Hyperbola tone mapping

Kohei Ishiyama

1 関数の概要

http://technorgb.blogspot.jp/2018/02/hyperbola-tone-mapping.html のトーンカーブ関数 (1) は, Toe $y_t(x)$, Linear $y_l(x)$, Shoulder $y_s(x)$ の 3 つの部分から成り, それぞれが滑らかにつながっている. そして, 各部分の接続点 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) を調整することで, 関数の形を変えることができる.

$$y(x) = \begin{cases} y_t(x) = -\frac{a_t}{x+b_t} + c_t & 0 \leq x < x_1, \\ y_l(x) = a_l x + b_l & x_1 \leq x < x_2, \\ y_s(x) = -\frac{a_s}{x+b_s} + c_s & x_2 \leq x < x_3. \end{cases} \tag{1}$$

$$a_t = \frac{a_l x_1^2 y_1^2}{(y_1 - a_l x_1)^2},\ b_t = \frac{a_l x_1^2}{y_1 - a_l x_1},\ c_t = \frac{y_1^2}{y_1 - a_l x_1}$$

$$a_l = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad b_l = y_1 - a_l x_1 (= y_2 - a_l x_2)$$

$$a_s = \frac{a_l(x_2 - x_3)^2 (y_2 - y_3)^2}{(a_l(x_2 - x_3) - y_2 + y_3)^2},\ b_s = \frac{a_l x_2 (x_3 - x_2) + x_3 (y_2 - y_3)}{a_l(x_2 - x_3) - y_2 + y_3},$$
$$c_s = \frac{y_3(a_l(x_2 - x_3) + y_2) - y_2^2}{a_l(x_2 - x_3) - y_2 + y_3}$$

2 関数の導出

関数 (1) の導出を行う.

$$y_t(x) = -\frac{a_t}{x + b_t} + c_t \tag{2}$$
$$y_l(x) = a_l x + b_l \tag{3}$$
$$y_s(x) = -\frac{a_s}{x + b_s} + c_s \tag{4}$$

Toe $y_t(x)$, Linear $y_l(x)$, Shoulder $y_s(x)$ が (0, 0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) で滑らかにつながっているとしたとき, それらの係数 a_t, b_t, c_t, a_l, b_l, a_s, b_s, c_s を求めよう. 各接続点での関数の境界条件は, (Table 1) に示した. ここで, 滑らかとは前後の関数の 1 次微分が一致していることとした.

(x, y)	$y(x)$	$\frac{dy(x)}{dx}$
$(0, 0)$	$y_t(0) = 0$	-
(x_1, y_1)	$y_t(x_1) = y_l(x_1) = y_1$	$\left.\frac{dy_t(x)}{dx}\right\rvert_{x=x_1} = \left.\frac{dy_l(x)}{dx}\right\rvert_{x=x_1} = a_l$
(x_2, y_2)	$y_l(x_2) = y_s(x_2) = y_2$	$\left.\frac{dy_l(x)}{dx}\right\rvert_{x=x_2} = \left.\frac{dy_s(x)}{dx}\right\rvert_{x=x_2} = a_l$
(x_3, y_3)	$y_s(x_3) = y_3$	-

表 1　各接続点の境界条件

■**関数の 1 回微分**　以降の導出で必要になるため, 各関数の 1 回微分をあらかじめ書いておく.

$$\frac{dy_t(x)}{dx} = \frac{a_t}{(x+b_t)^2} \tag{5}$$

$$\frac{dy_l(x)}{dx} = a_l \tag{6}$$

$$\frac{dy_s(x)}{dx} = \frac{a_s}{(x+b_s)^2} \tag{7}$$

■**Toe**　(2) と (5) に, Table 1 の (0, 0), $(x_1,\ y_1)$ での条件を課すと,

$$0 = -\frac{a_t}{b_t} + c_t, \quad y_1 = -\frac{a_t}{x_1+b_t} + c_t, \quad a_l = \frac{a_t}{(x_1+b_t)^2} \tag{8}$$

が得られる. これらを a_t, b_t, c_t について解けば,

$$a_t = \frac{a_l x_1^2 y_1^2}{(y_1 - a_l x_1)^2}, \quad b_t = \frac{a_l x_1^2}{y_1 - a_l x_1}, \quad c_t = \frac{y_1^2}{y_1 - a_l x_1} \tag{9}$$

と求まる.

■**Linear**　(3) に, Table 1 の $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ での条件を課すと,

$$y_1 = a_l x_1 + b_l, \quad y_2 = a_l x_2 + b_l \tag{10}$$

が得られる. これらを a_l と b_l について解けば,

$$a_l = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad b_l = y_1 - a_l x_1 (= y_2 - a_l x_2) \tag{11}$$

と求まる.

■**Shoulder**　(4) と (7) に, Table 1 の $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$ での条件を課すと,

$$y_2 = -\frac{a_s}{x_2+b_s} + c_s, \quad y_3 = -\frac{a_s}{x_3+b_s} + c_s, \quad a_l = \frac{a_s}{(x_2+b_s)^2} \tag{12}$$

が得られる. これらを a_s, b_s, c_s について解けば,

$$\begin{aligned} a_s &= \frac{a_l(x_2-x_3)^2(y_2-y_3)^2}{(a_l(x_2-x_3)-y_2+y_3)^2}, \quad b_s = \frac{a_l x_2(x_3-x_2)+x_3(y_2-y_3)}{a_l(x_2-x_3)-y_2+y_3}, \\ c_s &= \frac{y_3(a_l(x_2-x_3)+y_2)-y_2^2}{a_l(x_2-x_3)-y_2+y_3} \end{aligned} \tag{13}$$

と求まる.

以上で, 関数 $y(x)$ (1) の全ての未知定数は (9), (11), (13) として求まった.

3　逆関数

関数 (1) の逆関数を書いておく. Toe, Linear, Shoulder のそれぞれの部分 (2), (3), (4) の逆関数 $x_t(y), x_l(y), x_s(y)$ は, 以下のようになる.

$$x_t(y) = -\frac{a_t}{y-c_t} - b_t \tag{14}$$

$$x_l(y) = \frac{y-b_l}{a_l} \tag{15}$$

$$x_s(y) = -\frac{a_s}{y-c_s} - b_s \tag{16}$$

これらを使うと, (1) の逆関数は,

$$x(y) = \begin{cases} -\frac{a_t}{y-c_t} - b_t & 0 \le y < y_1, \\ \frac{y-b_l}{a_l} & y_1 \le y < y_2, \\ -\frac{a_s}{y-c_s} - b_s & y_2 \le y < y_3. \end{cases} \tag{17}$$

となる.