1. 存在一个闭集 A 使得 $(A)^{(\omega+1)} = \emptyset \neq (A)^{(\omega)}$

按如下步骤定义集合：

- $A_0 \triangleq \{0\}$
- $A_1 \triangleq \{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, ..., \frac{n}{n+1}, ...\}$ (是闭集)
- $A_2 \triangleq \{2\} \cup (1 + \frac{1}{2} \times A_1) \cup (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times A_1) \cup ... \cup (1 + \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \times A_1) \cup ...$ (是闭集)

  ......
- $A_k \triangleq \{n\} \cup \bigcup_{i \in \omega} (k + \frac{i}{i+1} + \frac{1}{(i+1)(i+2)} \times A_{k-1})$

  ......

定义 $A_\omega \triangleq \bigcup_\omega A_i$(是闭集)，$A_\omega$ 中有 ω^ω 级的元素。$A_\omega^{(\omega)} = \emptyset$. 故还需进行一次压缩, 定义 A：

$$A = \{\frac{t}{t+1} \mid t \in A\} \cup \{1\} \qquad \text{(是闭集)}$$

有 $A^{(w)} = \{1\}$, $A^{(\omega+1)} = \emptyset$, 故存在闭集 A 使得题设成立。

2. 若把 $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ 定义为存在 B 到 A 的满射，则康托伯恩斯坦定理是否依然成立？

成立.

设 $f : A \to B, g : B \to A$ 均为满射。

- 因 $\forall b \in B : \ \exists a \in A : \ f(a) = b$, 不妨构造：$S_b = \{a \mid a \in A \wedge f(a) = b\}$, 易知 $A = \bigcup_{b \in B} S_b$ 且 $\forall b_1 \neq b_2 : \ S_{b_1} \cap S_{b_2} = \emptyset$. 根据选择公理，存在一个集合 A'，对每个 S_b，A' 包含且仅包含一个 S_b 中的元素。构造 $f' : B \to A'$, 使得 $\forall b \in B : \ \exists a \in A' : \ f'(b) = a$，即 f' 是一个单射。
- 同理构造 g'

根据康托伯恩斯坦定理，存在 A 到 B 的单射 g' 和 B 到 A 的单射 f'，因此存在 A 到 B 的双射，证毕。

3. 若 α, β 是序数，且 $f : \alpha \to \beta$ 是保序双射 (同构), 则 $\alpha = \beta$ 且 f 是恒等映射

Solution:

不妨定义：$g = f^{-1}$，易知 g 也是保序双射

- 证明子命题 1：$\forall a \in \alpha : \ a \subseteq f(a)$.

  定义 $T = \{t \mid f(t) \in t\}$, 反设 $T \neq \emptyset$. 由良序公理，T 中有极小元 t_0.

  由 $t_0 \in t$，故 $f(t_0) \in t_0$。设 $t_0' = f(t_0)$, 由 f 保序且一一且 $t_0' \in t_0$, 有 $f(t_0') \subset f(t_0)$, 由序数性质知 $f(t_0') \in f(t_0)$，即 $f(t_0') \in t_0'$, 故 $t_0' \in T$. 与 t_0 是极小元矛盾。故子命题成立。

  同理可证子命题 2：$\forall b \in \beta : \ b \subseteq g(b)$
- 证 $\alpha = \beta$. 反设 $\alpha \neq \beta$, 则 $\alpha \in \beta$ 或 $\beta \in \alpha$, 不妨假设 $\beta \in \alpha$.

  由 $\beta \in \alpha$, 知 $\exists \gamma : \ \gamma \in \alpha \wedge \gamma \notin \beta$. 由三歧性即 $\gamma = \beta \vee \gamma \in \beta$。又因 $f(\gamma) \in \beta$，得 $f(\gamma) \in \gamma$. 与子命题矛盾。

  同理可证 $\alpha \in \beta$ 的情况有矛盾。故 $\alpha = \beta$.
- 证 f 恒等

  假设 f 不恒等，即 $\exists a : \ f(a) \neq a$, 由三歧性有 $f(a) \in a$ 或 $a \in f(a)$

  - $f(a) \in a$: 与子命题 1 矛盾

- $a \in f(a)$: 设 $f(a)=b$, 则 $g(b) \in b$ 与子命题 2 矛盾

故 $\forall a: f(a)=a$, f 是恒等映射。

(保序：$f: S \to T, \forall s_1\ s_2 \in S:\ s_1 \subseteq s_2 \implies f(s_1) \subseteq f(s_2)$)

