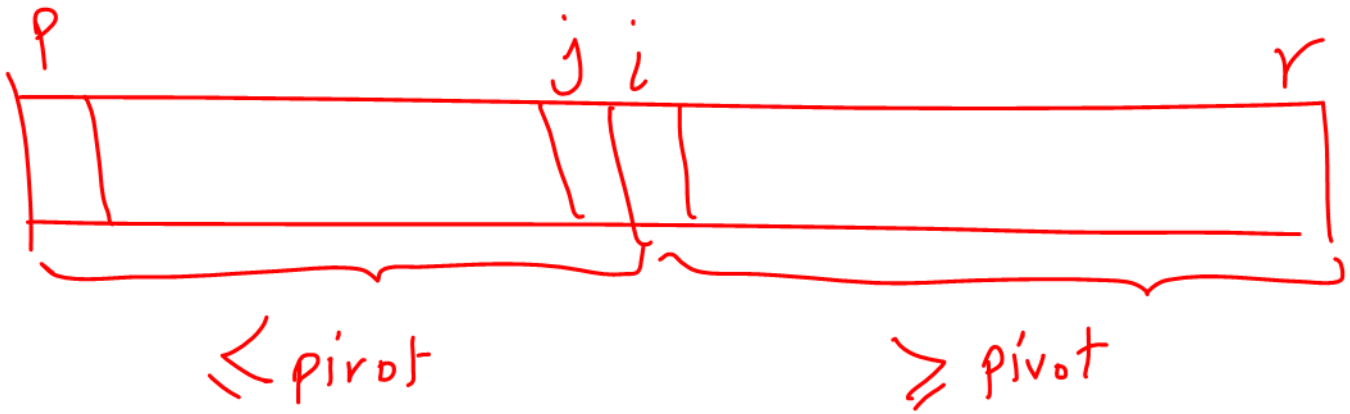
- زمان اجرای تابع ChoosePivot از مرتبه $\Theta(1)$ است.

الگوریتم افراز با استفاده از حافظه کمکی



الگوریتم اول افراز درجا

```
Partition (Array A, int p, int r)
    pivot = A[p];        i=p+1;      j=r;
    while (1)
        while (i ≤ j && A[i] ≤ pivot) i++
        while (i ≤ j && A[j] ≥ pivot) j--
        if (i < j)
            swap (A[i], A[j])
            continue
        else
            break
    swap (A[i-1], A[p])   // or exchange (A[j], A[p])
```



با اجرای دستور

$A[p] \leftrightarrow A[j]$

را

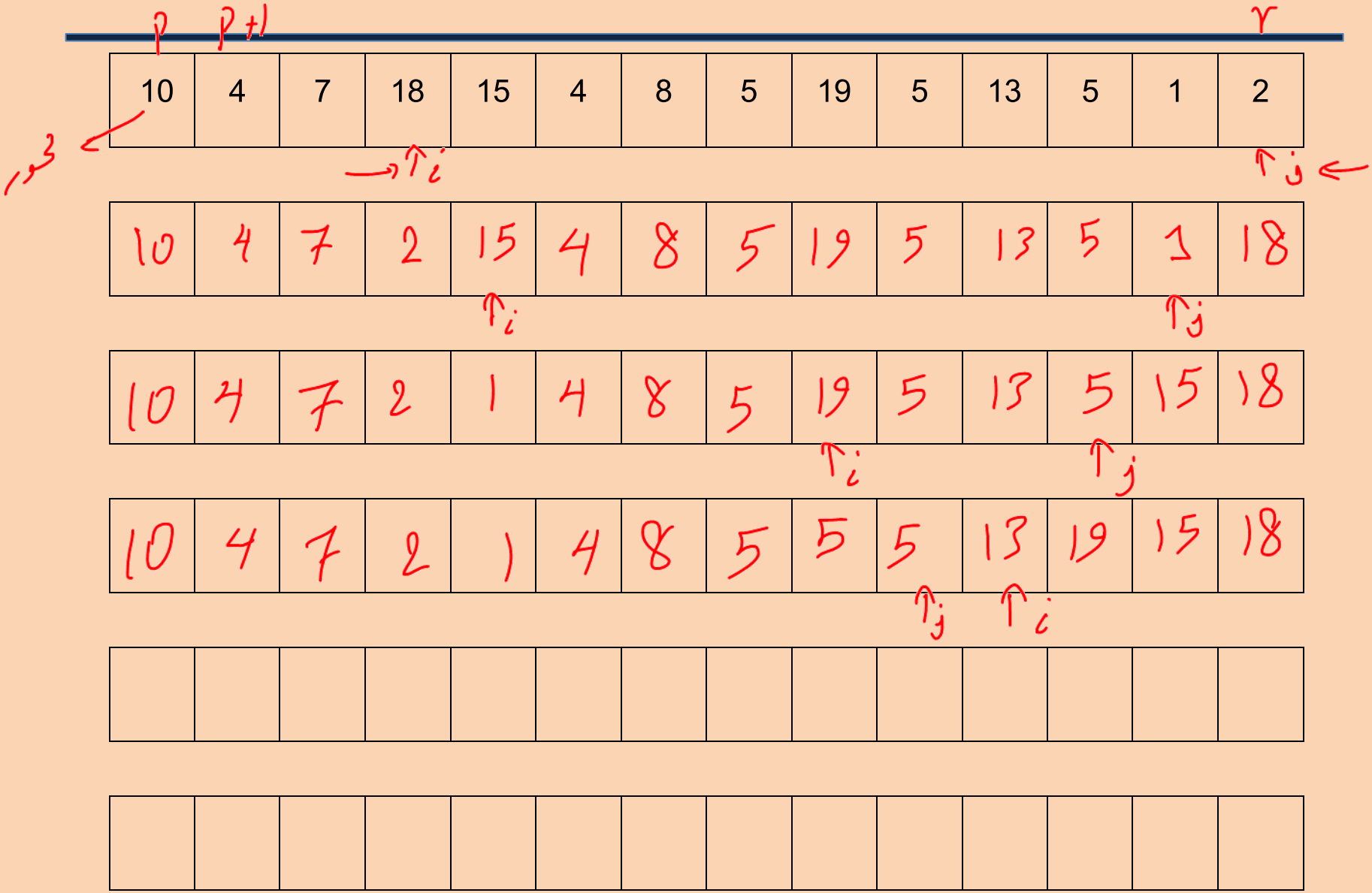
عناصر بعد از خانه ی ام بزرگتر مساوی محور

