correction d’erreurs en communication, codes de Reed Muller

transition, transformation, conversion

dans quelle mesure l'utilisation de codes correcteurs est pertinente pour la transmission de données ?

- **perturbations :**

1010 $\xrightarrow{\text{bruit}}$ 1110

- **redondance :**

1	$\xrightarrow{\text{codage}}$	11	$\xrightarrow{\text{bruit}}$	10	$\longrightarrow$	?	detecte
		111		101		1	detecte et corrige

- **bit de controle :**

bruit

1010 0 $\longrightarrow$ **1110 0**

1+1 = 2 pair

1+1+1= 3 impair → erreur

- **code de hamming**

structure en carré, placement avisé de plusieurs bits de contrôle

travail sur lignes et colones → localisation de l'erreur

corrige 1 erreur détecte 2 erreurs

distance minimale : d

plus petite distance de hamming entre deux mots distincts du code (nombre de bits qui diffèrent)

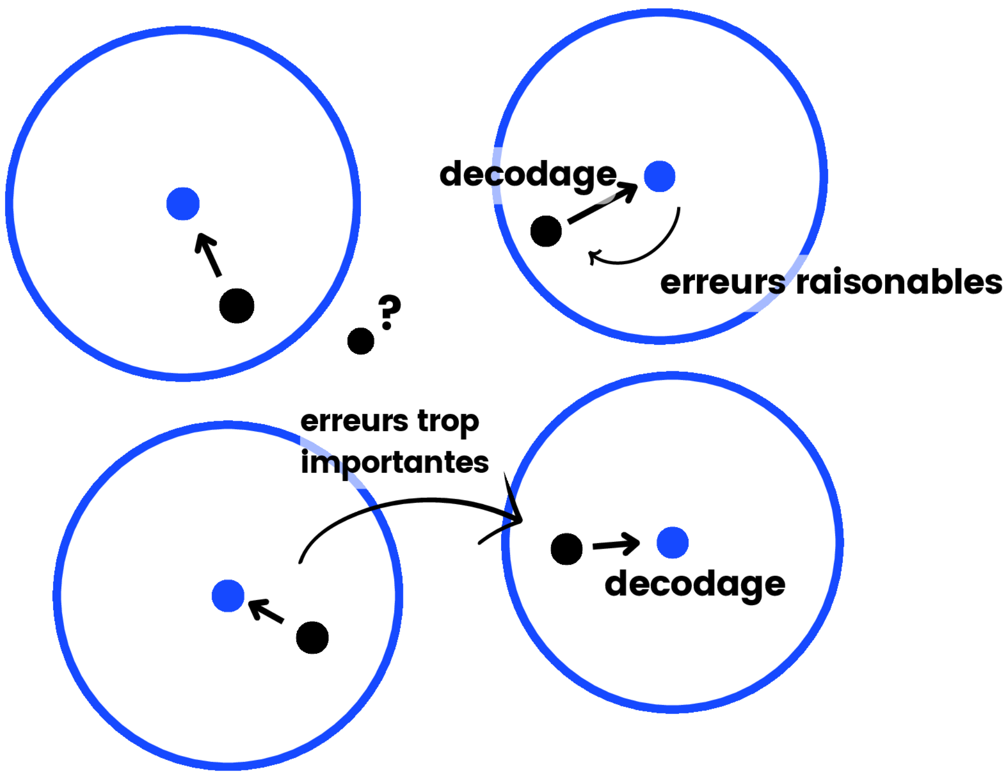
nombre d'erreurs corrigeables : $nb\_e = \lfloor (d-1)/2 \rfloor$

nombre d'erreurs qu'il est possible de corriger

taux d'information :

nombre de bits d'information / nombre de bits total

prendre le message recu et le rapporter au code le plus proche



on considèrera le canal de communication assez fiable pour décoder le message

- **paramètres :**

r → degré , m → nombre de variables

2^m - uplets x1, …, xm

xi : alternance de 0 et 1 tous les $2^{(m-i)}$

pour m = 3

x0 = 1 1 1 1 1 1 1 1

x1 = 0 0 0 0 1 1 1 1

x2 = 0 0 1 1 0 0 1 1

x3 = 0 1 0 1 0 1 0 1

- **RM(1, m) :**

toutes les combinaisons linéaires de 1, x1, …, xm de coefficents a0, …, am

- **base :**

$(\underline{1}, \underline{x1}, \ldots, \underline{xm})$

- **distance :**

$d = 2^{m-1}$

distance minimale de Hamming entre deux codes

- **matrice generatrice :**

$$\begin{bmatrix} \underline{1} \\ \underline{x1} \\ \ldots \\ \underline{xm} \end{bmatrix}$$

