Volume Rendering 方程式から大気散乱モデルを導く

2018 年 7 月 28 日

この記事はレイトレ合宿 6 のアドベントカレンダー 5 週目の記事です.

1　はじめに

地球上の任意の位置と方向の大気の輝度を得るためのモデルとして, 事前計算大気散乱があります [BN08]. これを IBL 用の天球変わりに利用して, 雲を含む広大な風景をレンダリングしようとしたとき, 事前計算時に使った散乱係数を使いまわしたくなりました. そこで, この記事では [BN08] と同様の仮定を volume rendering 方程式に課すことによって大気散乱モデルを導き, レイトレーシングと大気散乱モデルが共通の法則: volume rendering 方程式 のもとに成り立っていることを確かめてみます.

2　Volume Rendering 方程式

まずは ratiative transfer 方程式 [Cha60] から出発しましょう. [NGHJ18] の表記に従えば, radiative transfer 方程式は

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) = -\mu_e(\boldsymbol{x}) L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) + \mu_a(\boldsymbol{x}) L_e(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) + \mu_s(\boldsymbol{x}) L_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}). \tag{1}$$

と与えられます. $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega})$ は, 位置 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ で方向 $\boldsymbol{\omega} = (\cos\phi \sin\theta,\ \sin\phi \sin\theta,\ \cos\theta)$ を向いた光線の輝度. 吸収 (absorption) 係数 μ_a, 散乱 (scattering) 係数 μ_s, 消散 (extinction) 係数 $\mu_e = \mu_a + \mu_s$ は, 光線の輝度が距離とともに吸収, 散乱, 消散される割合. そして L_e は媒質の自己発光の輝度, L_s は内部散乱の輝度を表しています. 内部散乱 L_s は, 位置 $\boldsymbol{x}$ での全方向からの入射輝度 L_i の総和で,

$$L_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) = \oint p(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') L_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}') d\Omega(\boldsymbol{\omega}')$$

と表されます. ここで $d\Omega(\omega)$ は微小立体角, $\oint$ は単位球面上での積分 $\oint d\Omega(\omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta d\phi$. です. $p(\omega, \omega')$ は位相関数と呼ばれ, $\boldsymbol{\omega}$ から $\boldsymbol{\omega}'$ に光線が散乱される割合を表します.

いま, この光線が $\boldsymbol{\omega}$ 方向に進むと考えて, $\boldsymbol{x}$ を距離 s を使って $\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{\omega} s$ と書きましょう. すると, radiative transfer 方程式 (1) は

$$\frac{dL(\boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{\omega})}{ds} = -\mu_e(\boldsymbol{x}(s)) L(\boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{\omega}) + \mu_a(\boldsymbol{x}(s)) L_e(\boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{\omega}) + \mu_s(\boldsymbol{x}(s)) L_s(\boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{\omega}),$$

と書き換えられます. ここで, 左辺の方向微分を書き換える際に, チェインルール*1 を使いました. この式は 1 階線形微分方程式なので, 解はすぐに*2 求まります:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{\omega}) &= T(\boldsymbol{x}(0) \to \boldsymbol{x}(s)) L(\boldsymbol{x}(0)) \\ &\quad + \int_0^s T(\boldsymbol{x}(s') \to \boldsymbol{x}(s)) \left[\mu_a(\boldsymbol{x}(s)) L_e(\boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{\omega}) + \mu_s(\boldsymbol{x}(s')) L_s(\boldsymbol{x}(s'), \boldsymbol{\omega})\right] ds', \end{aligned} \tag{2}$$

*1 $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) = \left(\frac{d\boldsymbol{x}(s)}{ds} \cdot \nabla\right) L(\boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{\omega}) = \frac{dL(\boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{\omega})}{ds}$

*2 一階線形微分方程式 $\frac{dy(x)}{dx} + p(x)y(x) = q(x)$ の一般解は

$$y(x) = ce^{-\int^x p(\xi)d\xi} + \int^x q(\zeta) e^{-\int_\zeta^x p(\xi)d\xi} d\zeta.$$

c は積分係数.