خانه ی ام مساوی محور

و عناصر قبل از خانه ی ام کوچکتر مساوی محور خواهند بود

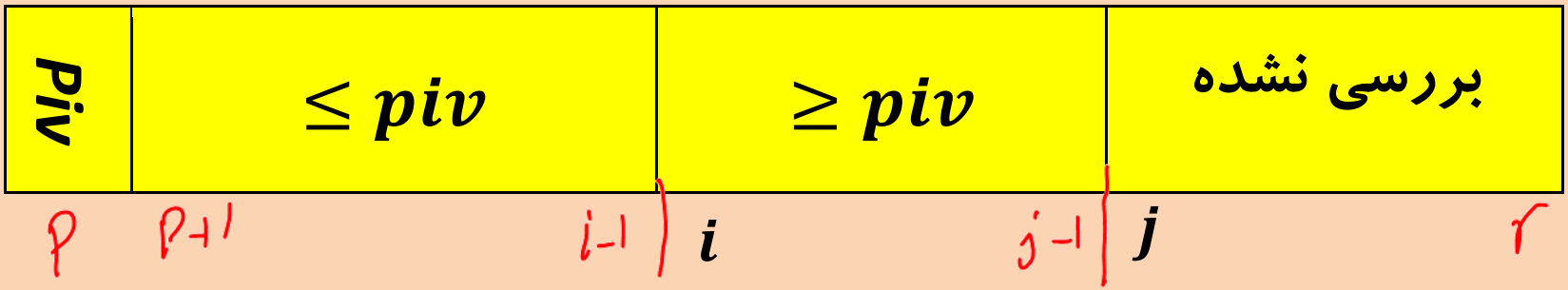
$q = j$

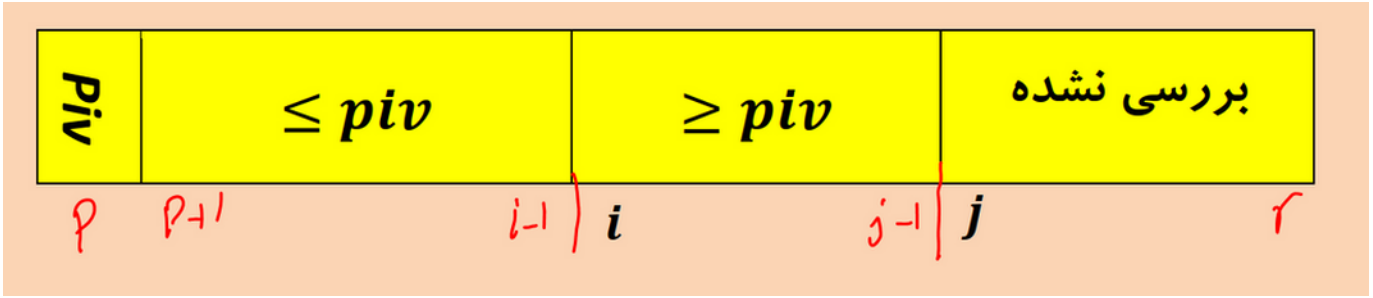
اجرای الگوریتم اول افراز درجا روی یك مثال



الگوریتم CLRS برای افراز درجا

- به نحوی عمل می کنیم که همواره داشته باشیم:
  - عنصر اول آرایه محور است
  - از عنصر دوم تا عنصر $i-1$ کوچک تر مساوی محور هستند.
  - از عنصر i تا $j-1$ بزرگ تر و یا مساوی محور هستند.
  - عناصر j تا انتهای آرایه هنوز بررسی نشده‌اند.