- **erreurs corrigeables :**

$\lfloor 2^{m-1}-1 / 2 \rfloor$

- **taux d'information**

$m+1 \ / \ 2^m$

message à encoder : $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$

l'encodage $\underline{c} \rightarrow 2^m$-uplet qui correspond à la combinaison linéaire des 2^m mots binaires dans l'ordre lexicographique pondérée par les ai

colonnes de la matrices génératrice $\rightarrow$ tous ces mots binaires

i allant de 0 à m : $c_i = a_0 + a_1\underline{x1}[i] + \ldots + a_m\underline{xm}[i]$

$$\underline{c} = [c_0, \ldots, c_m] = [a_0, \ldots, a_m] \begin{bmatrix} \underline{x0}[0] & \ldots & \underline{x0}[2^m-1] \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \underline{xm}[0] & \ldots & \underline{xm}[2^m-1] \end{bmatrix}$$

décoder ai : r le mot reçu   i : 1 à m

sommer r[a] et r[b] tel qu'ils correspondent à des paires identiques sauf à la i^e position

ex 1110 et 1100 (2^{m-1} mots de ce type)

ici a2 = r[a] + r[b]
=(a0•1 + a1•1 + a2•1 + a3•0) + (a0•1 + a1•1 + a2•0 + a3•0)
= 0 + 0 + a2 + 0
si il n'y a pas eu d'erreur

vote de majorité sur les 2^{m-1} ai que l'on a calculé on a maintenant a1 … am et $\underline{r}$

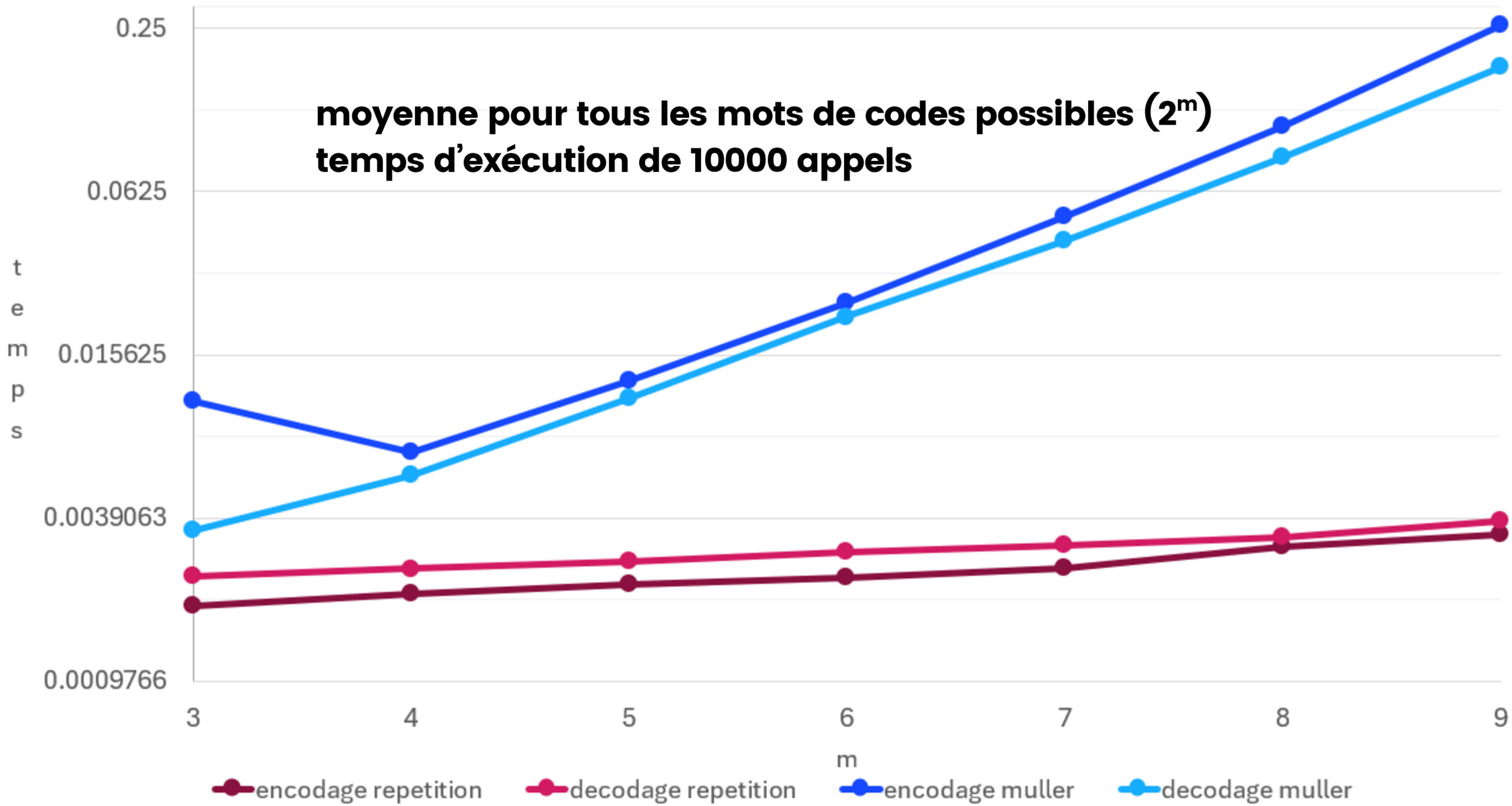
décoder a0 :

