Universidade de São Paulo (USP)

Faculdade de Economia, Administração, Contabilidade e Atuária (FEA)

IA e ML Aplicados a Finanças

Prof. Leandro Maciel

AULA 9: Otimização e Seleção de Carteiras

Agenda

1. Otimização

- Análise de decisão, em geral, envolve um processo de **otimização**;
- **Economia** $\rightarrow$ alocação ótima de recursos escassos por meio de **escolhas**;
- Seleção da escolha ótima $\rightarrow$ resolver um **problema de otimização**;
- Otimizar $\rightarrow$ maximizar/minimizar um objetivo (ou função objetivo);
- Eficiência na otimização $\rightarrow$ melhores resultados (envolve \$);
- Maximizar lucro, minimizar custos, otimizar processos...

- Técnicas de **IA/ML**: otimizar $\rightarrow$ encontrar "melhor modelo";

- "Melhor estrutura ajustada aos dados" $\rightarrow$ **processo de otimização**.

- **Regressão Linear** $\rightarrow$ minimizar soma quadrado dos resíduos:

$$\min_{(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_k)} SQR = \min_{(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_k)} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{1i} - \ldots - \hat{\beta}_k x_{ki})^2$$

- $\beta_0^*, \beta_1^*, \ldots, \beta_k^*$ $\rightarrow$ escolha ótima $\rightarrow$ menor valor SQR;

- Método de otimização não condicionada: derivadas iguais a zero.

- **Modelos ARMA** $\rightarrow$ resíduos do modelo:

$$\epsilon_t = y_t - \omega - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i y_{t-i} - \sum_{i=0}^{q} \beta_i \epsilon_{t-i}, \;\; t = 1, 2, \ldots, T$$

- Probabilidade conjunta das realizações $\{\epsilon_1,\ \epsilon_2, \ldots,\ \epsilon_T\}$ (amostra):

$$\mathcal{L}(\theta|\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_T) = f_\theta(\epsilon_1) \cdot f_\theta(\epsilon_2) \cdot \ldots \cdot f_\theta(\epsilon_T) = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-\epsilon_t^2}{2\sigma^2}\right)$$

- Objetivo: maximizar função verossimilhança $\mathcal{L}(\theta|\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_T)$;

- $\omega^*, \alpha_1^*, \ldots, \alpha_p^*, \beta_1^*, \ldots, \beta_q^* \rightarrow$ "fazem a amostra mais provável".

1. Otimização

- **Redes Neurais Artificiais** $\rightarrow$ pesos ótimos;
- **Regressão Logística** $\rightarrow$ parâmetros associados ao melhor ajuste;
- Otimização mais complexa: funções objetivo não lineares;
- Problemas condicionados $\rightarrow$ com restrições nos parâmetros;
- "Maximizar lucro sujeito a restrições de insumos"...
- Como encontrar essas soluções **ótimas**?

- Etapas em um processo de **otimização**:

  1. Definir função objetivo (maximização ou minimização?);

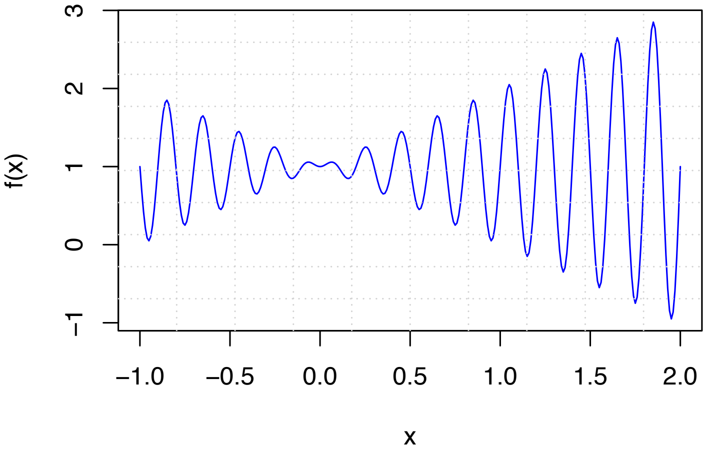
  2. Verificar quais são as **variáveis de escolha**.

  3. Definir restrições:

  Delimitar possíveis valores das variáveis de decisão $\rightarrow$ **Espaço de Busca**;

  4. Obter solução **extrema** da função objetivo (máx. ou mín.).

- Qual o máximo de $f(x) = xsen(10\pi x) + 1$, em $-1 \leq x \leq 2$?