ただし,

$$T(\boldsymbol{x}(a) \to \boldsymbol{x}(b)) = \exp\left(-\int_a^b \mu_e\left(\boldsymbol{x}(t)\right) dt\right).$$

は transmittance と呼ばれています．こうして, radiative transfer 方程式から volume rendering 方程式 (2) [NGHJ18] が得られました*3

3 大気散乱モデル

3.1 仮定

天体の大気を表現するため, 次の仮定を行います.

- 大気は発光しない

$$L_e\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}\right) = 0.$$

- 複数の散乱媒質が存在する

$$\mu_s\left(\boldsymbol{x}\right) = \sum_j \mu_{sj}\left(\boldsymbol{x}\right), \quad \mu_a\left(\boldsymbol{x}\right) = \sum_j \mu_{aj}\left(\boldsymbol{x}\right), \quad \mu_e\left(\boldsymbol{x}\right) = \sum_j \mu_{ej}\left(\boldsymbol{x}\right)$$

$$\mu_s(\boldsymbol{x}) L_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) = \sum_j \mu_{sj} \oint p_j(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') L_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}') d\Omega(\boldsymbol{\omega}')$$

- 光源は平行光のみ

$$L_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) = L_{\text{sun}} \delta(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_{\text{sun}})$$ *4

- 天体は BRDF f_r の不透明な地表を持ち, 地表と大気, 大気と宇宙空間を隔てる境界がある

天体の BRDF, そして散乱媒質の空間分布はあとで与えます．また, この記事の大気散乱モデルとは, volume rendering 方程式 (2) にこれらの条件を課したモデルを指すことにします.

(2) の第 2 項の積分にある入射光 L_i は再帰的に定義されるので, それを解くためにはレイトレーシング等の手法が必要になります．しかし, ここでは簡単のため [BN08] と同様にして, 散乱の次数を n と書いたとき

$$L^{(n)} = L^{(0)} + L^{(1)} + \cdots$$

と得られるとして, volume rendering 方程式を

$$L^{(n)}(\boldsymbol{x}(s)) = T(\boldsymbol{x}(0) \to \boldsymbol{x}(s)) L^{(n)}(\boldsymbol{x}(0)) + \int_0^s T(\boldsymbol{x}(s') \to \boldsymbol{x}(s)) \mu_s(\boldsymbol{x}(s')) L_s^{(n-1)}(\boldsymbol{x}(s')) ds', \tag{3}$$

と書き直します．なお, 式が煩雑になることを避けるため, $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega})$ の引数 $\boldsymbol{\omega}$ を省略しています．いま, この式の原点の輝度 $L^{(n)}(\boldsymbol{x}(0))$ と内部散乱項の $\mu_s(\boldsymbol{x}(s')) L_s^{(n-1)}(\boldsymbol{x}(s'))$ が未知なので, 先ほどの条件のもとでこれらを求めていきましょう.

*3 CG 界隈では, radiative transfer 方程式のこの形の積分形を volume rendering 方程式と呼んでいるようなので, この記事もそれにならっています.

*4 本来, 太陽は球光源なのですが, 地球から眺めた太陽は非常に小さいのでデルタ関数で近似することにします．ここで, 法線を引数に取るデルタ関数を $\delta(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{m}) = \frac{1}{\sin\theta_n} \delta(\theta_n - \theta_m) \delta(\phi_n - \phi_m)$ と定義しておきます.