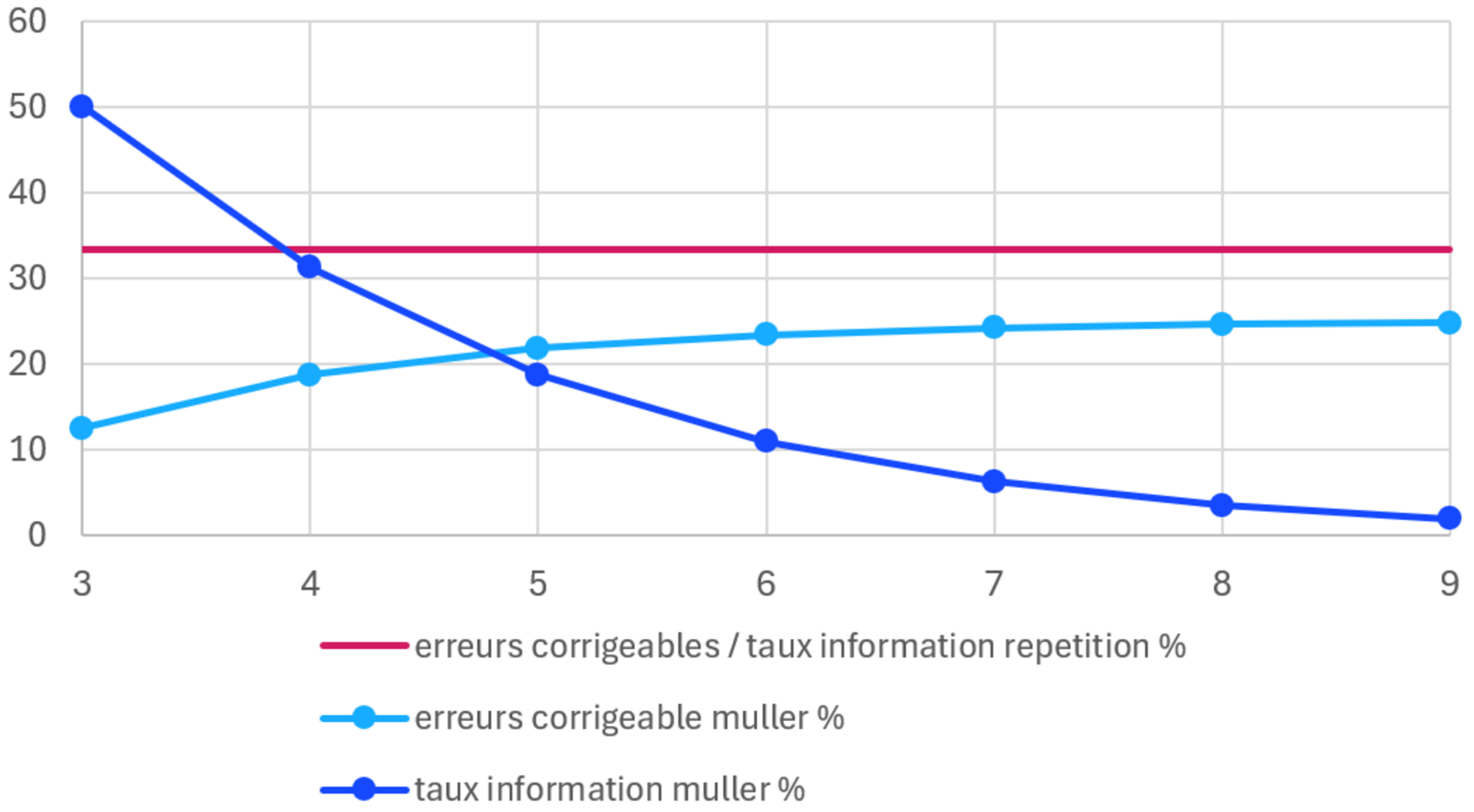
$$\underline{r}[i] = a0 + a1\underline{x1}[i] + \ldots + am\underline{xm}[i]$$