$i = p+1$

$j = p+1$

for $j = p+1$ to r

if $A[j] < pivot$

$A[i] \leftrightarrow A[j]$

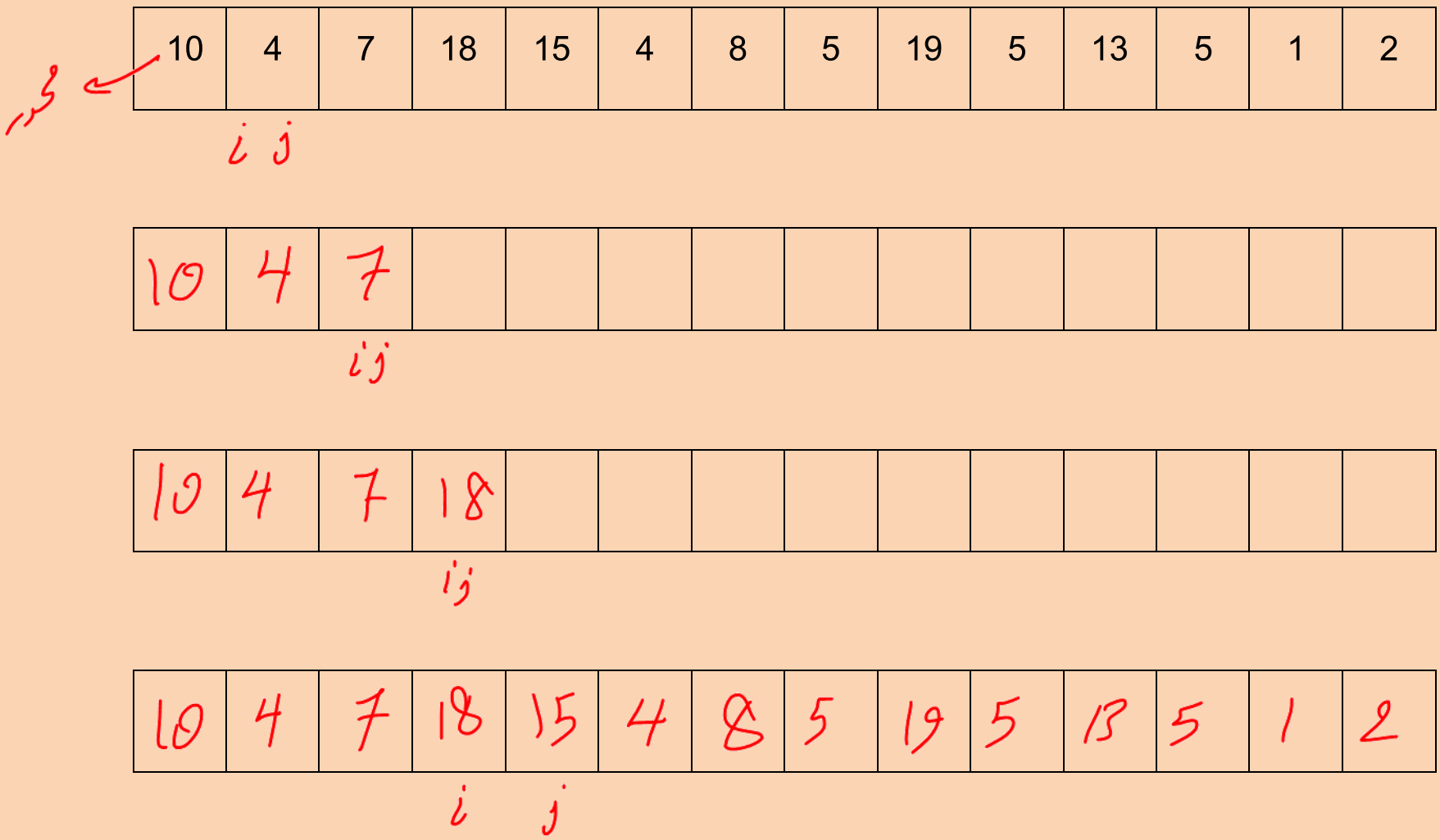
$i++$

$A[p] \leftrightarrow A[i-1]$

الگوریتم CLRS برای افراز درجا

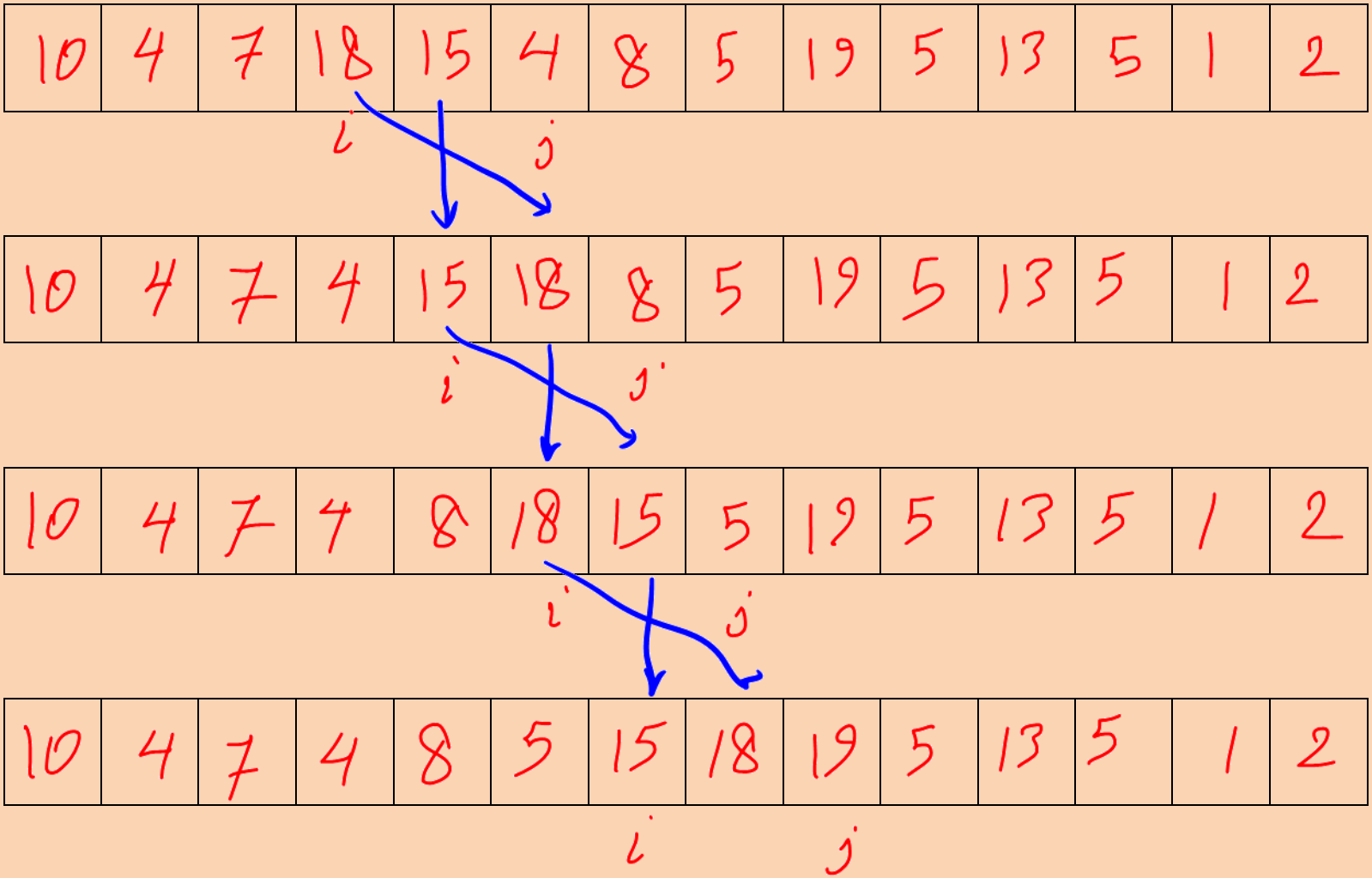
```
Partition (A, p, r)
    pivot = A[p];
    i = p+1;
    for j=p+1 to r
        if (A[j] < pivot)
            swap A[j] and A[i]
            i = i + 1
    swap A[p] and A[i-1]
```

اجرای الگوریتم دوم افراز درجا روی یك مثال



اجرا

10	4	7	18	15	4	8	5	19	5	13	5	1	2
			i	j									



ه)

10	4	7	4	8	5	15	18	19	5	13	5	1	2
						i		j					

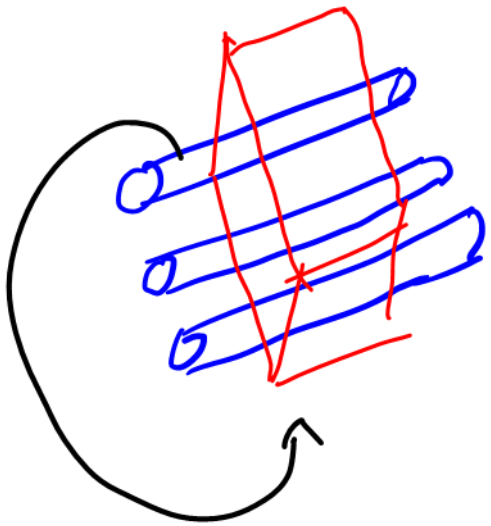
اج

10	4	7	4	8	5	15	18	19	5	13	5	1	2
						i			j				

10	4	7	4	8	5	5	18	19	15	13	5	1	2
							i			j			

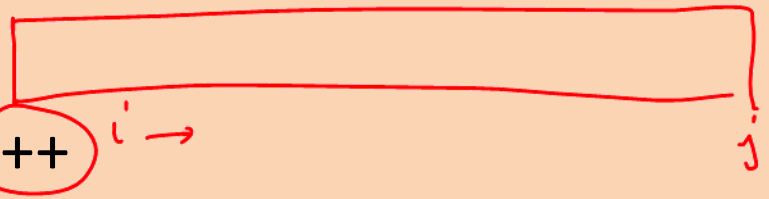
							18	19	15	13	5		
							i				j		

10	4	7	4	8	5	5	5	19	15	13	18	1	2
								i				j	



پیچیدگی زمانی الگوریتم افراز اول

```
Partition (Array A, int p, int r)
    pivot = A[p];        i=p+1;      j=r;
    while (1)
        while (i ≤ j && A[i] ≤ pivot) i++
        while (i ≤ j && A[j] > pivot) j--
        if (i < j)
            swap (A[i], A[j])
            continue
        else
            break
    swap (A[i-1], A[p])   // or exchange (A[j], A[p])
```



$\Theta(1)$

$\Theta(1)$

تعداد عملیات = تعداد دفعات افزایش i + تعداد دفعات کاهش j

$= \Theta(r-p)$ = اندازه آرایه

پیچیدگی زمانی الگوریتم افراز دوم

```
Partition (A, p, r)
    pivot = A[p];
    i = p+1;
    for j=p+1 to r
        if (A[j] < pivot)
            swap A[j] and A[i]
            i = i + 1
    swap A[p] and A[i-1]
```

