

Volume Rendering 方程式から大気散乱モデルを導く

@ishiyama_*

2018 年 7 月 29 日 (2018 年 9 月 8 日改訂)

これはレイトレ合宿 6 のアドベントカレンダー 5 週目の記事です.

1 はじめに

地球の大気の見た目を再現するモデルのひとつとして, いわゆる Nishita モデル [NSTN93] が知られており, Precomputed Atmospheric Scattering [BN08, EK10] などに広く応用されています. これによって得られた地球大気を, レイトレーシング時の Image Based Rendering (以後 IBL) 用の天球として利用することを考えたとき, 両者で散乱係数を共有することができれば, 天球と Aerial Perspective の間で, 整合性を持った見た目を得られることが期待できます. そこで, この記事では Nishita モデルと同様の仮定を Volume Rendering 方程式に課すことによって, 先に挙げた Elek らの大気散乱モデル [EK10] の内部散乱項の導出を取り上げ, 散乱媒質を含むレイトレーシングと大気散乱モデルが共通の法則: Volume Rendering 方程式のもとに成り立っていることを確かめてみます.

2 Volume Rendering 方程式

まずは, Volume Rendering 方程式のおさらいから始めます. Radiative Transfer 方程式 [Cha60] から出発しましょう. [NGHJ18] の表記に従えば, 式は

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = -\mu_e(\mathbf{x}) L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) + \mu_a(\mathbf{x}) L_e(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) + \mu_s(\mathbf{x}) L_s(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \quad (1)$$

と与えられます. $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$ は, 位置 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ で方向 $\boldsymbol{\omega} = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$ を向いた光線の輝度. 吸収係数 μ_a , 散乱係数 μ_s , 消散係数 $\mu_e = \mu_a + \mu_s$ は, 光線の輝度が距離とともに吸収, 散乱, 消散される割合. そして L_e は媒質の自己発光の輝度, L_s は内部散乱の輝度を表しています. 内部散乱 L_s は, 位置 \mathbf{x} での全方向からの入射輝度 L_i の総和で,

$$L_s(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \oint p(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') L_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}') d\Omega(\boldsymbol{\omega}')$$

と表されます. ここで $d\Omega(\boldsymbol{\omega})$ は微小立体角, \oint は単位球面上での積分 $\oint d\Omega(\boldsymbol{\omega}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\phi$. です. $p(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}')$ は位相関数と呼ばれ, $\boldsymbol{\omega}$ から $\boldsymbol{\omega}'$ に光線が散乱される割合を表します.

いま, \mathbf{x} を距離 s を使って $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0) + \boldsymbol{\omega}s$ と書くと, Radiative Transfer 方程式 (1) は

$$\frac{dL(\mathbf{x}(s), \boldsymbol{\omega})}{ds} = -\mu_e(\mathbf{x}(s)) L(\mathbf{x}(s), \boldsymbol{\omega}) + \mu_a(\mathbf{x}(s)) L_e(\mathbf{x}(s), \boldsymbol{\omega}) + \mu_s(\mathbf{x}(s)) L_s(\mathbf{x}(s), \boldsymbol{\omega}),$$

と書き換えられます. ここで, 左辺の方向微分を書き換える際に, チェインルール^{*1} を使いました. この式は

* https://twitter.com/ishiyama_

^{*1} $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \left(\frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} \cdot \nabla \right) L(\mathbf{x}(s), \boldsymbol{\omega}) = \frac{dL(\mathbf{x}(s), \boldsymbol{\omega})}{ds}$

1 階線形微分方程式なので, 解はすぐに*2 求まります:

$$L(\mathbf{x}(s), \boldsymbol{\omega}) = T(\mathbf{x}(0) \rightarrow \mathbf{x}(s))L(\mathbf{x}(0)) + \int_0^s T(\mathbf{x}(s') \rightarrow \mathbf{x}(s)) [\mu_a(\mathbf{x}(s'))L_e(\mathbf{x}(s'), \boldsymbol{\omega}) + \mu_s(\mathbf{x}(s'))L_s(\mathbf{x}(s'), \boldsymbol{\omega})] ds', \quad (2)$$

