数理分析手法 I 平成 23 年度期末試験 略解

平松 大輝 (03-120035)

2012 年 7 月 12 日

はじめに

平成 24 年度から，夏学期に統計を扱う講義の名称が“統計解析手法”に変更されました．しかし内容は昨年とほぼ同じだと思われるので，過去問の解答例を示したいと思います．（作成者は一学生にすぎないため，利用する際には十分注意してください．修正すべき点などがあれば知らせてくれると嬉しいです．）

ところで，今回の試験では 8，9 章のところから 1 問程度出すとの予告がありました．過去問の問 3 を確認した後は，仮説検定などの考え方を復習しておくことをおすすめします．

問 1（$cf.$ 5 月 10 日講義）

(1)
3 回コインを投げて表が 2 回出る確率は

$$ {}_3\mathrm{C}_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8} $$

である．

(2)
コインを 20 回投げるとき，

$$ \begin{aligned} E(X) &= 20 \times \frac{1}{2} = 10 \\ \mathrm{var}(X) &= 20 \times \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{2}) = 5 \end{aligned} $$

である．

(3)
正規分布で近似できる．なぜなら，この分布は二項分布で $n \to \infty$ としたときの極限分布だからである．（これはド・モアブル - ラプラスの定理により導かれる．）

問 2（$cf.$ 5 月 31 日講義）

(1)
いま，観測値 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が得られたとする．この観測値（所与）をもたらしたパラメータ θ を変数と考えると，尤度関数を $L(\theta)$ という形で表わすことができる．同じ観測結果に対しては，この尤度関数を最大にする θ から得られた標本だと考えるのが最尤法で，このときのパラメータ $\hat{\theta}$ を最尤推定量とする．

(2)
尤度関数を対数変換し，対数尤度関数の最大化を考えればよい．

$$ \log L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 $$

であるから，$\log L(\mu, \sigma^2)$ が最大となるための条件は

$$ \begin{aligned} \frac{\partial \log L(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0 \\ \frac{\partial \log L(\mu, \sigma^2)}{\partial (\sigma^2)} &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0 \end{aligned} $$

である．よって最尤推定量は

$$ \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}, \quad \hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 $$

と求められる．

問 3（$cf.$ 6 月 7 日，14 日講義）

(1)
帰無仮説：$\mu = 8$
対立仮説：$\mu > 8$

(2)
$\bar{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

(3)
帰無仮説が正しいときに，平均が c 以上になる確率が 0.01 となるような c を求めればよい．

$$Z_{0.01} = \frac{c-8}{1/\sqrt{10}} = 2.326 \Leftrightarrow c = 8.74$$

より，棄却域 R は $R = \{\bar{X}; \bar{X} > 8.74\}$ である．

(4)
帰無仮説は棄却され，使用可能時間は長くなったという結論を得る．

問 4（$cf.$ 7 月 12 日講義）

(1)
軸上での値の分散が最大になるようなものを選んで軸変換をおこなう．

(2)

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-5) = 0$$

より，第 1 主成分の寄与率は

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{5}{5+2} = \frac{5}{7}$$

である．

(3)
講義ノート参照．（変数の扱い方が異なる．）