$\theta(1)$

$\theta(r-p)$

$= \theta(\text{اندازه آرایه})$

کدام روش افراز سریع تر است؟ نتایج برای ۱۰۰ میلیون داده

```
Number of exchanges in TwoWayPartition_Classic is: 841333 in 0.13325 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_CLRS is: 841795 in 0.1375 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_Classic is: 138571612 in 0.68075 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_CLRS is: 403618897 in 0.6825 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_Classic is: 77341450 in 0.817625 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_CLRS is: 123163873 in 0.8195 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_Classic is: 166895617 in 1.09387 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_CLRS is: 212783122 in 1.16983 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_Classic is: 131735908 in 1.41138 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_CLRS is: 164367931 in 1.47508 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_Classic is: 25954414 in 1.58571 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_CLRS is: 27329941 in 1.64275 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_Classic is: 159295162 in 2.29171 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_CLRS is: 360034576 in 2.27675 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_Classic is: 195602116 in 2.77971 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_CLRS is: 300533908 in 2.88725 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_Classic is: 125342662 in 3.43971 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_CLRS is: 300833719 in 5.96825 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_Classic is: 146102869 in 3.75021 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_CLRS is: 192412408 in 6.2385 seconds.

Total Number of exchanges in TwoWayPartition_classic is: 464439328
Total Number of exchanges in TwoWayPartition_CLRS is: 1494261673
Total time of TwoWayPartition_classic in seconds is: [illegible]
Total time of TwoWayPartition_CLRS in seconds is: [illegible]
```

کدام روش افراز سریع تر است؟ نتایج برای یک میلیون داده

```
Number of exchanges in TwoWayPartition_Classic is: 827413 in 0.00110375 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_CLRS is: 970132 in 0.000941675 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_Classic is: 79568401 in 0.00264613 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_CLRS is: 80963758 in 0.00248167 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_Classic is: 84057124 in 0.00453648 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_CLRS is: 91445716 in 0.00422383 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_Classic is: 35681668 in 0.00570725 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_CLRS is: 32743474 in 0.00549934 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_Classic is: 115473745 in 0.00876841 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_CLRS is: 115454239 in 0.00857934 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_Classic is: 125928451 in 0.0125852 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_CLRS is: 121425397 in 0.0125833 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_Classic is: 64025059 in 0.0141237 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_CLRS is: 65155684 in 0.0140962 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_Classic is: 21221044 in 0.0152523 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_CLRS is: 20152330 in 0.0152853 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_Classic is: 41234206 in 0.0164689 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_CLRS is: 43807750 in 0.016503 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_Classic is: 108347008 in 0.0187647 seconds.
Number of exchanges in TwoWayPartition_CLRS is: 117391507 in 0.0186629 seconds.

Total Number of exchanges in TwoWayPartition_classic is: 3893599
Total Number of exchanges in TwoWayPartition_CLRS is: 12370477
Total time of TwoWayPartition_classic in seconds is: 0.0187647
Total time of TwoWayPartition_CLRS in seconds is: 0.0186629
```

صرف ۳ برابر CLRS جابجایی دارد.

یادآوری الگوریتم مرتب‌سازی سریع

```
void QuickSort(int A[],int p, int r) {
    if (r > p)     {
        int pivot = ChoosePivot(A, p, r)
        q = Partition (A, p, r, pivot)
        QuickSort (A, p, q-1);
        QuickSort (A, q+1, r);
    }
}
```

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n \le 1 \\ n + T(q-p) + T(r-q) & n \ge 2 \end{cases}$$

پیچیدگی زمانی الگوریتم مرتب‌سازی سریع در بدترین حالت

بدترین حالت برای الگوریتم QuickSort این است که پس از افراز یک زیر لیست تهی نشود ⇐ طول آرایه فقط یکی کم می‌شود ⇐

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 1 \\ \underbrace{n + T(0)}_{\Theta(n)} + T(n-1) & n \geq 2 \end{cases}$$

$$T(n) = n + T(n-1) = n + [(n-1) + T(n-2)]$$

$$= n + (n-1) + (n-2) + T(n-3) = \cdots = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \Theta(n^2)$$

پیچیدگی زمانی الگوریتم مرتب‌سازی سریع در صورت نصف شدن داده‌ها در هر افراز

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 1 \\ n + T(n/2) + T(n/2) & n \geq 2 \end{cases}$$

n: ① d

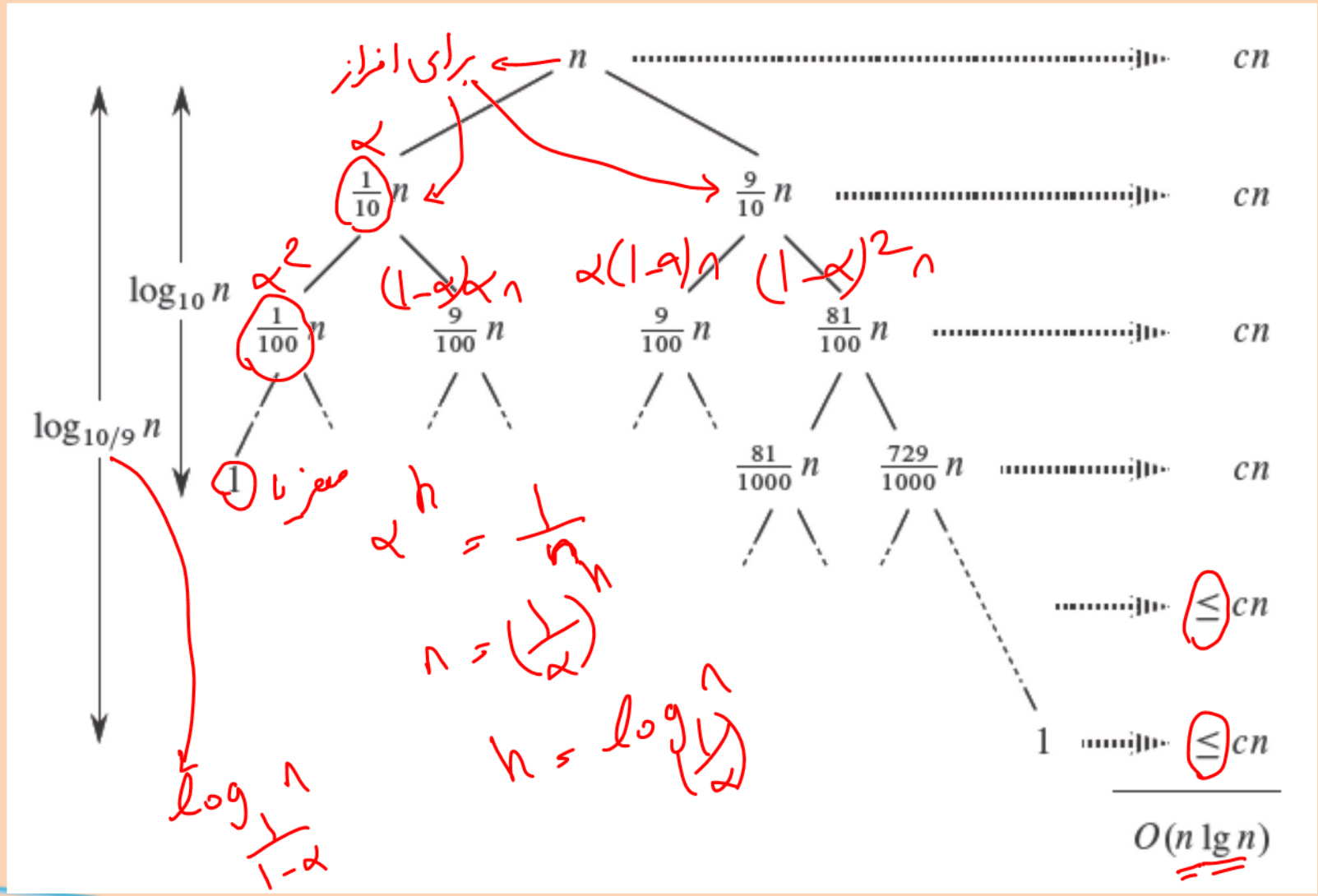
$T(n/2) + T(n/2)$: ② $T(n/2)$ — a — b

قضیه اصلی

$$\log_b^a = d$$

$$T(n) \in \Theta(n \log n) \Leftarrow \log_2^2 = 1 = d$$

پیچیدگی زمانی الگوریتم مرتب‌سازی سریع در صورتی که افراز کوچک‌تر داده‌ها حداقل α قسمت از داده‌ها باشد



