ベイズの法則

集合はある値を持つ要素の集まりのことです。また、いかなる事象もそれを満たす結果としての集合が存在します。

空集合は $\emptyset$で表され、これは集合に値がないことを意味します。

$$x \in A$$

要素 (小文字)　　集合 (大文字)

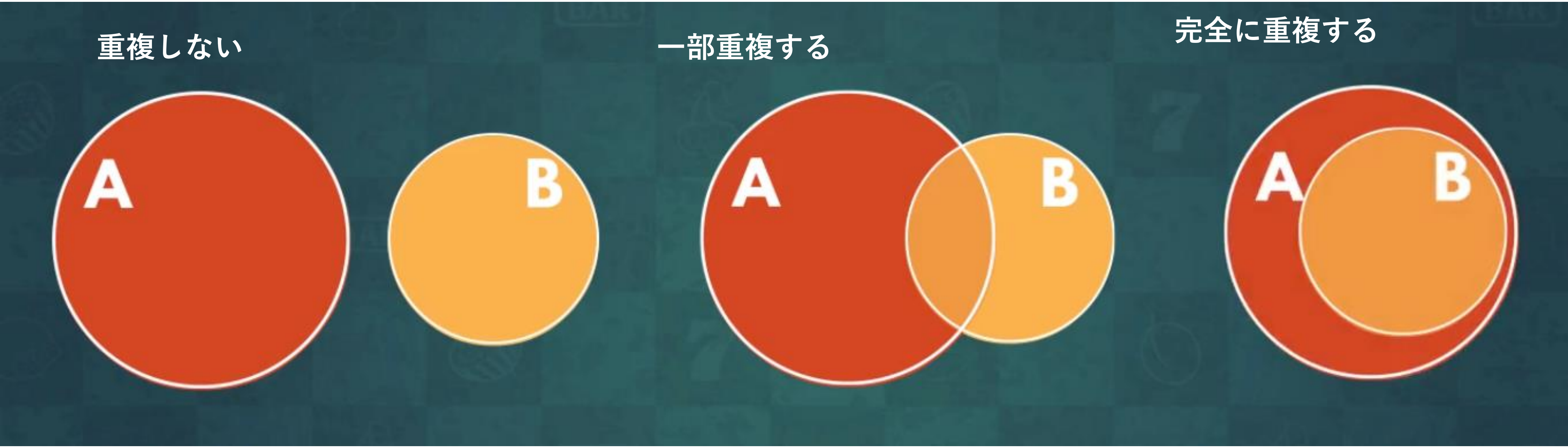
表記:	解釈:	具体例:
$x \in A$	"要素 x は集合 Aの一部."	$2 \in$ 偶数
$A \ni x$	"集合 A は要素 x を含む"	偶数 $\ni 2$
$x \notin A$	"要素 x は集合 Aの一部ではない."	$1 \notin$ 偶数
$\forall x$:	"～のようないかなる x においても"	$\forall x: x \in$ 偶数
$A \subseteq B$	"A は B の部分集合"	偶数$\subseteq$ 整数

