

IA e ML Aplicados a Finanças

Prof. Leandro Maciel

AULA 4: Regressão Linear e Precificação de Ativos

- 1 Modelo CAPM
- 2 Modelo de 3 Fatores
- 3 Modelos por Encolhimento
- 4 Bibliografia

1. Modelo CAPM

■ Decisões financeiras:

- risco e retorno são elementos cruciais;
- *trade-off* positivo.

■ Problemas:

- decidi comprar ações da Amazon, qual o retorno devo exigir (ajustado ao risco associado)?
- sou gestor na Amazon e um projeto de investimento promove uma rentabilidade de 15% a.a., devo implementar?
- ao realizar o *valuation* da Amazon, qual a taxa de desconto considerar no método DCF?

- Como precificar ativos com base no risco e retorno?
- Modelo de precificação de ativos, derivado da teoria do portfólio:

Capital Asset Pricing Model (CAPM)

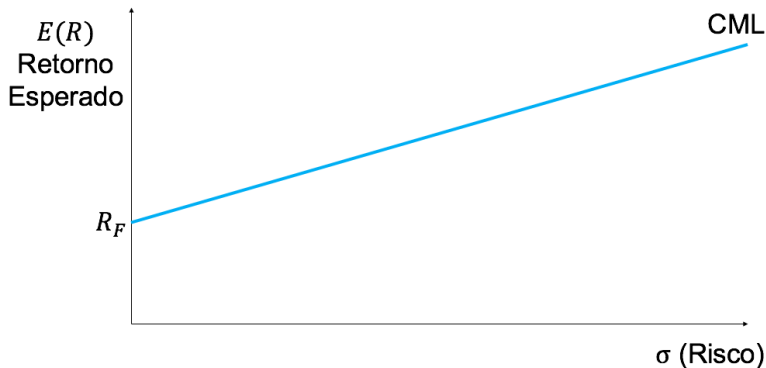
- Auxilia na tomada de decisão em condições de incerteza (risco);
- Taxa mínima exigida pelos investidores (**custo de oportunidade**);
- William Sharpe (1964, Nobel 1990) e John Lintner (1965).

Hipóteses do modelo CAPM:

- 1 Eficiência informativa do mercado para todos investidores;
- 2 Ativos têm distribuição normal (retornos) - excessos raros;
- 3 Aversão ao risco em decisões baseadas no risco e no retorno;
- 4 Não há custos de transação ou restrições para os investimentos;
- 5 Expectativas homogêneas e existência de taxa juros livre de riscos.

1. Modelo CAPM

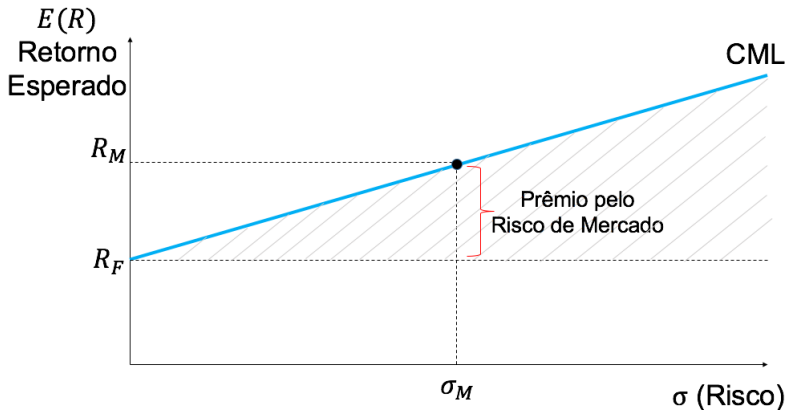
- Existe uma **Capital Market Line (CML)**:



- CML \rightarrow descreve o prêmio pelo risco dos ativos;
- **Prêmio pelo risco** \rightarrow diferença retorno com risco e sem risco: $(R_j - R_F)$;
- Existe uma carteira M , carteira de mercado, na CML;
- Carteira diversificada com ativos na exata proporção de suas liquidez;
- Diversificação \rightarrow reduz risco não sistemático;
- Brasil \rightarrow IBOVESPA; EUA \rightarrow S&P 500.