1. Otimização

- Problemas complexos têm várias variáveis e grandes espaços de busca;
- Técnicas tradicionais: baseadas em **gradiente** (Hessiana);
- Muitos algoritmos não conseguem localizar **Ótimo Global**;
- Na presença de múltiplos ótimos locais a dificuldade é maior;
- Métodos exigem funções objetivo continuamente diferenciáveis;
- Alternativa: **Algoritmos Genéticos** $\rightarrow$ técnica de IA;
- Antes, aplicação clássica de otimização em finanças...

2. Seleçao de Carteiras

- Diversos ativos estão disponíveis para aplicação;
- Seleção dos potenciais investimentos: análise fundamentalista ou técnica;
- Quanto investir do meu capital em cada ativo selecionado?
- **Risco e retorno** $\rightarrow$ base na tomada de decisão.

2. Seleçao de Carteiras

- **Moderna Teoria do Portfólio** $\rightarrow$ Proposta por Harry Markowitz;
- Nobel economia 1990 (+ Sharpe e Miller);
- Principal ideia: **diversificação**.

MARKOWITZ, H. M. Portfolio selection. **Journal of Finance**, Vol. 7, p. 77-91, 1952

- Objetivo $\rightarrow$ compor uma carteira **ótima** de ativos;
- Definimos o peso w (% do capital total) de cada ativo na carteira;
- Para uma carteira composta por n ativos, o retorno esperado é:

$$\bar{R}_p = (\bar{R}_1 \times w_1) + (\bar{R}_2 \times w_2) + \ldots + (\bar{R}_n \times w_n) = \sum_{j=1}^{n} \bar{R}_j \times w_j$$

$$\text{Retorno} \rightarrow R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

- Se $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \rightarrow$ carteira totalmente investida.

- Precisamos agora definir o risco de uma carteira...
- Medida mais complexa do que o retorno esperado;
- Risco mensurado como variância (desvio-padrão);
- Em uma carteira com dois ativos (A e B):

$$\sigma_p^2 = \text{Var}(\bar{R}_p) = \text{Var}(w_A \bar{R}_A + w_B \bar{R}_B)$$

- Propriedade: $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \cdot \text{COV}(X, Y)$.

- Risco, desvio-padrão, da carteira:

$$\sigma_p = \sqrt{w_A^2 \times \sigma_A^2 + w_B^2 \times \sigma_B^2 + 2 \times w_A \times w_B \times COV(A,B)}$$

- $COV(A,B) \rightarrow$ covariância (interrelação) entre os ativos A e B;
- $COV(A,B) > 0$ ou $COV(A,B) < 0 \rightarrow$ relação linear;
- Lembrando que:

$$COV(A,B) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}(R_{A,i} - \bar{R}_A)(R_{B,i} - \bar{R}_B)$$

- Utilizamos o conceito de **correlação** (mais intuitivo);

- **Coeficiente de correlação linear**:

$$\rho_{A,B} = \frac{COV(A,B)}{\sigma_A \times \sigma_B}, \quad -1 \leq \rho_{A,B} \leq +1$$

- $\rho = +1$ $(\rho = -1) \rightarrow$ correlação perfeitamente positiva (negativa);

- $\rho = 0 \rightarrow$ variáveis independentes ou não correlacionadas.

- O risco (desvio-padrão) do portfolio pode ser escrito como:

$$\sigma_p = \sqrt{w_A^2 \times \sigma_A^2 + w_B^2 \times \sigma_B^2 + 2 \times w_A \times w_B \times \rho_{A,B} \times \sigma_A \times \sigma_B}$$

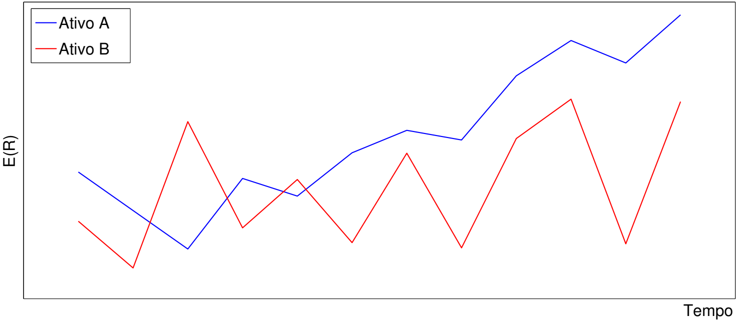
$$COV(A, B) = \rho_{A,B} \times \sigma_A \times \sigma_B$$