زمان اجرای متوسط الگوریتم مرتب‌سازی سریع

پاسخ: $\theta(n \log n)$

إشکال‌های الگوریتم مرتب‌سازی سریع

- مشکل اول: مشکل افراز دو راهه
  - داده‌های مساوی همه یک سمت قرار می‌گیرند و زمان مرتب‌سازی آنها حتما $\theta(n^2)$ است.
- مشکل دوم: در بدترین حالت به $\theta(n)$ حافظه در پشته نیاز است. هم برای افراز دو راهه و هم برای افراز سه راهه مشکل است
  - از آنجا که حافظه پشته معمولا بسیار محدود است (مثلا حدود ۱ مگابایت)، امکان آنکه اجرای برنامه بخاطر پر شدن پشته با شکست مواجه شود، وجود دارد.
  - **نتیجه:** هرگز از این پیاده‌سازی الگوریتم مرتب‌سازی سریع استفاده نکنید. در صورت لزوم حتما یاد بگیرید که چگونه می‌توان الگوریتم را اصلاح کرد که اندازه پشته $\theta(logn)$ باشد.
- راه حل مشکل اول، افراز سه‌راهه است که تکلیف عناصر مساوی را درجا روشن می‌کند.

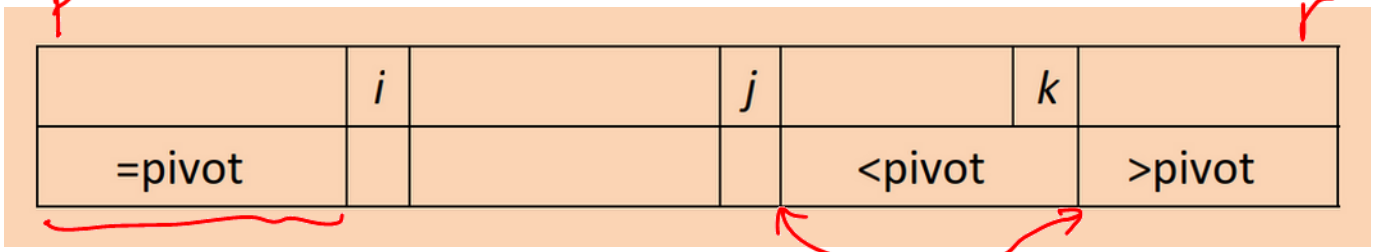
الگوریتم افراز سه‌راهه
(گرفته شده از درس آقای Sedgwick – دانشگاه پرینستون)

به نحوی عمل می کنیم که همواره داشته باشیم:

- عناصر اول تا i-1 ام آرایه برابر محور هستند.
- از عنصر k+1 تا انتهای آرایه بزرگ تر از محور هستند.
- از عنصر j+1 تا عنصر k کوچک تر از محور هستند.
- عناصر i تا j آرایه هنوز بررسی نشده اند.

	i		*j*		*k*	
=pivot				<pivot		>pivot

A[p] = pivot



$i = p+1$

$k = r$

$j = r$

شرط ابتدایی استقرا

while ($i \leq j$)

if (A[j] < pivot)

j--

elif (A[j] == pivot)

swap A[j], A[i]

i++

else // A[j] > pivot

swap A[j], A[k]

k--

j--

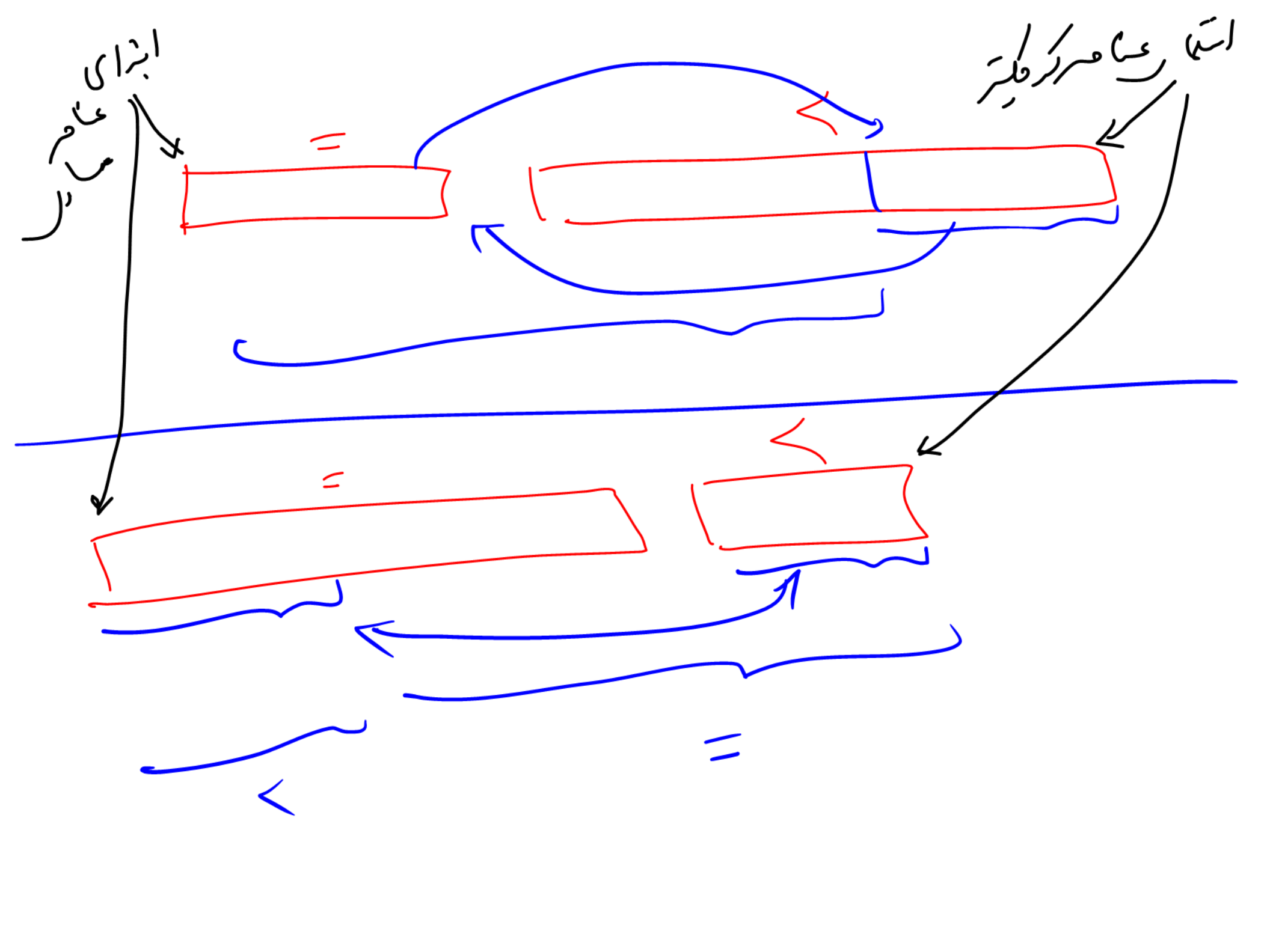
الگوریتم افراز سه‌راهه

(گرفته شده از درس آقای Sedgwick – دانشگاه پرینستون)