ここで,

$$T(\mathbf{x}(a) \rightarrow \mathbf{x}(b)) = \exp\left(-\int_a^b \mu_e(\mathbf{x}(t)) dt\right).$$

は Transmittance と呼ばれる量です. こうして, Radiative Transfer 方程式から Volume Rendering 方程式 (2) [NGHJ18] が得られました*3

3 大気散乱モデル - [EK10] の内部散乱項の導出

それでは, Elek らのモデル [EK10] の内部散乱項に焦点を当て, Volume Rendering 方程式 (2) から大気散乱モデルを導いていきます.

3.1 仮定

始めに, 地球の大気をモデル化するため, [NSTN93] と同様に次の仮定を行います.

- 大気の発光は無視

$$L_e(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = 0.$$

- 複数の散乱媒質がある

$$\mu_s(\mathbf{x}) = \sum_j \mu_{sj}(\mathbf{x}), \quad \mu_a(\mathbf{x}) = \sum_j \mu_{aj}(\mathbf{x}).$$

- 光源は平行光の太陽

$$L_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = L_{\text{sun}}\delta(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_{\text{sun}})*4$$

- レイは直進する
- 天体には地表と大気, 大気と宇宙空間を隔てる境界がある

これらの仮定のほかに, Elek らはいくつかの近似を導入しています. そこで次に, Volume Rendering 方程式がそれらの近似のもとで, どのように表現できるのかを考察していきます.

*2 一階線形微分方程式 $\frac{dy(x)}{dx} + p(x)y(x) = q(x)$ の一般解は

$$y(x) = ce^{-\int^x p(\xi)d\xi} + \int^x q(\xi)e^{-\int_\xi^x p(\xi)d\xi} d\xi.$$

c は積分係数.

*3 CG 分野では, Radiative Transfer 方程式の積分形を Volume Rendering 方程式と呼んでいるようなので, この記事もそれになっています.

*4 本来, 太陽は球光源なのですが, 地球から眺めた太陽は非常に小さいのでデルタ関数で近似することにします. ここで, 法線を引数に取るデルタ関数を $\delta(\mathbf{n} - \mathbf{m}) = \frac{1}{\sin\theta_n}\delta(\theta_n - \theta_m)\delta(\phi_n - \phi_m)$ と定義しておきます.

漸化式としての Volume Rendering 方程式

Volume Rendering 方程式 (2) の第 2 項の積分は簡単に解くことができません. Elek らは n 次散乱を $L^{(n)}$ と書いたとき

$$L = L^{(0)} + L^{(1)} + \dots$$

と書ける, つまり n 次散乱は $n-1$ 次散乱にのみ依存すると近似しています. このことから, ここでは Volume Rendering 方程式を次の漸化式で表現します.

$$L^{(n)}(\mathbf{x}(s)) = T(\mathbf{x}(0) \rightarrow \mathbf{x}(s))L^{(n)}(\mathbf{x}(0)) + \int_0^s T(\mathbf{x}(s') \rightarrow \mathbf{x}(s))\mu_s(\mathbf{x}(s'))L_s^{(n)}(\mathbf{x}(s'))ds', \quad (3)$$

$$L_s^{(n)}(\mathbf{x}(s')) = \oint p(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}')L^{(n-1)}(\mathbf{x}(s'), \boldsymbol{\omega}')d\Omega(\boldsymbol{\omega}').$$

ただし, 式が煩雑になることを避けるために $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$ の引数 $\boldsymbol{\omega}$ を省略しました. 以降では, この第 2 項の内部散乱項

$$L_{\text{inscatter}}^{(n)}(\mathbf{x}(s)) = \int_0^s T(\mathbf{x}(s') \rightarrow \mathbf{x}(s))\mu_s(\mathbf{x}(s'))L_s^{(n)}(\mathbf{x}(s'))ds'$$

の導出に注目します.