いかなる集合も二部の部分集合を持ちます

- $A \subseteq A$
- $\emptyset \subseteq A$

複数の事象

事象AとBを満たす集合は、三つに分けられます

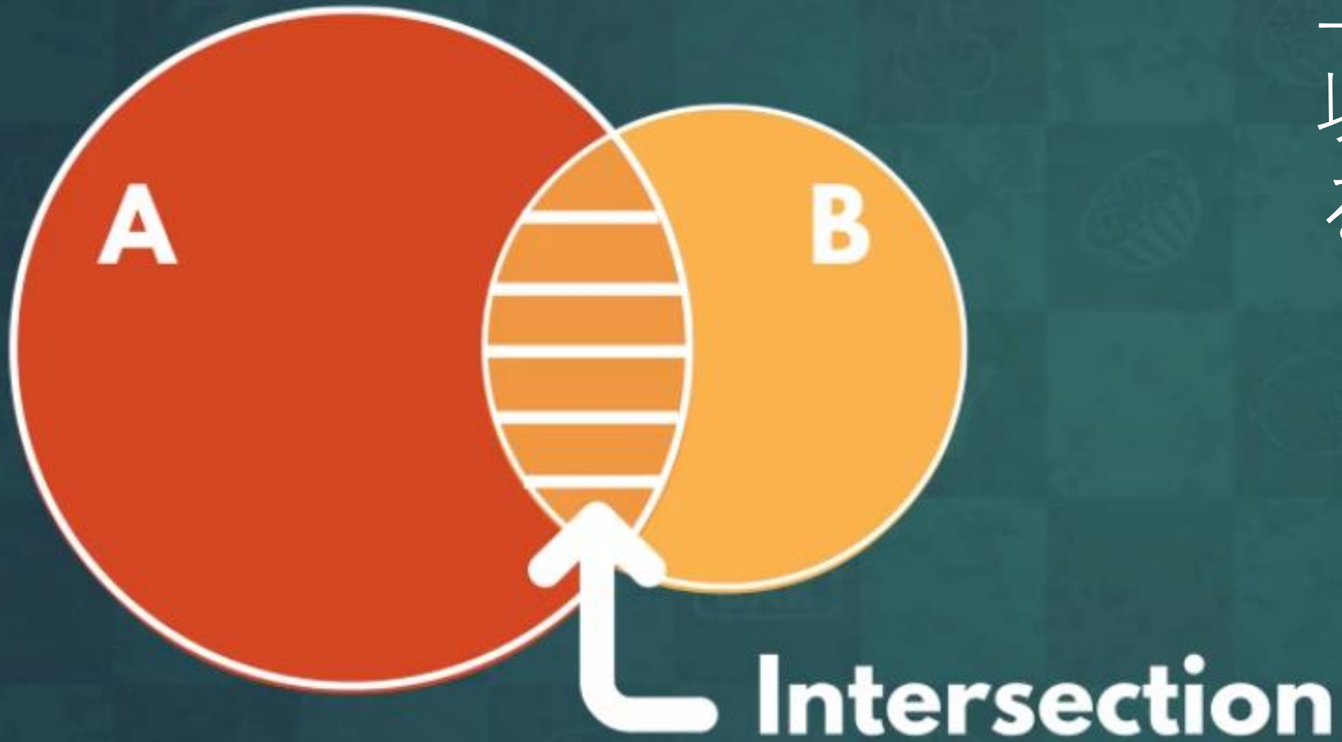


具体例:

A -> ダイヤ	ダイヤ	赤いカード
B -> ハート	クイーン	ダイヤ

重複

二つ、もしくはそれ以上の事象の重複(Intersection)は、それぞれを同時に満たす集合があることを意味します。

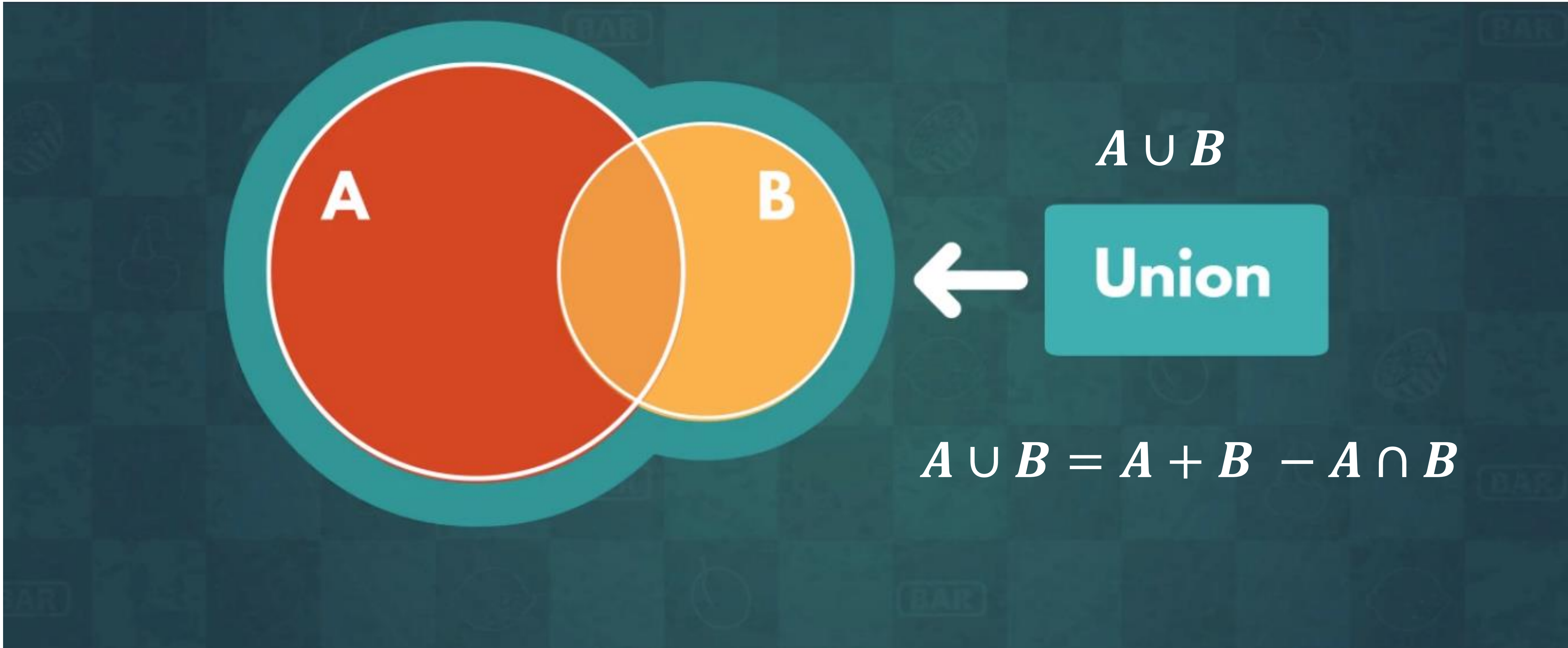


二つの事象の重複は、以下の記号で表現をすることができます

$$A \cap B$$

和集合

和集合は、二つの事象のどちらか一方を満たすことを意味します。これを図で表現すると以下のようになります。

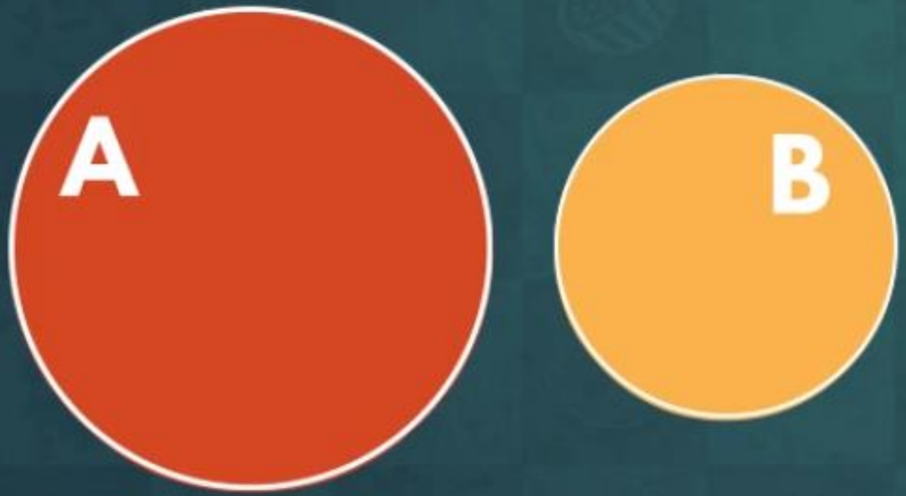


$$A \cup B$$

$$A \cup B = A + B - A \cap B$$

排他集合

それぞれの事象が重ならない場合における集合を排他集合と言います



$A \cap B = \emptyset$であれば、その二つは排他集合となる

注意点:
補集合は排他集合になるが、全ての排他集合が補集合になるわけではない

具体例:
犬と猫は排他集合であるが、他の動物もいるということから、排他集合が補集合を意味しているということにはならない

独立と従属の事象

(P(A)) が事象Bの発生によって影響を受ける場合, AとBは従属の事象という事ができます。

違う表現をすると、AとBが従属ではない場合、それは独立ということができます。

Bが発生した場合においてAが発生する確率は、$\boldsymbol{P(A|B)}$という形で表現することができます。
そして、このことを条件付きの確率と言います。

独立:

- Aが発生する確率は、Bが発生する確率による影響を受けない。
- $P(A|B) = P(A)$

従属

- Aが発生する確率は、Bが発生するかで影響を受ける。
- $P(A|B) \neq P(A)$

具体例

- A -> ハート
- B -> ジャック

具体例

- A -> ハート
- B -> 赤

条件付確率

いかなる二つの事象 A と Bにおいて、 $(P(B) > 0)$の場合における条件付確率は以下の式で表現をすることができます

Bが発生した場合
におけるA
の確率

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

積集合

事象Bが起こる確
率

直感的な解釈:

- 事象Bが発生した場合だけが対象となる
- 重複した部分だけが、Aの条件も満たす部分となる

注意点:

- 重複や和集合とは異なり、AとBの順番が変わると違う意味を持つ.
- $P(A|B) = P(B|A)$だったとしても、$P(A|B)$ と$P(A|B)$は同じではない

全確率の法則

全確率の法則は、以下の式で表現することができます。

$$P(A) = P(A|B_1) \times P(B_1) + P(A|B_2) \times P(B_2) + \cdots + P(A|B_n) \times P(B_n)$$

B_1が起こった場合においてAが発生する確率

B_1が発生する確率

B_2が起こった場合においてAが発生する確率

B_2が発生する確率