- **Risco da carteira depende**:
  - risco de cada ativo (desvio-padrão - σ);
  - percentual do capital aplicado em cada ativo (w);
  - correlação entre os ativos (ρ).
- Para uma carteira com n ativos:

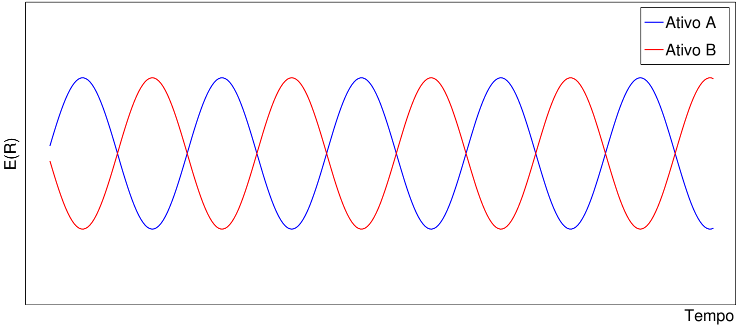
$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} w_j \times w_l \times \rho_{j,l} \times \sigma_j \times \sigma_l}$$

- Risco da carteira não é a soma dos riscos individuais;
- Risco reduz quando inserimos ativos com diferentes comportamentos;
- **Correlação** $\rightarrow$ mecanismo que permite diversificação;
- A correlação pode reduzir o risco da carteira;
- Quão mais negativa a correlação, maior a redução no risco da carteira.

- Correlação perfeitamente positiva:

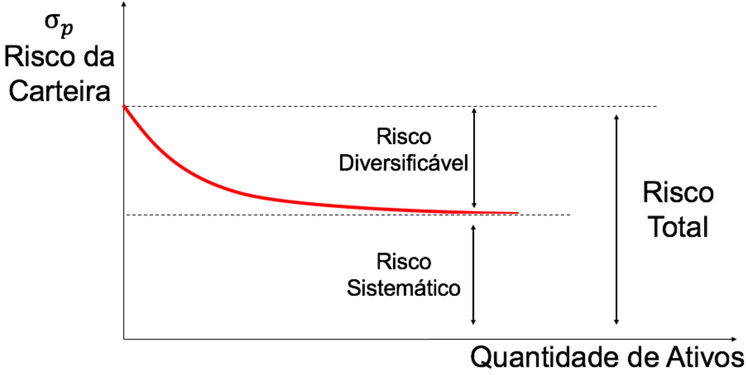


- Correlação perfeitamente negativa:



- Combinação de ativos permite a redução do risco;
- Há sempre redução do risco (exceto correl. perfeitamente positiva);
- Não há ativos perfeitamente correlacionados de forma negativa;
- Redução ocorre até certo limite;
- Risco diversificável $\times$ risco não diversificável.

- Processo de diversificação:



- Retorno da carteira com n ativos:

$$\bar{R}_p = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{bmatrix}_{1\times n} \times \begin{bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \vdots \\ \bar{R}_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \mathbf{w} \times \bar{\mathbf{R}}$$

- Risco da carteira com n ativos:

$$\sigma_p^2 = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{bmatrix}_{1\times n} \times \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\mathbf{w} \times \Sigma \times \mathbf{w}^T}$$

- Problema de otimização para obter carteira de menor risco (CVM):

$$\min_{\mathbf{w}} \sqrt{\mathbf{w} \times \Sigma \times \mathbf{w}^T}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad \text{e} \quad 0 \leq w_j \leq 1, \ \forall\, j$$

- Solução é obtida por meio de métodos baseados em gradiente;
- A CVM resulta em um determinado nível de retorno $\bar{R}_{CVM}$.

- Incrementamos agora o nível de retorno em um fator δ...

$$\min_{\mathbf{w}} \sqrt{\mathbf{w} \times \Sigma \times \mathbf{w}^T}$$

$$\text{s.a.} \quad \bar{R}_p = \bar{R}_{CVM} + \delta, \quad \sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad \text{e} \quad 0 \leq w_j \leq 1, \ \forall \ j$$

- Para cada nível de retorno obtemos combinação de menor risco;
- Pacote "*Portfolio Analytics*" $\rightarrow$ desenvolve otimização de carteiras no R.

- Próxima aula...

  - métodos de inteligência artificial para otimização;

  - algoritmos genéticos...

3. Bibliografia

ASSAF NETO, A. **Finanças Corporativas e Valor**. 7 Ed. São Paulo: Atlas, 2014. Capítulos 10 e 11.

Prof. Leandro Maciel

leandromaciel@usp.br