3.2 1 次散乱

3.2.1 原点の輝度 $L^{(1)}(\boldsymbol{x}(0))$

地表の法線を $\boldsymbol{n}$ としたとき, BRDF f_r の表面の輝度は, 次のように表されます [Kaj86].

$$L^{(1)}(\boldsymbol{x}(0)) = \int_{H^+} f_r(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{n}) L_i(\boldsymbol{\omega}') \, (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\omega}') \, d\Omega(\boldsymbol{\omega}')$$

ただし H^+ は単位半球面を表します. 太陽光線の大気への入射位置を $\boldsymbol{y}$ とすると, $\boldsymbol{x}(0)$ に到達する入射光は $L_i(\boldsymbol{\omega}') = T(\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}(0)) L_{\text{sun}} \delta(\boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{\omega}_{\text{sun}})$ となります. そして, $V(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x}$ が天体表面なら 1, 宇宙空間なら 0 を取る関数とすれば, $L^{(1)}$ は

$$\begin{aligned} L^{(1)}(\boldsymbol{x}(0)) &= T(\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}(0)) V(\boldsymbol{x}(0)) \int_{H^+} f_r(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{n}) L_{\text{sun}} \delta(\boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{\omega}_{\text{sun}}) (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\omega}') d\Omega(\boldsymbol{\omega}') \\ &= T(\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}(0)) V(\boldsymbol{x}(0)) f_r(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_{\text{sun}}, \boldsymbol{n}) L_{\text{sun}} (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{sun}}) \end{aligned} \tag{4}$$

と得られます.

3.2.2 内部散乱 $\mu_s(\boldsymbol{x}(s'))L_s^{(0)}(\boldsymbol{x}(s'))$

先ほどと同様にして, 入射光を $L_i(\boldsymbol{\omega}') = T(\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}(s')) L_{\text{sun}} \delta(\boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{\omega}_{\text{sun}})$ と書けば

$$\begin{aligned} \mu_s(\boldsymbol{x}(s')) L_s^{(0)}(\boldsymbol{s}(s')) &= \sum_j \mu_{sj}(\boldsymbol{x}(s')) \oint p_j(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') T(\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}(s')) L_{\text{sun}} \delta(\boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{\omega}_{\text{sun}}) d\Omega(\boldsymbol{\omega}') \\ &= L_{\text{sun}} T(\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}(s')) \sum_j \mu_{sj}(\boldsymbol{x}(s')) p_j(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_{\text{sun}}) \end{aligned} \tag{5}$$

となります.

3.3 多重散乱

1 次散乱以降 ($n \geq 1$) は, 前回の結果を光源として用います.

3.3.1 原点の輝度 $L^{(n)}(0)$

$$L^{(n)}(\boldsymbol{x}(0)) = V(\boldsymbol{x}(0)) \int_{H^+} f_r(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{n}) L^{(n-1)}(\boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{\omega}') (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\omega}') d\Omega(\boldsymbol{\omega}') \tag{6}$$

3.3.2 内部散乱 $\mu_s(\boldsymbol{x}(s'))L_s^{(n)}(\boldsymbol{x}(s'))$

$$\mu_s(\boldsymbol{x}(s')) L_s^{(n)}(\boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{\omega}) = \sum_j \mu_{sj}(\boldsymbol{x}(s')) \oint p_j(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') L^{(n-1)}(\boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{\omega}') d\Omega(\boldsymbol{\omega}') \tag{7}$$

3.4 大気散乱モデル

最後に, 散乱媒質と地表の BRDF を与えます. まず, 散乱はレイリー散乱 R とミー散乱 M を仮定し, それらの濃度が地表からの高さ $h(\boldsymbol{x})$ に応じて指数関数的に減衰するとします:

$$\sum_j \mu_{aj}(\boldsymbol{x}) = \sum_j^{R,\,M} \beta_{aj} e^{-\frac{h(\boldsymbol{x})}{H_j}}, \quad \sum_j \mu_{sj}(\boldsymbol{x}) = \sum_j^{R,\,M} \beta_{sj} e^{-\frac{h(\boldsymbol{x})}{H_j}}, \quad \sum_j \mu_{ej}(\boldsymbol{x}) = \sum_j^{R,\,M} \beta_{ej} e^{-\frac{h(\boldsymbol{x})}{H_j}} \tag{8}$$

ここで, H_j はスケールハイトと呼ばれるパラメータです. 地表の BRDF は反射率 ρ の Lambertian

$$f_r(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{n}) = \frac{\rho}{\pi} \tag{9}$$

とします.

