ポアソン分布: 期待値と分散:

$Y \sim Poisson(\lambda)$に従う Y を想定した上で期待値と分散を求めていきます。離散変数の場合の期待値はそれぞれの値とその確率を掛けたものを足したものですので

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{\infty} y \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!}$$

となります。Y=0 のとき値は全て 0 になりますので、y=1 からはじめていきます。

$$= \sum_{y=1}^{\infty} y \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!} = \sum_{y=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{(y-1)!}$$

λ は定数ですので、$\lambda e^{-\lambda}$を外に出していきます。

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=1}^{\infty} \frac{\lambda^{y-1}}{(y-1)!}$$

分子と分母の両方に y-1 が入っていますので、数式を以下のように置き換えていきます。

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^{y}}{y!}$$

“c”において, $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{c^{x}}{x!} = e^{c}$ですので、この数式はこのようになります。

$$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}$$

ここで、$e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$となりますので

$$= \lambda$$

次に分散の値を求めていきましょう。分散の値は期待値を使った公式から計算をはじめていきます。

$$Var(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$

式を変形していきます。

$$= E\big((Y)(Y-1) + Y\big) - E(Y)^2$$

$$= E\big((Y)(Y-1)\big) + E(Y) - E(Y)^2$$

$$= E\big((Y)(Y-1)\big) + (\lambda - \lambda^2)$$

期待値の結果を当てはめていきます。

$$= \sum_{y=0}^{\infty}(y)(y-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!} + (\lambda - \lambda^{2})$$

この式を変形していきます

$$= \sum_{y=2}^{\infty}(y)(y-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!} + (\lambda - \lambda^{2})$$

$$= \sum_{y=2}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{(y-2)!} + (\lambda - \lambda^{2})$$

$$= \lambda^{2}e^{-\lambda}\sum_{y=2}^{\infty}\frac{\lambda^{y-2}}{(y-2)!} + (\lambda - \lambda^{2})$$

$$= \lambda^{2}e^{-\lambda}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^{y}}{y!} + (\lambda - \lambda^{2})$$

$$= \lambda^{2}e^{-\lambda}e^{\lambda} + (\lambda - \lambda^{2})$$

$$= \lambda^{2} + \lambda - \lambda^{2}$$

$$= \lambda$$

結果として、分散の値をとしてλを得ることができました。