正規分布の$E(Y), Var(Y)$

正規分布の期待値と分散は以下の式で求めることができます

Step 1:定義に基づく期待値の公式は以下となります

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y)\, dy.$$

Step 2: 正規分布の確率密度関数はこのようになります $f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Step 3: つまり、期待値はこのようになります $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy$

Step 4: σとπは定数ですので、このように変形することができます:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y\, e^{\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy$$

365√DataScience

正規分布の$E(Y), Var(Y)$

Step 5 : 演算を容易にするためにt を$\frac{y-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$ とおきかえます。そのためには y と dyをおきかえます。t = $\frac{y-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$, であれば $y = \mu + \sqrt{2}\sigma t$であり、 $\frac{dy}{dt} = \sqrt{2}\sigma$ですので $dy = \sqrt{2}\sigma\, dt$となります。結果として式は以下のようになります。

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y\, e^{\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\mu + \sqrt{2}\sigma t)\, e^{-t^2}\sqrt{2}\sigma\, dt = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\mu + \sqrt{2}\sigma t)\, e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\mu + \sqrt{2}\sigma t)\, e^{-t^2}\, dt$$

Step 6: 式を二つに分けます:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\mu + \sqrt{2}\sigma t)\, e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\mu\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt + \sqrt{2}\sigma\int_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-t^2}\, dt\right]$$

Step 7: 二つの積分を解いていきます:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\mu\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt + \sqrt{2}\sigma\int_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-t^2}\, dt\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\mu\sqrt{\pi} + \sqrt{2}\sigma\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)_{-\infty}^{\infty}\right]$$

365DataScience

正規分布の$E(Y), Var(Y)$

Step 8: 指数部分はゼロに近づきますので、以下のようになります:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\mu\sqrt{\pi}+\sqrt{2}\sigma\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)_{-\infty}^{\infty}\right]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}[\mu\sqrt{\pi}+\mathbf{0}]=\frac{\mu\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}=\mu$$

Step 9: ここまでの計算結果から $f(y)=\frac{\mathbf{1}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\boldsymbol{e}^{\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$,における期待値は$\mu$となります。

分散を求めるには、期待値と分散の関係を示した以下の式が必要となります

$$Var(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2$$

Step 1: 期待値は分かっていますので、それぞれ代入していきます:

$$Var(Y)=E(Y^2)-\mu^2$$

正規分布の$E(Y), Var(Y)$

Step 2: 期待値を求めた時と同じように、計算を進めて行きます。

$$\mathrm{E}(Y^2) - \mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{\mathbf{1}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \boldsymbol{e}^{\frac{-(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})^2}{2\sigma^2}} dy - \mu^2 =$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \, \boldsymbol{e}^{\frac{-(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})^2}{2\sigma^2}} dy \, - \mu^2 =$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{2}\sigma t + \mu\right)^{\mathbf{2}} \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}} \sqrt{2}\sigma \, dt - \mu^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{2}\sigma t + \mu\right)^{\mathbf{2}} \, e^{-t^2} dt - \mu^2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{2}\sigma t + \mu\right)^{\mathbf{2}} \, e^{-t^2} dt - \mu^2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (\boldsymbol{2\sigma^2 t^2} + \boldsymbol{2\sqrt{2}\sigma\mu t} \, + \, \boldsymbol{\mu^2}) \, e^{-t^2} dt \right] - \mu^2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[2\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \, e^{-t^2} dt + 2\sqrt{2}\sigma\mu \int_{-\infty}^{\infty} t \, e^{-t^2} dt + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right] - \mu^2$$

正規分布の$E(Y), Var(Y)$

Step 3: 二つの積分に分けて計算をしていきます

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[2\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty} t^2\, e^{-t^2} dt + 2\sqrt{2}\sigma\mu\int_{-\infty}^{\infty} t\, e^{-t^2}\, dt + \mu^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt\right] - \mu^2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[2\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty} t^2\, e^{-t^2} dt + 2\sqrt{2}\sigma\mu\ \times \mathbf{0} + \mu^2\sqrt{\boldsymbol{\pi}}\right] - \mu^2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[2\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty} t^2\, e^{-t^2} dt\right] + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mu^2\sqrt{\pi} - \mu^2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[2\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty} t^2\, e^{-t^2} dt\right] + \mu^2 - \mu^2 =$$

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2\, e^{-t^2} dt$$

Step 4: 以下の式を次で使っていきます:

$$\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^2\, e^{-t^2} dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left(\left[-\frac{t}{2}e^{-t^2}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt\right)$$

正規分布の$E(Y), Var(Y)$

Step 5: 指数の部分は0になるので:

$$\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left(\left[-\frac{t}{2}e^{-t^2}\right]_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt\right)=$$
$$=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left(\mathbf{0}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt\right)=$$
$$=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=$$
$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt$$

Step 6: $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$,になるので:

$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\boldsymbol{\pi}}=\boldsymbol{\sigma^2}$$

以上より、分散の値は $f(y)=\frac{\mathbf{1}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\boldsymbol{e}^{\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, equals $\boldsymbol{\sigma^2}$.