公式の直感的な解釈:

- P(A) 排他集合の和集合であるので、それぞれの集合の合計と同じ。
- 和集合の重複部分とその部分集合はは部分集合全体を示す。.
- $\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$ を書き換えることによって、$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)}$を得ることができる
- 全確率の法則を表す違う方法は以下の通り:
    - $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n)$

加法則

加法則は以下の公式によって表すことができます

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

和集合

積集合

公式の直感的な解釈

重複を使って和集合を求める公式を思い出しましょう:

- $A \cup B = A + B \ - A \cap B$

- それぞれの確率は、標本空間に対する対象の確率を示している

乗法則

乗法則の公式は以下の通り

$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$$

積集合　　　　　　　　条件付確率　　　　　　事象Bの確率

公式の直感的な理解

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ の両辺に $P(B)$をかけることによって、 $P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$を得ることができます。

- 事象Bが発生する確率が40%の場合 $(P(B) = 0.4)$ 、そして、事象Bが発生した場合において事象Aが発生する確率が50%の場合 $(P(A|B) = 0.5)$, 乗法則を用いて計算をすると $(\mathrm{P}(\mathrm{A}|B) \times P(B) = 0.5 \times 0.4 = 0.2)$となる。

ベイズの法則

ベイズの法則は、異なる条件付き確率を計算することで、二つの事象の関係を理解する際に使われます

条件付確率

Bが発生した場合にAが発生する確率

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$

公式の直感的な理解

$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$の乗法則より$P(B \cap A) = P(B|A) \times P(A)$.

- $P(A \cap B) = P(B \cap A)$なので、 $P(B|A) \times P(A)$ を条件付確率の公式である $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ に代入することができる
- ベイズの法則は、医療分野などにおいて、二つの症状が他の症状にどのような影響を与えているかを調べる際などに使われている