内部散乱項

Elek らは, さらに

$$L_{\text{inscatter}}^{(n)} = \sum_n (L_R^{(n)} + L_M^{(n)})$$

と, 独立にミー散乱とレイリー散乱を計算しています. 従って, ここでも

$$L_{\text{inscatter}}^{(n)}(\mathbf{x}(s)) = \sum_j \int_0^s T(\mathbf{x}(s') \rightarrow \mathbf{x}(s))\mu_{sj}(\mathbf{x}(s'))L_{sj}^{(n)}(\mathbf{x}(s'))ds'$$

$$L_{sj}^{(n)}(\mathbf{x}(s')) = \oint p_j(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}')L_j^{(n-1)}(\mathbf{x}(s'), \boldsymbol{\omega}')d\Omega(\boldsymbol{\omega}').$$

と分離できるとします.

これで導出の準備が整いました. それでは, 内部散乱項 $L_{\text{inscatter}}^{(n)}(\mathbf{x}(s))$ を求めていきます.

3.2 1 次散乱

さて, ここで求めたいものは

$$L_{sj}^{(1)}(\mathbf{x}(s')) = \oint p_j(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}')L_j^{(0)}(\mathbf{x}(s'), \boldsymbol{\omega}')d\Omega(\boldsymbol{\omega}').$$

です. 太陽光線の大気への入射位置を \mathbf{y} とすると, $\mathbf{x}(s')$ に到達する入射光は $L_j^{(0)}(\mathbf{x}(s'), \boldsymbol{\omega}') = T(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}(s'))L_{\text{sun}}\delta(\boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{\omega}_{\text{sun}})$ となります (図 1). これを上のに代入すれば,

$$L_{sj}^{(1)}(\mathbf{x}(s')) = \oint p_j(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}')T(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}(s'))L_{\text{sun}}\delta(\boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{\omega}_{\text{sun}})d\Omega(\boldsymbol{\omega}')$$

$$= p_j(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_{\text{sun}})L_{\text{sun}}T(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}(s')) \quad (4)$$

と得られます.

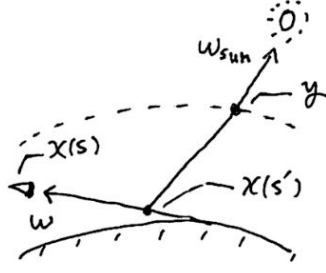


図1 1次散乱

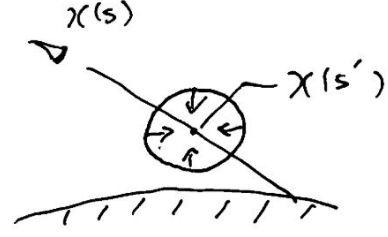


図2 高次散乱

3.3 高次散乱

1次散乱以降 ($n > 1$) は, 前回の結果を光源として用います (図2). 従って, 直ちに

$$L_{sj}^{(n)}(\mathbf{x}(s')) = \oint p_j(\omega, \omega') L_j^{(n-1)}(\mathbf{x}(s'), \omega') d\Omega(\omega'). \quad (5)$$

が得られます.

3.4 内部散乱項 (一般)

(4), (5) を (3) に代入することで, 大気散乱モデルの内部散乱項を得ます.

$$L_{\text{inscatter}}^{(n)}(\mathbf{x}(s)) = \sum_j \int_0^s T(\mathbf{x}(s') \rightarrow \mathbf{x}(s)) \mu_{sj}(\mathbf{x}(s')) L_{sj}^{(n)}(\mathbf{x}(s')) ds' \quad (6)$$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}(a) \rightarrow \mathbf{x}(b)) &= \exp\left(-\sum_j \int_a^b \mu_{ej}(\mathbf{x}(t)) dt\right), \\ L_{sj}^{(1)}(\mathbf{x}(s')) &= p_j(\omega, \omega_{\text{sun}}) L_{\text{sun}} T(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}(s')), \\ L_{sj}^{(n)}(\mathbf{x}(s')) &= \oint p_j(\omega, \omega') L_j^{(n-1)}(\mathbf{x}(s'), \omega') d\Omega(\omega') \quad (n > 1). \end{aligned}$$

あとは, 散乱媒質の具体的な表現を与えれば, 最終的な内部散乱項を得ることができます.

