順列（階乗）

順列（階乗）は、ある数の要素を並べる時の数を示す

$$P(n) = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$$

順列

はじめに入る数字

二番目に入る数字

最後に入る数字

順列（階乗）の特徴:

- 標本空間の中の全ての要素を並べる
- 重複して使うことがない.
- $P(n) = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1 = n!$

具体例:

- 5人を並べる順列（階乗）は、 P(5) = 120 となる

階乗

階乗は、！で表し、ある数字を順番にかけていくことを意味する

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1$$

ポイント:

- 0! = 1.
- n<0であれば、階乗は存在しない

階乗の計算ルール(n>0 で n>k)

- $(n+k)! = n! \times (n+1) \times \cdots \times (n+k)$
- $(n-k)! = \frac{n!}{(n-k+1)\times\cdots\times(n-k+k)} = \frac{n!}{(n-k+1)\times\cdots\times n}$
- $\frac{n!}{k!} = \frac{k!\times(k+1)\times\cdots\times n}{k!} = (k+1) \times \cdots \times n$

具体例: n = 7, k = 4

- $(7+4)! = 11! = 7! \times 8 \times 9 \times 10 \times 11$
- $(7-4)! = 3! = \frac{7!}{4\times5\times6\times\times7}$
- $\frac{7!}{4!} = 5 \times 6 \times 7$

順列

順列とは、ある数から要素を選んでそれを並べる場合のことを言います

繰り返しがある順列

$$\bar{V}(n,p) = n^p$$

使える数　並べる数

繰り返しがない順列

$$V(n,p) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

使える数　並べる数

直感的な理解(繰り返しあり)

- 一つ目の要素はn通りある
- 二つ目のついてもn通りある
- つまり、pに対して全てn通りの取り得る数がある.
- $n \times n \times n \ldots n = n^p$

直感的な理解 (繰り返しなし)

- 一つ目の要素はn通りある
- 二つ目の要素はn-1通りとなる
- 要素を選ぶほど、取り得ず数は減っていく.
- $n \times (n-1) \times (n-2) \ldots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$

組み合わせ

組み合わせはある数から要素を選ぶ場合に使われます

$$C(n,p) = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

選ぶ数

組み合わせ

標本空間の中の数

組み合わせの特徴:

- 重複を考慮に入れる (Johny, Kate, Marie とMarie, Kate, Johnyは同じ)
- ある単一の組みあわせおける順列（階乗）は、異なる順列となる
- $C = \frac{V}{P} = \frac{n!/(n-p)!}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$
- 組み合わせは対称性を有する。つまり $C_p^n = C_{n-p}^n$となる。なぜなら、pを選ぶことは、n-pを選ばないことと同じであるから

違う標本空間における組み合わせ

異なる標本空間において取り得る場合の数は以下の通り

$$C = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$$

組み合わせ

一つ目の標本空間の数

二つ目の標本空間の数

最後の標本空間の数

異なる標本空間における組み合わせの特徴:

- ある要素を選ぶことは、他の要素を選ぶことに影響を及ぼさない
- どの順番で並べるかは任意である
- それぞれの標本空間における要素の数は把握する必要がある $(n_1, n_2 \ldots n_p)$

くじの例

くじで当たるためには、以下の条件を満たす必要がある:

- "Powerball" の数をあてる (From 1 to 26)
- 5つの数を当てる (From 1 to 69)

$$C = \underbrace{\frac{69!}{64!\,5!}}_{C_{5\ numbers}} \times \underbrace{26}_{C_{Powerball\ number}}$$

組み合わせの数

公式の直感的な理解:

- これは、異なる標本空間の組み合わせの問題と考えることができる
  - ある事象は、標本の大きさが26で、もう一つはC_5^{69}
- 全ての要素と対象とする要素の公式を使うことで、1枚くじをかった場合にあたる確率は $1/(\frac{69!}{64!5!} \times 26)$で計算をすることができる