1. Modelo CAPM

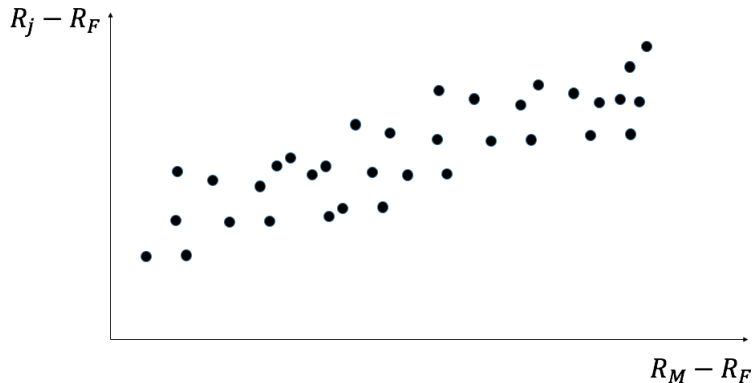
- Reta do mercado de capitais e prêmio pelo risco:



- Como estimar a CML e calcular o retorno esperado dos ativos?
- **Lógica:** CML é uma reta;
- Podemos identificar os parâmetros dessa reta;
- Amostra → dados históricos;
- Relação entre prêmio pelo risco do ativo e da carteira de mercado...

1. Modelo CAPM

- Prêmio pelo risco do ativo j e da carteira de mercado M :



- Como podemos modelar (aproximar) essa relação?
- Relação entre prêmios pelo risco → **Reta Característica** - CML:

$$(R_j - R_F) = \alpha + \beta(R_M - R_F)$$

Prêmio pelo risco da ação = $\alpha + \beta \times$ Prêmio pelo risco da carteira mercado

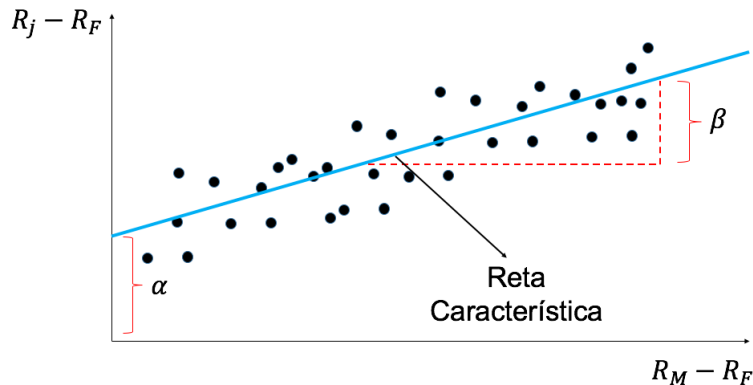
- Parâmetros da reta com interpretações específicas;
- $\beta \rightarrow$ coeficiente **beta**/parâmetro angular;

Risco sistemático do ativo em relação ao mercado ($\beta < 1$ e $\beta > 1$);

- $\alpha \rightarrow$ coeficiente **alfa**/parâmetro linear;

Retorno em excesso, quando o retorno da carteira de mercado é zero.

■ Reta característica:



- No equilíbrio de mercado, $\alpha = 0$, temos o **modelo CAPM**:

$$R_j = R_F + \beta(R_M - R_F)$$

- Risco sistemático do ativo expresso pelo coeficiente beta;
- $\beta = 1 \rightarrow$ igual M , não há risco não sistemático (diversificável);
- Maior o beta \rightarrow maior risco sistemático da ação em relação ao mercado.

Exemplo uso CAPM:

- $R_F = 12\%$ a.a.;
- $R_M = 18\%$ a.a.;
- Empresa com $\beta = 1,2$. Seu custo de capital pelo CAPM...

$$R_j = R_F + \beta(R_M - R_F)$$

$$R_j = K_e = 12\% + 1,2 \times (18\% - 12\%) = 19,2\% \text{ a.a.}$$

- $R_F, R_M \rightarrow$ conhecidos;
- Como determinar o β de uma ação?
- **Modelo CAPM** como um modelo de regressão linear simples:

$$R_j = R_F + \beta(R_M - R_F)$$

$$R_j - R_F = \beta(R_M - R_F)$$

$$y = \beta x + \epsilon \rightarrow \text{Modelo de Regressão Linear Simples}$$

- Seleccionamos dados amostrais (séries históricas):

$$(y_1, x_1) = (R_{j,1} - R_{F,1}, R_{M,1} - R_{F,1})$$

$$(y_2, x_2) = (R_{j,2} - R_{F,2}, R_{M,2} - R_{F,2})$$

\vdots

$$(y_T, x_T) = (R_{j,T} - R_{F,T}, R_{M,T} - R_{F,T})$$

- Estimamos os parâmetros da regressão:

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$$

Exemplo empírico CAPM:

- Precificar ações da Amazon;
- Dados R_F , R_M e R_j (mensais - 5 anos);
- $R_F \rightarrow$ taxa Treasury bill 1 mês;
- $R_M \rightarrow$ carteira ações NASDAQ, NYSE e AMEX;
- Estima-se o beta do CAPM (com e sem intercepto)...

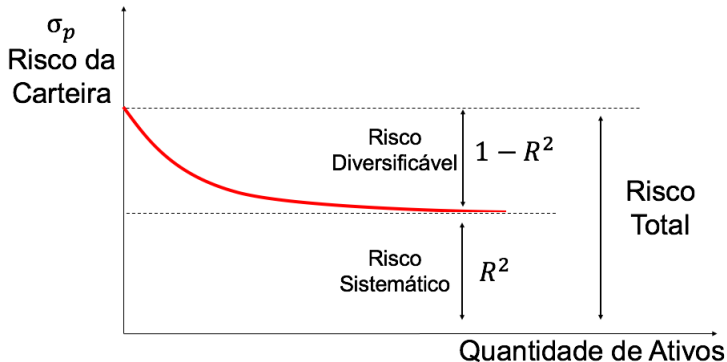
$$R_j - R_F = \alpha + \beta(R_M - R_F)$$

- Beta estimado $\hat{\beta} = 1,2588$;
- Suponha:
- $R_M - R_F = 2,00\%$ a.m.;
- $R_F = 0,30\%$ a.m.;
- Retorno exigido Amazon...

$$R_j = R_F + \beta(R_M - R_F)$$

$$R_j = K_e = 0,3\% + 1,2588 \times (2,00\%) = 2,8176\% \text{ a.m.}$$

- R^2 e riscos não sistemático e sistemático:



2. Modelo de 3 Fatores

■ Modelo CAPM:

- taxa de retorno requerida;
- taxa livre de risco;
- mais prêmio que remunera o risco sistemático (coef. beta);
- eficaz para explicar retorno de um ativo.

■ Outros fatores não auxiliam a melhor explicar os retornos?

■ Modelo de 3 Fatores de Fama & French (1993):

- risco de mercado;
- tamanho;
- valor (índice book-to-market - B/M ratio).

■ Modelo FF3F:

$$R_j = R_F + \beta_M(R_M - R_F) + \beta_{SMB}SMB + \beta_{HML}HML$$

■ SMB (*small minus big*):

- diferença entre a média de retorno das ações de empresas de pequeno porte e média de retorno das ações de empresas de grande porte);
- há uma tendência small caps performarem melhor.

■ HML (*high minus low*):

- diferença entre a média de retorno das ações com alto índice valor contábil sobre valor de mercado e a média de retorno das ações com baixo índice valor contábil sobre valor de mercado;
- há uma tendência de empresas com maior B/M ratio (subavaliadas) performarem melhor.

- Problema: determinar as carteiras SMB e HML;
- Website Kenneth R. French (Dartmouth College):
 - http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html#Developed
- Fatores calculados para mercado americano, europeu, emergentes:
- Modelo mais apropriado para carteiras (variável dependente);
- Modelo de 3 fatores para a Amazon...

