稠密无端点全序

定义 DLWP理论包括如下语句：

- $\forall x:\ \neg(x<x)$
- $\forall x\ y:\ x<y \vee y<x \vee x=y$
- $\forall x\ y\ z:\ x<y \wedge y<z \implies x<z$
- $\forall x\ y: \exists z:\ x<y \implies x<z<y$
- $\forall x\ \exists y\ z:\ y<x<z$

注：前三条件代表全序

DLWP模型举例

是 $(\mathbb{Q},<),(\mathbb{R},<),((0,1),<)$

非 $(\mathbb{N},<),((0,1],<)$

定理：所有满足 DLWP且可数的模型都是同构的

证明 (back and forth)：不妨设两个满足题设的模型 $\mathcal{M}\ \mathcal{N}$, 由于二者可数，其定义域枚举如下：

$$M: m_1, ..., m_k, ...$$
$$N: n_1, ..., n_l, ...$$

定义 $f: M \to N$

- 第一步：$f(m_1)=n_1$
- k+1 步：
  - 若 $m_{k+1} \in \texttt{dom}(f)$, 跳过此小步; 否则：将已定义原像按序枚举为 $m_{i1}<m_{i2}<...<m_{ix}$，对应映射值 $f(m_{i1}), f(m_{i2}), ..., f(m_{ix})$，因我们之前定义的方式是保序的，故 $f(m_{i1})<f(m_{i2})<...<f(m_{ix})$; 若：
    - $m_{k+1}>m_{ix}$: 由 $\mathcal{N} \models \texttt{DLWP}$，故存在 $z \in N$ 使得 $f(m_{ix})<z$ 成立，定义 $f(m_i)=z$
    - $m_{k+1}<m_{i1}$: 同理存在 $y \in N$ 使得 $f(m_{i1})>y$ 成立，定义 $f(m_i)=y$
    - $m_{i(j)}<m_{k+1}<m_{i(j+1)}$, 则存在 $z \in N$ 使得 $f(m_{i(j)})<z<f(m_{i(j+1)})$, 定义 $f(m_i)=z$
  - 同理再看 n_{k+1}, 不属于 $\texttt{range}(f)$ 跳至下一步，否则：将已定义像按序枚举为 $n_{i1}, n_{i2}, ..., n_{ix}$, 对应逆映射值 $f^{-1}(n_{i1}), f^{-1}(n_{i2}), ..., f^{-1}(n_{iy})$，有 $f^{-1}(n_{i1})<f^{-1}(n_{i2})<...<f^{-1}(n_{iy})$. 若：
    - $n_{k+1}>n_{iy}$: 由 $\mathcal{M} \models$DLWP，故存在 $z \in M$ 使得 $f^{-1}(n_{ix})<z$ 成立，定义 $f(z)=n_{k+1}$
    - $n_{k+1}<n_{i1}$: 同理存在 $y \in M$ 使得 $f(n_{i1})>z$ 成立，定义 $f(z)=n_{k+1}$
    - $n_{i(j)}<n_{k+1}<n_{i(j+1)}$, 则存在 $z \in M$ 使得 $f^{-1}(n_{i(j)})<z<f^{-1}(n_{i(j+1)})$, 定义 $f(z)=n_{k+1}$

由定义知 f 是保序双射，故 $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$