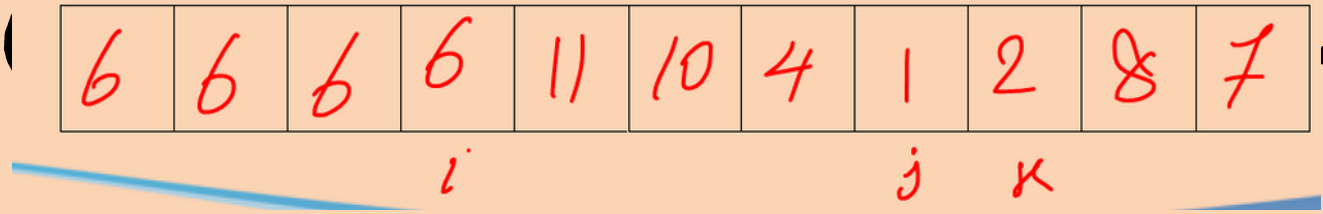
```
Partition (A, p, q)
        pivot = A[p];       i = p+1;    j = q;        k = q;
        while ( j >= i )
            if (A[j] > pivot)
                swap A[j] and A[k];     j = j - 1;  k = k - 1;
            else if (A[j] == pivot)
                swap A[j] and A[i]
                i = i + 1
             else // if (A[j] < pivot)
                j = j - 1
        m = min(i - p, k - j)
        swap A[p,...,p+m-1] and A[k-m+1,..., k]
```

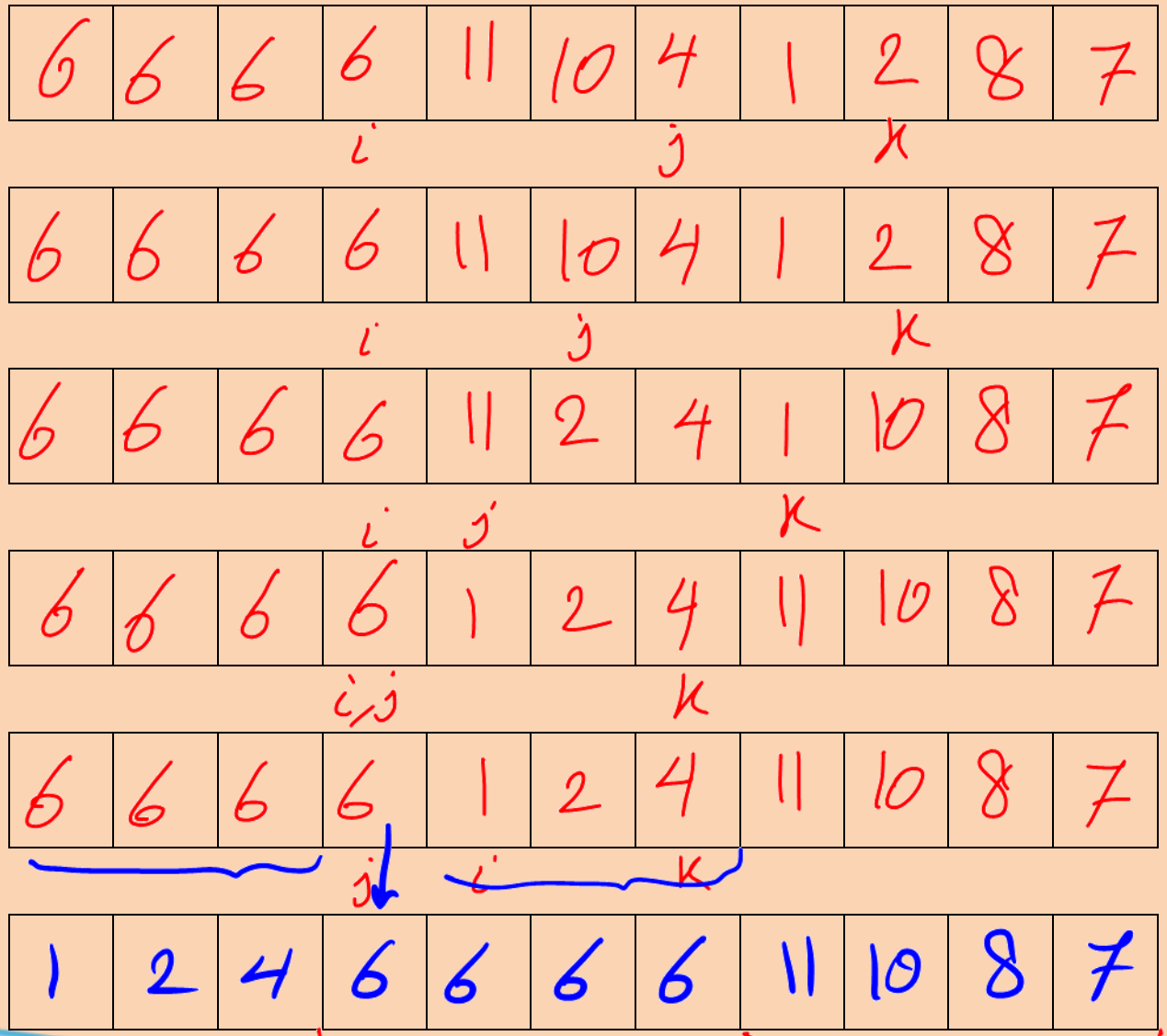
تعداد عناصر مساوی = i - p

تعداد عناصر کوچکتر = k - j


ابتدای عالم مثال
انتهای عالم مثال

مثال از اجرای افراز سه‌راهه به روش اول


6 6 6 6 11 10 4 1 2 8 7
i
j
k


6 6 6 6 11 10 4 1 2 8 7
i
j
k
6 6 6 6 11 10 4 1 2 8 7
i
j
k
6 6 6 6 11 2 4 1 10 8 7
i
j
k
6 6 6 6 1 2 4 11 10 8 7
i,j
k
6 6 6 6 1 2 4 11 10 8 7
j
i
k
1 2 4 6 6 6 6 11 10 8 7