- Modelo 3F Fama e French para a Amazon...

$$R_j = R_F + \beta_M(R_M - R_F) + \beta_{SMB}SMB + \beta_{HML}HML$$

$$R_j = R_F + 1,2981 \cdot (R_M - R_F) - 0,1435 \cdot SMB - 0,9235 \cdot HML$$

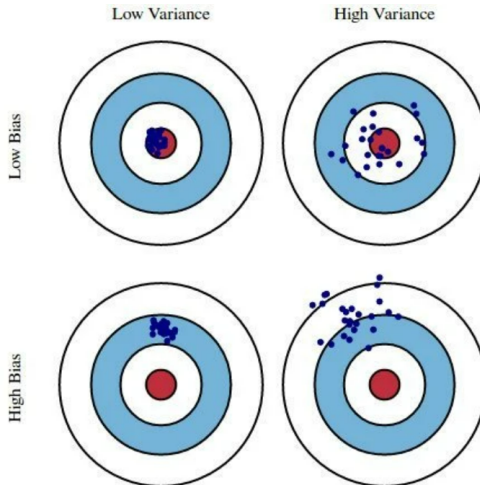
- O modelo possui maior poder explicativo?
- Quais efeitos são significativos?
- Há, também, modelos de 5 fatores de Fama e French.

3. Modelos por Encolhimento

- Características das estimativas dos modelos de regressão linear:
 - viés (*bias*) = $E(\hat{\beta}) - \beta$, mede acurácia;
 - variância - mede incerteza das estimativas dos coeficientes;
 - deseja-se mais baixos valores de viés e variância.
- Estimadores de MQO são não viesados;
- Mas, podem apresentar elevada variância, decorrente de:
 - alta correlação dos regressores;
 - número elevado de regressores.

3. Modelos por Encolhimento

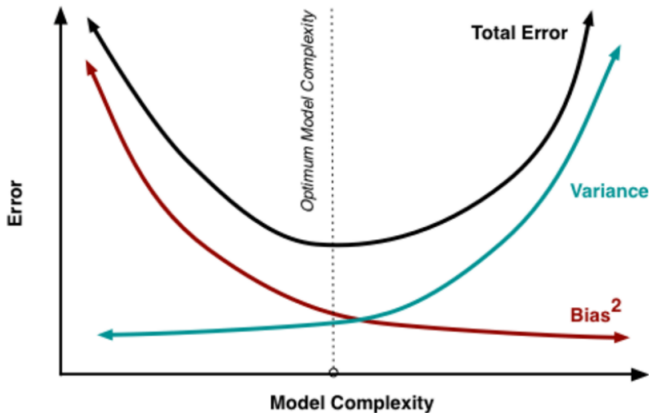
- Viés e variância:



- Como reduzir a variância dos estimadores?
 - **regularização ou encolhimento (shrinkage);**
 - reduz variância ao custo de introduzir algum viés;
 - melhora a performance preditiva dos modelos.
- Objetivo é encontrar “modelo de complexidade ótima”;
- Complexidade definida pelo número de regressores;
- Técnicas de encolhimento: **Ridge and Lasso regression models.**

3. Modelos por Encolhimento

- Viés, variância e complexidade:



- Modelo tradicional de regressão linear múltipla:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j x_j$$

- Função objetivo associada:

$$SQR = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^k \beta_j x_{ij} \right)^2$$

- Ridge regression altera a função objetivo:

$$SQR_{ridge} = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^k \beta_j x_{ij} \right)^2 + \lambda \sum_{j=1}^k \beta_j^2$$

- $\lambda \geq 0 \rightarrow$ parâmetro de regularização;
- $\lambda \sum_{j=1}^k \beta_j^2 \rightarrow$ penalidade de encolhimento;
- efeito de 'encolher' as estimativas para \sim zero (melhorar complexidade);
- Parâmetro λ selecionado por simulações (melhor ajuste).

- Limitação ridge: não 'encolhe' coeficiente para exatamente zero;
- Lasso Regression:

$$SQR_{lasso} = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^k \beta_j x_{ij} \right)^2 + \lambda \sum_{j=1}^k |\beta_j|$$

- Força alguns parâmetros a serem exatamente zero;
- Modelo lasso faz **seleção de variáveis**;
- Adequado para problemas com número elevado de variáveis;
- Pacote **glmnet** implementa modelos Ridge e Lasso.

■ Próxima aula...

- problemas de previsão;
- modelos de Redes Neurais Artificiais...

ASSAF NETO, A. **Finanças Corporativas e Valor**. 7 Ed. São Paulo: Atlas, 2014. Capítulos 12 e 13.

JAMES, Gareth, et al. **An Introduction to Statistical Learning** - With Applications in R. New York: Springer, 2013. Capítulo 6.

Prof. Leandro Maciel

leandromaciel@usp.br