3.5 内部散乱項 (地球)

散乱媒質にレイリー散乱に従う大気分子, そしてミー散乱に従うエアロゾルを考え, それらの濃度は地表からの高さ $h(\mathbf{x})$ に応じて指数関数的に減衰する [NSTN93] とします:

$$\sum_j \mu_{aj}(\mathbf{x}) = \sum_j^{R, M} \beta_{aj} e^{-\frac{h(\mathbf{x})}{H_j}}, \quad \sum_j \mu_{sj}(\mathbf{x}) = \sum_j^{R, M} \beta_{sj} e^{-\frac{h(\mathbf{x})}{H_j}} \quad (7)$$

ここで, H_j はスケールハイトと呼ばれるパラメータです. そして, レイリー散乱とミー散乱の位相関数は, [EK10] から

$$p_R(\omega, \omega') = \frac{1}{4\pi} \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \theta), \quad p_M(\omega, \omega') = \frac{1}{4\pi} \frac{3}{2} \frac{1 - g^2}{2 + g^2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{(1 + g^2 - 2g \cos \theta)^{3/2}} \quad (8)$$

と与えます. ただし $\theta = \cos^{-1}(\omega \cdot \omega')$ としました.

これら (7), (8) を (6) に代入することで, 最終的に

$$L_{\text{inscatter}}^{(n)}(\mathbf{x}(s)) = \sum_j \int_0^s T(\mathbf{x}(s') \rightarrow \mathbf{x}(s)) \beta_{sj} e^{-\frac{h(\mathbf{x}(s'))}{H_j}} L_{sj}^{(n)}(\mathbf{x}(s')) ds'$$

$$T(\mathbf{x}(a) \rightarrow \mathbf{x}(b)) = \exp\left(-\sum_j^{R,M} \beta_{ej} \int_a^b e^{-\frac{h(\mathbf{x}(t))}{H_j}} (\mathbf{x}(t)) dt\right),$$

$$L_{sj}^{(1)}(\mathbf{x}(s')) = p_j(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_{\text{sun}}) L_{\text{sun}} T(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}(s')),$$

$$L_{sj}^{(n)}(\mathbf{x}(s')) = \oint p_j(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') L_j^{(n-1)}(\mathbf{x}(s'), \boldsymbol{\omega}') d\Omega(\boldsymbol{\omega}') \quad (n > 1).$$

を得ます。これで, [EK10] と同じ内部散乱項にたどり着くことができました。

4 実装結果

ここでは実装の詳細は省きますが, 大気散乱モデルの内部散乱項のみを計算した結果を (図 3, 4, 5, 6) に示します。内部散乱項だけでも, 結構よい見た目が得られているのではないのでしょうか。