これら (4, 5, 6, 7, 8, 9) を (3) に代入することで, 最終的な大気散乱モデルを得ます.

$$L^{(n)}(\boldsymbol{x}(s)) = T(\boldsymbol{x}(0) \to \boldsymbol{x}(s))L^{(n)}(\boldsymbol{x}(0)) + \int_0^s T(\boldsymbol{x}(s') \to \boldsymbol{x}(s))\mu_s(\boldsymbol{x}(s'))L_s^{(n-1)}(\boldsymbol{x}(s'))ds'$$

$$T(\boldsymbol{x}(a) \to \boldsymbol{x}(b)) = \exp\left(-\sum_j \beta_{ej} \int_a^b e^{-\frac{h(\boldsymbol{x}(t))}{H_j}} dt\right)$$

$$\begin{cases} L^{(1)}(\boldsymbol{x}(0)) & = L_{\mathrm{sun}} T(\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}(0))V(\boldsymbol{x}(0))\frac{\rho}{\pi}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{sun}}) \\ \mu_s(\boldsymbol{x}(s'))L_s^{(0)}(\boldsymbol{x}(s')) & = L_{\mathrm{sun}} T(\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}(s')) \sum_j^{R,\,M} \beta_{sj} e^{-\frac{h(\boldsymbol{x}(s'))}{H_j}} p_j(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{sun}}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} L^{(n)}(\boldsymbol{x}(0)) & = V(\boldsymbol{x}(0))\frac{\rho}{\pi} \int_{H^+} L^{(n-1)}(\boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{\omega}')(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\omega}')d\Omega(\boldsymbol{\omega}') \\ \mu_s(\boldsymbol{x}(s'))L_s^{(n-1)}(\boldsymbol{x}(s')) & = \sum_j^{R,\,M} \beta_{sj} e^{-\frac{h(\boldsymbol{x}(s'))}{H_j}} \oint p_j(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}')L^{(n-1)}(\boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{\omega}')d\Omega(\boldsymbol{\omega}') \end{cases}$$

4 さいごに

これで, volume rendering 方程式から [BN08] と同様の大気散乱モデルが得られました*5. ここで行った仮定や近似が妥当であれば, 大気散乱モデルの散乱媒質の設定 (8) はレイトレースでそのまま流用できそうです. また 原点の輝度 $L(\boldsymbol{x}(0))$ から, IBL 用の天球のみならず, 地上に到達する太陽光の情報も取り出せそうなことがわかりました. この記事では触れなかった, 事前計算の具体的な方法について興味がある方は, [BN08] や [EK10] を参照してみてください.

参考文献

[BN08] Eric Bruneton and Fabrice Neyret. Precomputed atmospheric scattering. *Computer Graphics Forum*, 27(4):1079–1086, 2008.

[Cha60] Subrahmanyan Chandrasekhar. *Radiative transfer*. Dover Publications Inc., 1960.

[EK10] Oskar Elek and Petr Kmoch. Real-time spectral scattering in large-scale natural participating media. In *Proceedings of the 26th Spring Conference on Computer Graphics*, SCCG '10, pages 77–84, New York, NY, USA, 2010. ACM.

[Kaj86] James T. Kajiya. The rendering equation. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 20(4):143–150, August 1986.

[NGHJ18] Jan Novák, Iliyan Georgiev, Johannes Hanika, and Wojciech Jarosz. Monte carlo methods for volumetric light transport simulation. *Computer Graphics Forum (Proceedings of Eurographics - State of the Art Reports)*, 37(2), may 2018.

*5 地形の考慮など, いくつか細かい過程は異なるので, 厳密に同じではありません.