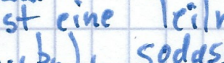
Eigenes „Gesamtbild" CRYPTO1 – Gitter basierte Verf. (I)

26.8.22

„Problem, das wir ein neues Problem brauchen." (RSA/DH durch Q.comp. gekn.)

[1] Was ist ein Gitter/„Lattice"?!
Ein n-dimensionales Gitter ist eine Teilmenge $L \subseteq \mathbb{R}^n$ mit n linear unabhängigen Vektoren $(b_1, \dots, b_n)$, sodass alle $x \in L$ als ganzzahlige Linearkombination von b_i darstellbar sind: $x = \sum_{i=1}^n z_i b_i$; $z_i \in \mathbb{Z}$.
z.B. $b_1=(1,0)$, $b_2=(0,1)$: L =  == $b_1=(5,7)$, $b_2=(8,11)$!
(Idee: vernünftige Basis = priv. Schl.) (Idee: unvernünftige Basis = öff. Schl.)

[2] 1. Gitterproblem: CVP (Closest Vector Problem)
Gegeben: $x \in \mathbb{R}^n$; Gesucht: Der (oder die) nächstgelegene Gitterpunkt?!

[3] 2. Gitterproblem: SVP (Shortest Vector Problem)
Finde einen Vektor $\neq 0$ in L mit der kürzesten Länge (d.h. alle and. mind. so lang)

[4] Bsp.: $b_1=(5,7)$, $b_2=(8,11)$, nächstgel. Gitterpkt. zu $(1.0, 0.9)$ ist $(1,1)$!

[5] Babai: Löse CVP zu $x \in \mathbb{R}^n$: $x = \sum_{i=1}^n x_i b_i$, $x_i \in \mathbb{R}$ (x als reellen Vektor in Vektorbasis)
$x = \sum_{i=1}^n \lceil x_i \rfloor \cdot b_i \in L$ (simpel: runde auf nächste ganze Zahl)
→ Bsp.: Gute Basis $(1,0), (0,1)$: $\lceil 1.0 \rfloor \cdot (1,0) + \lceil 0.9 \rfloor \cdot (0,1) = (1,1)$ ☑
Schlechte Basis $(5,7), (8,11)$: $\lceil -3.8 \rfloor \cdot (5,7) + \lceil 2.5 \rfloor \cdot (8,11) = (-4,-6) \neq (1,1)$ ↯
$(-3.8\,(5/7) + 2.5\,(8/11) = (1.0/0.9))$ $=2$ (hin zur Null runden bei .5)

[6] Für eine orthogonale Basis funktioniert dieses Herangehen von Babai: Bew.: ($x_i \in \mathbb{R}$, $y_i \in \mathbb{Z}$)
$\|x-y\|^2 = \|\sum_{i=1}^n x_i b_i - \sum_{i=1}^n y_i b_i\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle \sum_{i=1}^n (x_i-y_i) b_i, \sum_{j=1}^n (x_j-y_j) b_j \rangle$
$= \sum_{i,j=1}^n (x_i-y_i)(x_j-y_j) \langle b_i, b_j \rangle = \sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2 \|b_i\|^2$ ist minimal gdw. $y_i = \lceil x_i \rfloor$ ■
(bilinear; $=0$ für $i \neq j$; orthogonal Basis)

[7] Babai für „fast" orthogonale Basen löst das approximate CVP/CVP-ψ.

[8] Babai für schlechte Basen funktioniert nicht. (siehe obiges Bsp.)

[9] Ein Gitter L mit Basis $(b_1, \dots, b_n)$ hat die Generatormatrix $G(L) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ (d.h. einfach zeilenweise Basisvektoren)
Nenne Determinante dieser Matrix Det. des Gitters ⇒ betragsmäßig eindeutig (Basis egal)
Außerdem gilt: $\det(L) = |\det(G(L))| = \mathrm{vol}(F)$ mit Fundamentalbereich $F(b_1, \dots, b_n) := \{x = \sum x_i b_i \mid 0 \leq x_i < 1\}$; Sind G_1 und G_2 zwei Generatormatrizen von L, dann exist. eine Matrix U mit $G_1 = U \cdot G_2$ u. $\det(U) = \pm 1$ ⇒ Äquiv.klassen ⇒ suche Vertreter:
Nenne U „unimodular". Ihre Einträge sind ganzzahlig.
„unimodular": det = 1 (oder = −1) (und Einträge ganzzahlig)

[10] Hermitische Normalform: (ist ein solcher Vertreter UNP effektiv zu berechnen)
Sei G eine Generatormatrix, U eine unimodulare Matrix, $U \cdot G$ in oberer Dreiecksform mit Werten >0 in der Diagonale und ≥ 0 darüber; $U \cdot G$ heißt Hermit. Normalform.

[11] Praktisch heißt das, man darf: • Zeilen vertauschen
• Vielfache einer Zeile auf andere addieren
• mit ±1 durchmultiplizieren
(eingeschränkter Gauß-Algo)
Sage: matrix(ZZ,[[],[]]).echelon_form()
Bsp.: $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \overset{(*)}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ = Hermit. Norm.form ▽
(*) entspricht: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
(Das Produkt unimodularer Matrizen ist wieder eine unimodulare Matrix!)
⇒ d.h. kriegt Generatormatrix leicht in Herm. NF ⇒ Probl. für alle, die was verbergen wollen

[12] Hadamard-Ratio: Sei G Generatormatrix mit Zeilen $b_1, \dots, b_n$.
$0 \leq H(G) = H(b_1, \dots, b_n) = \sqrt[n]{\frac{|\det(G)|}{\|b_1\| \cdot \dots \cdot \|b_n\|}} \leq 1$ ← Hadamardsche Ungleichung
(„Bruch") (klar) -Algo
Es gilt: $H(G) = 1 \Leftrightarrow (b_1, \dots, b_n)$ orthogonal & je größer $H(G)$, desto besser klappt Babei ▽

[13] GGH-Kryptosystem (Goldreich-Goldwasser-Halevi): = gescheitert ▽
öffentl. Parameter: $n \in \mathbb{N}$ Dimension, $\delta > 0$ klein („Fehler-Range"), N („Nachr.-Range")
Privater Schlüssel: Generatormatrix G von L mit $H(G)$ nahe an 1 (geheime gute Basis)
Öffentl. Schlüssel: Generatormatrix A von L mit $H(A)$ nahe an 0 ($\in L$)
Verschlüsseln: $m \in [-N, N)^n \cap \mathbb{Z}^n$ Nachr., $e \in_R (-\delta, \delta)^n$ Fehlerv., $ENC(m) = m \cdot A + e \notin L$
Entschlüsseln: $c = ENC(m)$; best. mit Babei nächstgeleg. Gitterpkt.: $m \cdot A$; $m = (m \cdot A) \cdot A^{-1}$ ■