4. 任何一个实数集合都是一个可数集与一个无孤立点集的不交并
设 $A \subseteq \mathbb{R}$ 为实数集合，记 $A^{(k)}$ 为 A 第 k 次求导的结果。

- $\exists \alpha: \forall \alpha > \gamma: A^{(\alpha)} = (A^{(\alpha)})' = A^{(\gamma)}$
  证：
  - γ 存在：每求一次导必然去掉至少一个有理数对 (p,q), 且对任意 $x \neq y$ 且 $x\ y$ 为孤立点，有理数对不相交 (否则与 $x \neq y$ 矛盾)，故 $(p_x, q_x) \neq (p_y, q_y)$. 由此 $\alpha < \aleph_1$(否则与 $\overline{\overline{\mathbb{Q}}} = \aleph_0$ 矛盾)。
  - 证明对所有 $\alpha' > \alpha$ 成立:
    若 α 是后继序数，则存在 $\beta \geq \alpha$, $A^{(\alpha)} = A^{(\beta+1)}$, 由归纳假设知 $A^{(\alpha)} = (A^{(\beta)})' = (A^{(\gamma)})' = A^{(\gamma)}$
    若 α' 是极限序数, 则 $A^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\gamma} A^{(\beta)} = \bigcup_{\gamma \leq \beta < \alpha} A^{(\beta)}$。由归纳假设知满足条件的 $A^{(\beta)} = A^{(\gamma)}$，故 $A^{(\alpha)} = A^{(\gamma)}$

  $A^{(\gamma)}$ 是无孤立点集 (否则与 $A^{(\gamma)} = A^{(\gamma+1)}$ 矛盾)

- $B_\alpha = \{x \mid x \in A^\alpha \wedge x \notin A^{(\alpha+1)}\}$, $\bigcup\limits_{\alpha<\gamma} B_\gamma$ 是可数集。
  证：定义 $C_\alpha = \{(p,q) \mid x\text{是}A^\alpha\text{中的孤立点且}(p,q) \cap A^\alpha = \{x\}\}$. 可建立 $\bigcup\limits_{\alpha<\gamma} B_\alpha$ 到 $\bigcup\limits_{\alpha<\gamma} C_\alpha$ 上的双射, 由因为 $\bigcup\limits_{\alpha<\gamma} C_\alpha$ 的势小于等于 $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ 的势，故 $\bigcup\limits_{\alpha<\gamma} B_\alpha$ 可数。
- 而 $A = (\bigcup\limits_{\alpha<\gamma} B_\alpha) \uplus A^{(\gamma)}$, 其中前者是可数集，后者是无孤立点集。证毕

5. 证明良序公理等价于对每个集合 X，存在一个函数 $f: \mathcal{P}(X) \to X$, 使得对所有的 $Y \subseteq X, Y \neq \emptyset \implies f(Y) \in Y$

Solution:

良序公理：

$$\forall S:\ \forall T \subseteq S: \exists t \in T:\ \forall t' \in T:\ t \subseteq t'$$

选择函数公理：

$$\forall S:\ \exists f: \mathcal{P}(S) \to S:\ \forall T \subseteq S:\ T \neq \emptyset \implies P(T) \in T$$

- 良序公理 $\to$ 选择函数公理：$\forall Y \in \mathcal{P}(X)$ 且 $Y \neq \emptyset$，由良序公理可从中选出其极小元 y。定义 $f: \mathcal{P}(X) \to X$，$\forall Y \in \mathtt{dom}(f) \wedge Y \neq \emptyset$, $f(Y)$等于 Y 中的极小元. f 是符合条件的选择函数。
- 选择函数公理 $\to$ 良序公理：只需找到某个序数 α, 建立 α 到 X 的一一映射即可。即将 $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n, ... \in \alpha$ 一一映到 X 上, 定义 G 如下：

$$\begin{aligned}
&G(\alpha_0) = f(X) \\
&G(\alpha_1) = f(X \setminus \{G(\alpha_0)\}) \\
&G(\alpha_2) = f(X \setminus \{G(\alpha_0), G(\alpha_1)\}) \\
&...... \\
&G(\alpha_k) = f(X \setminus \{G(\alpha_i) \mid \alpha_i \in \alpha_k\}) \\
&......
\end{aligned}$$