$m = 3$

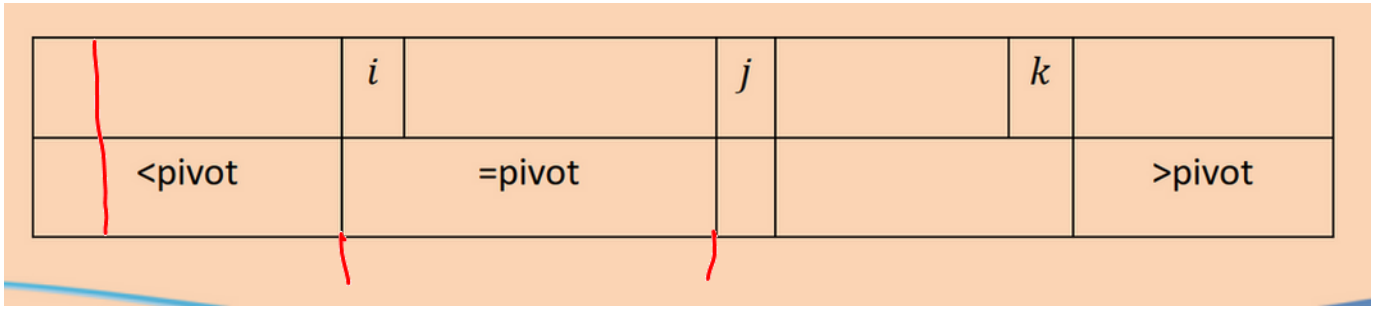
افراز سه راهه الگوریتم دوم

- به نحوی عمل می کنیم که همواره داشته باشیم:
  - عناصر اول تا $i - 1$ ام آرایه کوچکتر از محور هستند.
  - از عنصر $k + 1$ تا انتهای آرایه بزرگ تر از محور هستند.
  - عناصر i تا $j - 1$ آرایه مساوی محور هستند.
  - از عنصر j تا عنصر k هنوز بررسی نشده اند.
  - عنصر j ام در حال بررسی است.

	i		j		k	
<pivot	=pivot					>pivot

$i \leq j$

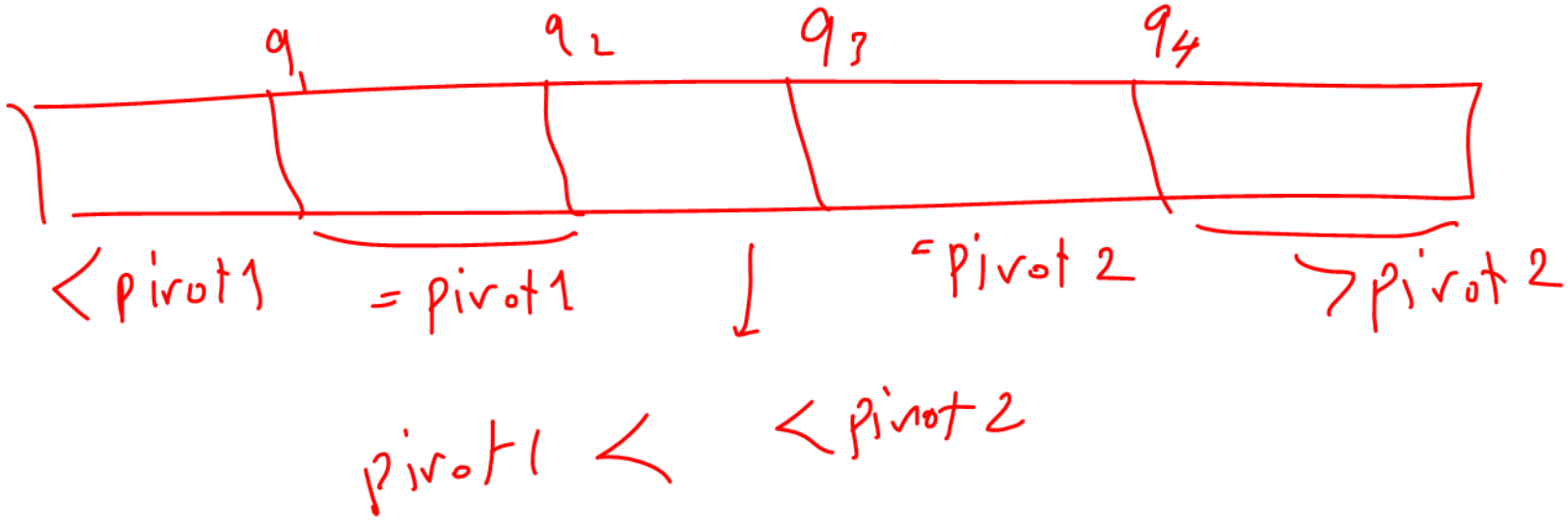
$j \leq k$




```
i = p
k = r
j = p+1
while ( j <= k)
    if (A[j] == pivot)
        j++
    elif (A[j] < pivot)
        A[i] <=> A[j]
        i++
        j++
    else (A[j] > pivot)
        A[k] <=> A[j]
        k--
```