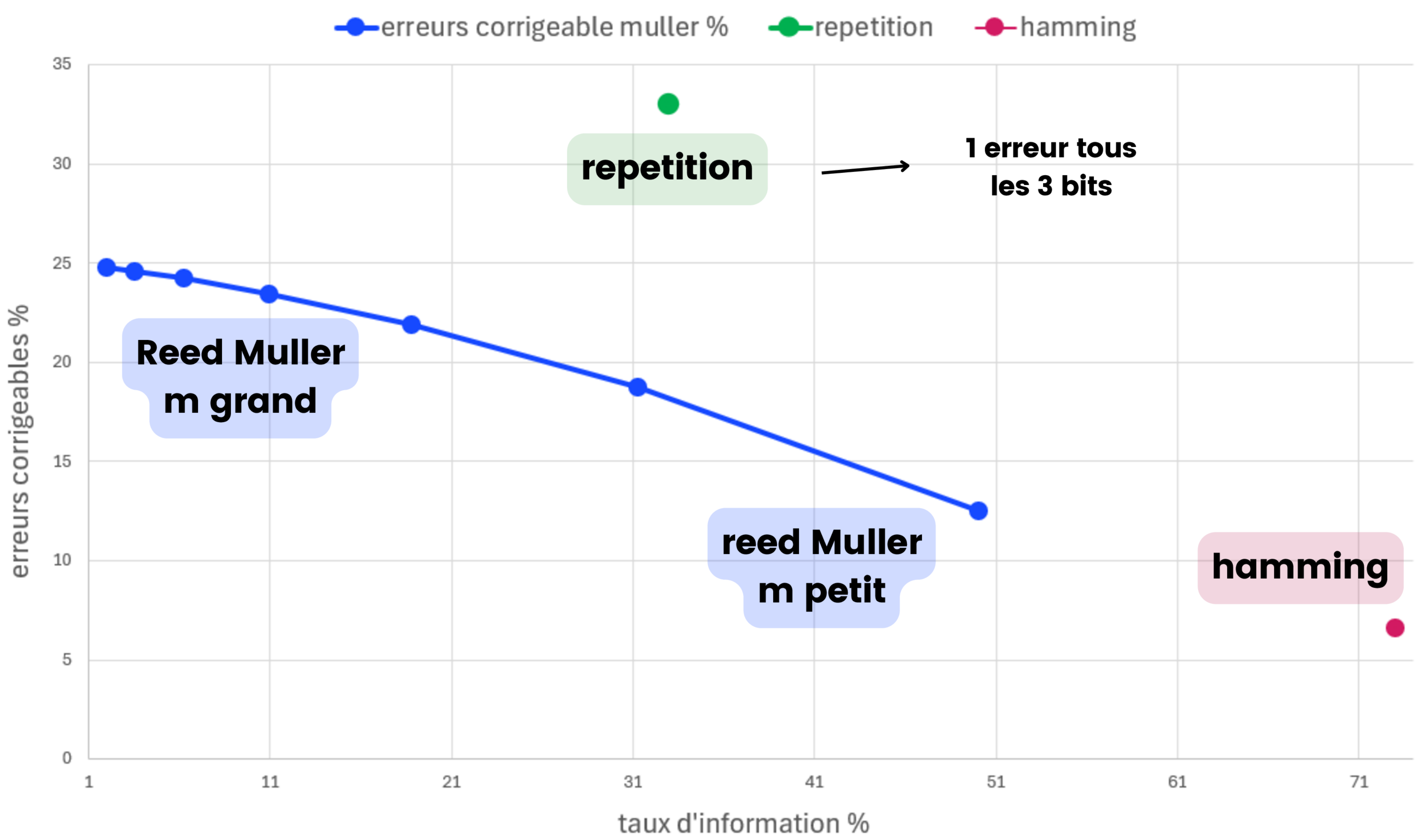
$$a0 = \underline{r}[i] + a1\underline{x1}[i] + \ldots + am\underline{xm}[i]$$ si il n'y a pas eu d'erreur

vote de majorité pour tout i

on a obtenu les a0, …, am


moyenne pour tous les mots de codes possibles (2^m)
temps d'exécution de 10000 appels
temps
0.25
0.0625
0.015625
0.0039063
0.0009766
3
4
5
6
7
8
9
m
encodage repetition
decodage repetition
encodage muller
decodage muller