由 $\forall Y:\ f(Y) \in Y$, G 最终会将序数列与 X 建立一一映射，因此知 X 是良序的。

综上所述，二者等价。

6. 每个不可数的 G_δ 实数集都有一个非空的完备子集

某不可数 G_δ 集 A 描述如下

$$A = \bigcap_{n\in\omega} U_n \qquad \text{其中}U_i\text{为开集}$$

a. 构造实数集 [0,1] 到 A 的子集 D 的映射 h

由第四题结论，A 可以表达为：

$$A = B \cup C \qquad \text{其中}B\text{是可数集，}C\text{为无孤立点集}$$

C 不空 (因 A 不可数且 B 可数) 且 $C \subseteq \bigcap_{n\in\omega} U_n$

故其中至少有一点 x_0，因此可以找到某个区间 $L \subseteq U_0$(不妨令 $|L| < 1$) 使得

$$x_0 \in C \cap L$$

由 C 无孤立点，故必存在 $x_1 \neq x_0$ 使得

$$x_1 \in C \cap L$$

知闭区间 $I = [x_0, x_1] \subseteq L$。将 x_0, x_1 分开，分别用区间 L_0, L_1(不妨令 $|L_0|, |L_1| < \frac{1}{2}$) 包含之即

$$x_0 \in L_0 \wedge x_1 \in L_1 \wedge L_0 \cap L_1 = \emptyset$$

同理可在 L_0 中找到除 x_0 外的一点 x_{01}, L_1 中除 x_1 外一点 x_{11}, (为方便记名，上一层的点 x_0 更名为 x_{00}, x_1 更名为 x_{10}, 每下一层，末尾加一个 0) 继续分割下去...... 下图描述了这一过程，同一层集族中的集合互不相交：

$$I = [x_0, x_1] \qquad 1$$

$$I_0 = [x_{00}, x_{01}] \qquad I_1 = [x_{10}, x_{11}] \qquad \frac{1}{2}$$

$$I_{00} = [x_{000}, x_{001}] \qquad I_{01} = [x_{010}, x_{011}] \qquad I_{10} = [x_{100}, x_{101}] \qquad I_{11} = [x_{110}, x_{111}] \qquad \frac{1}{4}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \qquad \ldots$$

定义映射 $f: Z \to C$, 其中

$$f(z) = x_z$$

- 定义 Z: 长度是可数无穷多的 01 字符串构成的集合 ($Z = \{0,1\}^\omega$)
- 定义 x_z: 由 $\{I_{z\upharpoonright n}\}$ [1] $(n \in \omega)$ 是一个区间套，根据区间套定理，在实数系中存在唯一的点 x_z 使得 $x_z \in I_{z\upharpoonright n}$

易知 f 为单射 (若 $z_0 \neq z_1$ 则 $f(z_0) \neq f(z_1)$), 由 f 定义知其为是满射。记 $D = \texttt{range}(f)$。

定义 $g: [0,1] \to Z$, $g(x)$ 为实数 x 的二进制表示，易知 g 是 $[0,1]$ 到 Z 的同构。

定义 $h = f \circ g$。

[1] $I_{z\upharpoonright n}$: 设字符串 z 截取前 n 位为 z', 则 $I_{z\upharpoonright n} = I_{z'}$. 例如 $I_{0011\upharpoonright 3} = I_{001}$

b. 证明 h 是连续双射

因 f, g 为双射，故 $h : [0,1] \to D$ 为双射

任取 $y_1, y_2 \in [0,1]$, 对任意 $\xi > 0$, 取 $\delta = 2^{\lfloor \log_2 \xi \rfloor}$ 有：

$$|y_1 - y_2| < \delta \implies |h(y_1) - h(y_2)| < \xi$$

故 h 为 $[0,1]$ 上的连续函数。同理可证 h^{-1} 为 D 上的连续函数。

c. 证明 D 是完备集

- D 无孤立点：任取 D 中元素 y，在 $[0,1]$ 中取收敛于 $h^{-1}(y)$ 的数列 $\{x_n\}$, 因 h 连续, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = y$, 故 y 是 D 中聚点。

- D 是闭集：对任意 D 中的柯西列 $\{y_n\}$, 由 h 连续知 $\{h^{-1}(y_n)\}$ 也是柯西列，记 $\lim\limits_{n\to\infty} h^{-1}(y_n) = x_0$, 因 $[0,1]$ 是闭集，故 $x_0 \in [0,1]$, 因此 $h(x_0)$ 有定义且序列 $\{y_n\} \to h(x_0)$, $h(x_0) \in D$。因此 D 内所有聚点都在 D 中，故 D 为闭集。

综上所述，D 不可数且完备，故任意不可数的 G_δ 实数集 A 都有一非空完备子集。