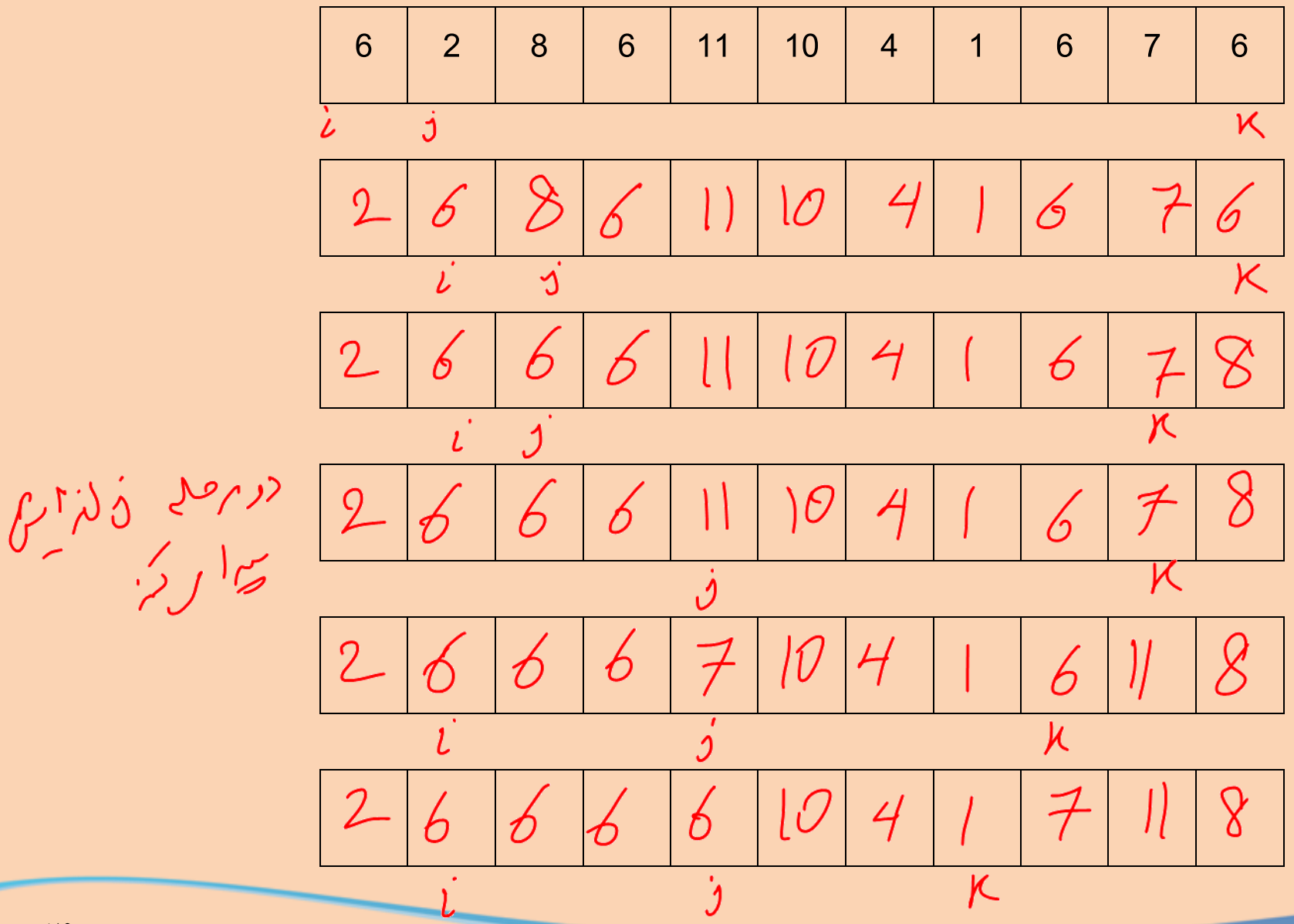
الگوریتم دوم برای افراز سه‌راهه

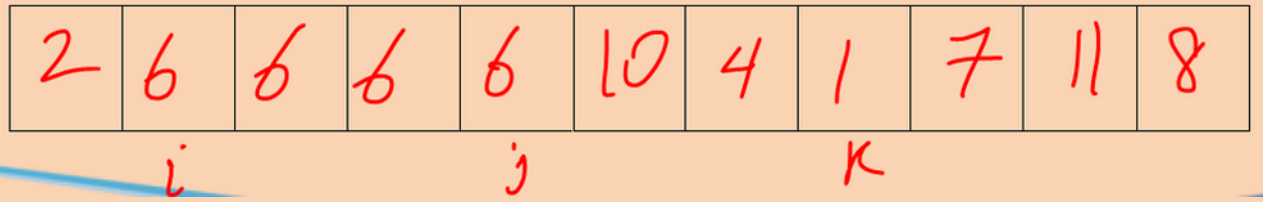
```
Partition (A, pivot, p, q)
        i = p;  j = p;  k = q;
        while ( j <= k )
            if (A[j] > pivot)
                swap A[j] and A[k];     k = k-1;
            else  if (A[j] < pivot)
                swap A[j] and A[i];     i = i+1;      j=j+1;
            else if (A[j] == pivot)
                j = j+1
```

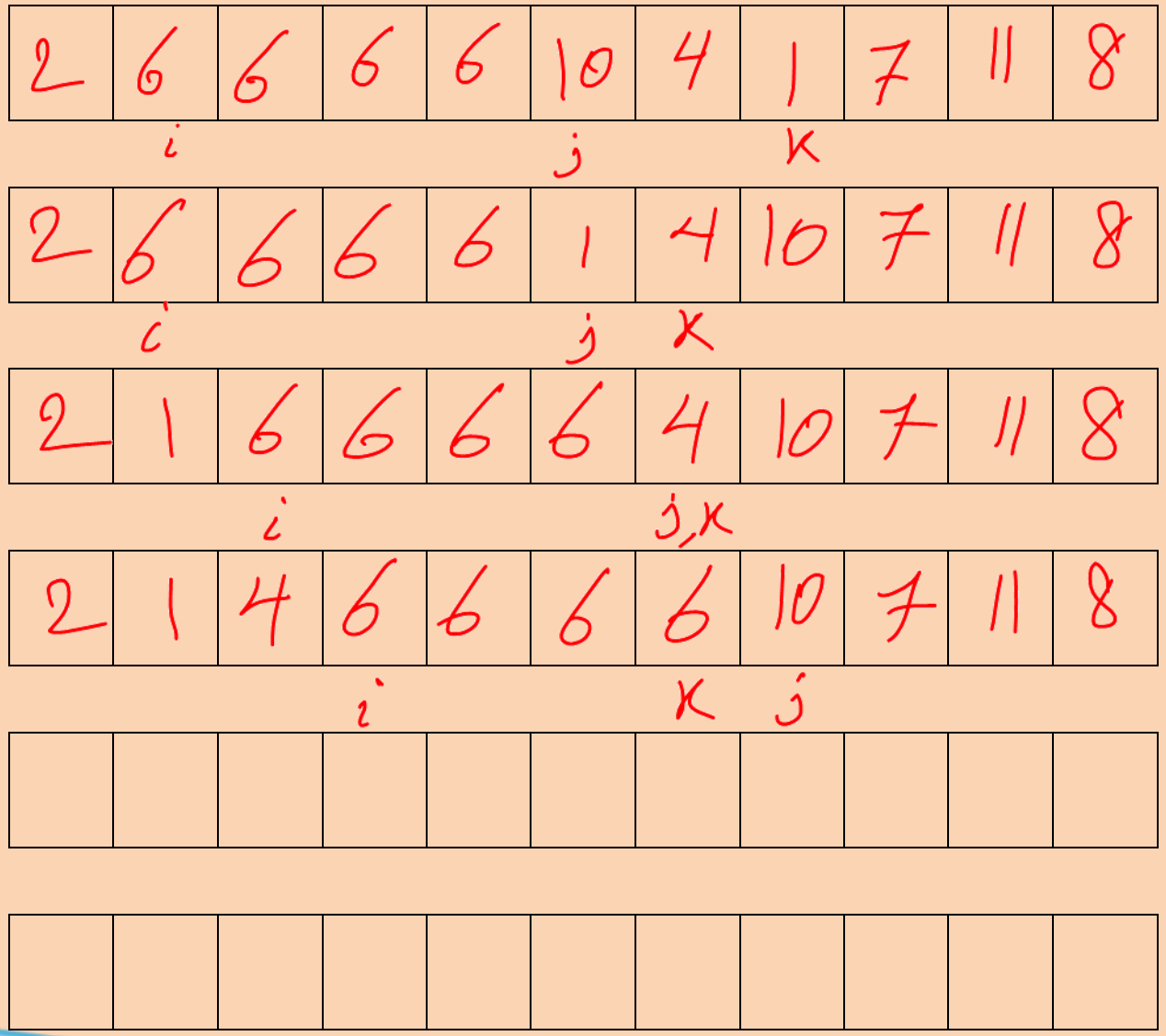


pivot1 < < pivot2

مثال از اجرای افراز سه‌راهه به روش دوم




2 6 6 6 6 10 4 1 7 11 8
i
j
k


2 6 6 6 6 10 4 1 7 11 8
i
j
k
2 6 6 6 6 1 4 10 7 11 8
i
j
k
2 1 6 6 6 6 4 10 7 11 8
i
j,k
2 1 4 6 6 6 6 10 7 11 8
i
k
j

C++ STL sort Function

- برای استفاده از مرتب‌سازی سریع در زبان C++ کافی است از تابع sort استفاده کنید.
- در زبان C تابع qsort با الگوریتم مرتب‌سازی سریع داده‌ها را مرتب می‌کند.