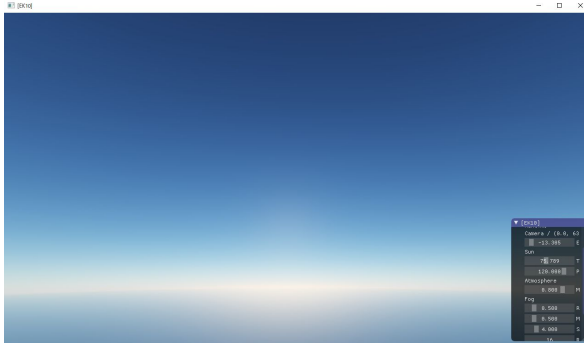


図 3 地上, 昼

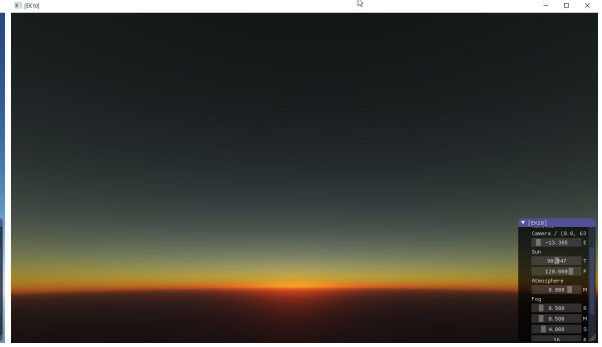


図 4 地上, 夕

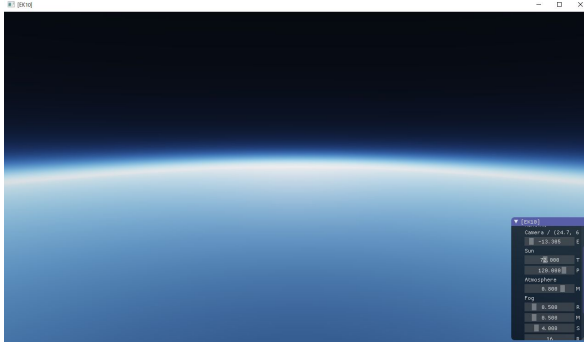


図 5 上空, 昼

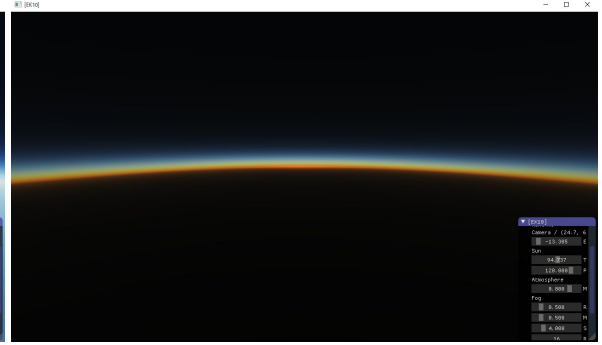


図 6 上空, 夕

5 さいごに

この記事では, Volume Rendering 方程式から出発して, [EK10] と同じ内部散乱項の導出を行いました。これにより, 確かに大気散乱モデルは Volume Rendering 方程式のひとつの形であると言えそうです。ただし, この記事で触れた内容は, 彼らの仕事のさわりの部分でしかありません。実際に大気散乱モデルを実装してみたい方は, この記事で取り上げた [EK10] や [BN08] を読むことをおすすめします。特に [BN08] は, 著者自身によるサンプルコード [Bru17] が提供されているので, 参考になると思います。

参考文献

- [BN08] Eric Bruneton and Fabrice Neyret. Precomputed atmospheric scattering. *Computer Graphics Forum*, 27(4):1079–1086, 2008.

- [Bru17] Eric Bruneton. Precomputed atmospheric scattering: a new implementation. https://ebruneton.github.io/precomputed_atmospheric_scattering/, 2017.
- [Cha60] Subrahmanyan Chandrasekhar. *Radiative transfer*. Dover Publications Inc., 1960.
- [EK10] Oskar Elek and Petr Knoch. Real-time spectral scattering in large-scale natural participating media. In *Proceedings of the 26th Spring Conference on Computer Graphics, SCCG '10*, pages 77–84, New York, NY, USA, 2010. ACM.
- [NGHJ18] Jan Novák, Iliyan Georgiev, Johannes Hanika, and Wojciech Jarosz. Monte carlo methods for volumetric light transport simulation. *Computer Graphics Forum (Proceedings of Eurographics - State of the Art Reports)*, 37(2), may 2018.
- [NSTN93] Tomoyuki Nishita, Takao Sirai, Katsumi Tadamura, and Eihachiro Nakamae. Display of the earth taking into account atmospheric scattering. In *Proceedings of the 20th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, SIGGRAPH '93*, pages 175–182, New York, NY, USA, 1993. ACM.