$\mathcal{O}$ 是序数集合 (Ordinals)，$\mathcal{C}$ 代表基数集合 (Cardinals)

1 基数

定义:

$\alpha \in \mathcal{C}$ `if` $\alpha \in \mathcal{O} \wedge \forall \beta \in \mathcal{O}:\ \beta < \alpha \implies \overline{\overline{\beta}} < \overline{\overline{\alpha}}$

基数与序数的讨论

- 有穷上：不同序数必然对应不同序数
  例：1 对 1，n 对 n; 故有穷上每个序数都是基数
- 无穷上：不同序数可能对应同一基数
  例：$\omega, \omega+1$ 都对 $\aleph_0$(易证 $\omega, \omega+1$ 等势 (cardinality)); 最小的无穷基数是 $\aleph_0$

我对 $\aleph_0, \aleph_1 ...$ 的理解

$\aleph_0 = \omega = \{\omega, \omega+1, \omega+2, ..., \omega+n\}$ 中最小的一个
$\aleph_1 = \omega+\omega = \{\omega+\omega, \omega+\omega+1, ..., \omega+\omega+n\}$ 中最小的一个
...

$\aleph_1$ 为何存在? 5:15

定义 $A = \{\alpha \mid \alpha > \aleph_0\}$, 存在一个 $\alpha_0 \in A$, 由集合定义，对任意 $\beta < \alpha_0$, $\beta \leq \aleph_0 < \alpha_0$ 成立。α_0 即为 $\aleph_1$. 对一般的 κ 也有 κ^+(即 κ 后面的一个基数) 存在

极限基数与后继基数

- Limit Cardinal: $\forall$
  例：ω, 由 $\forall n < \omega:\ n^+ < \omega$; 又例 $\aleph_\omega, \aleph_{\omega+\omega}, ...$
- Successor Cardinal: $\exists \kappa:\ \kappa = \lambda^+$
  例：$\aleph_1, \aleph_2, ...$

并非简单自然数推广：共尾性

$$\mathtt{cf}(\kappa) \triangleq \mathtt{min}\{\alpha \mid \exists f : \alpha \to \kappa:\ \forall \lambda < \kappa:\ \exists \beta < \alpha : f(\beta) > \lambda\}$$

注解：f 理解为 α 到 κ 上的无界函数。
试求 $\mathtt{cf}(\aleph_\omega)$

- 定义 $f : \omega \to \aleph_\omega$ 为：
  $$f(n) = \aleph_n$$
  由 f 无界，故 $\mathtt{cf}(\aleph_\omega) \leq \omega$
- 假设 $\mathtt{cf}(\aleph_\omega) < \omega$, 则存在 n 使得 n 到 $\aleph_\omega$ 的无界映射 f 存在，不失一般性定义 f 为：
  $$f(i) = \aleph_{g(i)} \qquad \text{其中}g\text{为有界函数}$$
  则 $\forall i < n:\ f(i) < \aleph_{\sum\limits_{j<n} g(j)+1} < \aleph_\omega$, 与 f 是无界函数矛盾。

因此 $\mathtt{cf}(\aleph_\omega) = \omega$

满足 $\mathtt{cf}(\kappa) = \kappa$ 的 κ 称正则基数。$\mathtt{cf}(\aleph_0) = \omega$ 故 $\aleph_0$ 是正则基数。$\aleph_\omega$ 不满足此性质, 称奇异基数。

良序与良序公理 (well-ordering)

良序：

$$\begin{aligned}
&\mathtt{well\text{-}order}(\langle A, \preceq\rangle) \triangleq \mathtt{total}(\langle A, \prec\rangle) \land (\forall B \subseteq A:\ B \neq \emptyset \implies \exists b:\ \mathtt{min}_{\preceq}(B, b))\\
&\mathtt{total}(\langle A, \preceq\rangle) \triangleq (\forall x\ y \in A:\ x \preceq y \lor y \preceq x)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \land(\forall x\ y \in A:\ x \preceq y \land y \preceq x \implies x = y)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \land(\forall x\ y\ z \in A:\ x \preceq y \land y \preceq z \implies x \preceq z)\\
&\mathtt{min}_{\preceq}(B, b) \triangleq \forall x \in B:\ b \preceq x
\end{aligned}$$

良序公理：

$$\forall A:\ \exists \alpha \in \mathcal{O}:\ \exists f : \alpha \to A\text{是双射}$$

注解：序数及其关系是全序且良序，此公理即意为对任何一个集合 A，都可以定义 A 上的一个全且良的关系。

集合的基数

由良序公理能定义任何一个集合 A 的基数 (之前定义的是序数集合上的)

$$|A| = \mathtt{min}\{\alpha \mid \overline{\overline{\alpha}} = \overline{\overline{A}}\}$$

证明 $|A|$ 是基数：1. 根据良序公理 $|A|$ 存在. 2. 假设 $|A|$ 不是基数，则存在 $\beta < |A|$ 使得 $\overline{\overline{\beta}} = \overline{\overline{A}}$ 成立，故 $|A| \leq \beta$ 矛盾。

例：$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$

漂亮的闭集刻画：完备集定理 非常重要!!!

任何一个不可数闭集都是一个可数集和一个完备集的不交并

证明：

利用良序公理计算集合的基数

此例题用于阐述如何计算基数：证明任意无穷集合 A 有 $|A \times A| = |A|$ 成立

证明：

练习：

试求 $\mathtt{cf}(\aleph_1)$. 证明 $\mathtt{cf}(\aleph_n) = \aleph_n$, 所有后继基数都是正则基数。