60
50
40
30
20
10
0
3
4
5
6
7
8
9
erreurs corrigeables / taux information repetition %
erreurs corrigeable muller %
taux information muller %



erreurs corrigeable muller %
repetition
hamming
erreurs corrigeables %
taux d'information %
35
30
25
20
15
10
5
0
1
11
21
31
41
51
61
71
repetition
1 erreur tous les 3 bits
Reed Muller m grand
reed Muller m petit
hamming

annexe

- base : (1, x1, ..., xm,
  x1•x2, ..., xm-1•xm,
  ...
  x1•...•xm)

- matrice generatrice :

$$\left\{\begin{array}{c} 1 \\ x1 \\ \ldots \\ x1\bullet x2 \\ \ldots \\ x1\bullet\ldots\bullet xm \end{array}\right\}$$

- distance : $d = 2^{(m-r)}$

  distance entre deux codes

- erreurs corrigeables :

  $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$

- taux d'information

  $|base| / 2^m$

  $= \Sigma(i=0 \text{->} r) \binom{m}{i} /2\text{^}m$

corriger un maximum d'erreurs : maximiser la distance

erreurs corrigeables : $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ $\quad d = 2^{(m-r)}$

-> minimiser r

les codes RM(1, m) corrigent les plus d'erreurs

- **distance :** $d = 2^{m-1}$
- **erreurs corrigeables :** $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$
- **taux d'information :** $m+1 / 2^m$

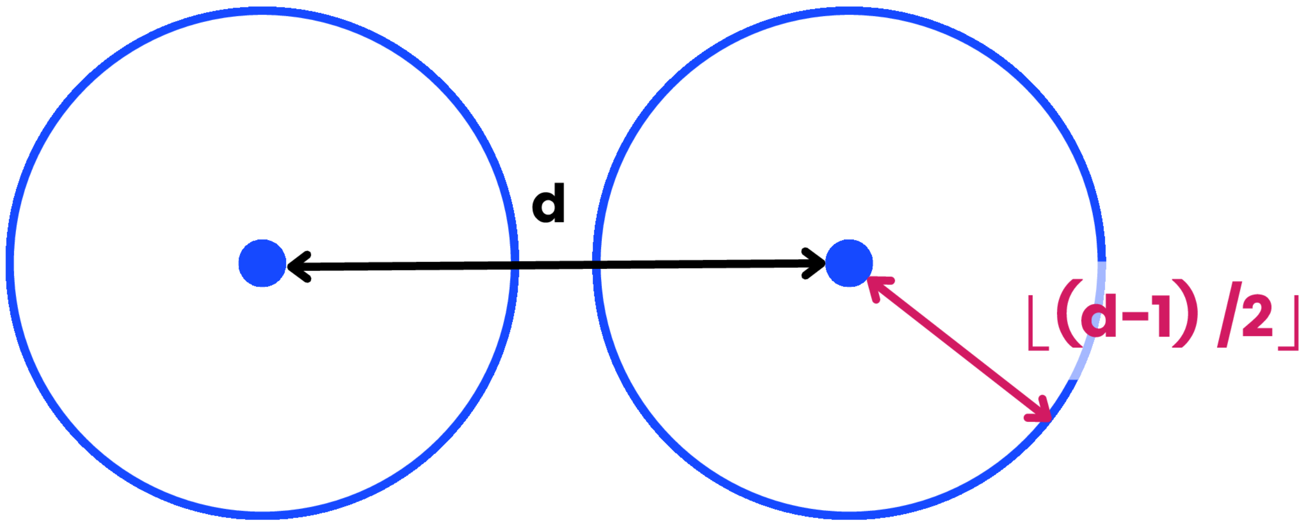
mot nul : est un mot de code

distance entre lui et le mot de poids minimal : poids de ce mot
c'est la distance minimale

mot de poids minimal : monôme de degré r (*)

poids minimal (nombre de bits à 1) : 2^{m-r}

(*) multiplication de deux mots : le a•b[i] =1 ssi a[i]=1 et b[i]=1
plus le degré est grand moins il y a de 1



distance où il n’y a plus d’ambiguïté

s’apparente à des classes d’équivalences où les mots de codes sont les représentants

	m	longeur du code	erreurs corrigeables	%erreurs possibles	bits d'information	% information
	repetition			33		33
	hamming	15	1	7	11	73
reed muller	3	8	1	13	4	50
	4	16	3	19	5	31
	5	32	7	22	6	19
	6	64	15	23	7	11
	7	128	31	24	8	6
	8	256	63	25	9	4
	9	512	127	25	10	2