学生証番号＿＿＿＿＿＿＿＿

名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

# 数理計画と最適化　試験

手書きのノートのみ持ち込み可
試験問題は、持ち帰らないでください。
かならず解答と一緒に提出してください。

2011/12/8
9:30～12:00

1.　以下の線形計画問題を考える

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \quad \rightarrow \max$$
$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$2x_1 + x_2 \leq 7$$
$$0 \leq x_1 \leq 3$$
$$x_2 \geq 0$$

(a)　シンプレックス法を用いてこの問題を解け。ただし初期値として$(x_1, x_2) = (0, 0)$からスタートせよ。計算過程ではシンプレックス表を用いてもよいし、式の形のままでもよい。

(b)　同様に$(x_1, x_2) = (0, 5)$からスタートしてこの問題を解け。

(c)　$(x_1, x_2)$平面にこの問題の可能領域を示し、(a)と(b)が通った探索経路を図示せよ。

(d)　(a)と(b)で最適解を与える$(x_1, x_2)$が異なる理由を1～2行で簡潔に記せ。

2.　以下の問題を解け。

　ある商品が、P、Qの二種の倉庫に保管されている。倉庫Pには在庫が１００個、倉庫Qには在庫が１５０個存在しており、また量販店での必要量はそれぞれ、A店：６０個、B店：７０個、C店：８０個であった。各倉庫から量販店への商品一つあたりの輸送コストは下表の通りである。

　これらの倉庫から、商品を量販店A、B、Cへ輸送するコストを最小化するためにはどうすればよいか。

　途中の計算過程も記せ。初期可能解は、値から判断してよりよさそうな解から始めると、後の計算が楽になる。

表１　倉庫から量販店の輸送コスト（円/個数）

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| P | １００ | １５０ | ３００ |
| Q | ２００ | ２２０ | １８０ |

3. 以下の 1 変数関数の最小化問題を考える。

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 6x + 10 \quad \to \min$$
$$x \geq 0$$

(a) 最適解を与える $x$ を $x^*$ とする。$x^*$ を解析的に求めよ。
(b) この最小化問題を数値的に解くことを考える。初期範囲として[0,4]を用い、2 分割法を用いて解の範囲を絞り込み、最終的に解の範囲が $0.5$ になるまで繰り返せ。感度は解析的に与えてよい。
(c) (b)で求めた範囲を$[\alpha, \beta]$とする。$x_0 = \alpha$を初期値としてNewton 法のステップを2回適用せよ。感度は解析的に与えてよい。

4. 以下の２変数関数の制約なし最小化問題を解くことを考える。

$$f(x) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 5x_1 - 10 \quad \to 最小化$$

(a) この関数が最小値をとる点を解析的に求めよ。
(b) この関数の最小点でのヘッセ行列を求め、その固有値、固有ベクトルを求めよ。
(c) (a), (b) で得られる情報を基に、$x_1, x_2$ 平面上に関数$f$の等高線を任意の間隔で図示せよ。
(d) 次にこの問題を最急降下法を用いて数値的に解く事を考える。初期点を$(x_1, x_2) = (0, 0)$として探査方向を決定し、ラインサーチによりステップ幅を定めた、１ステップ経過後の探索点の位置を求めよ。
(e) (c) で得られた関数の概形図に(d)の探索経路を記せ。また、その後２ステップに関する探索経路も大まかに記せ。

5. 以下の非線形計画の問題を考える。

$$f(x_1, x_2) = (x_1)^4 + (x_2)^2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 \geq 3$$

(a) ペナルティ法を使って解く場合の関数を、内点法、外点法のそれぞれについてしめせ。($r$は記号のままでよい)
(b) 外点法の場合、初期点を$(x_1, x_2) = (1,1)$としたときの共役勾配法の最初の探索方向を示せ。（ラインサーチはしなくてよい）

6. 以下の非線形計画の問題を考える。

$$f(x_1, x_2) = 3(e^{-2x_1} - 1) + 4(e^{-x_2} - 1) \to \min$$
$$x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(a) 上式に対するKuhn Tucker条件を導け
(b) (a)を解くことにより停留点を求め、各停留点における最適性を調べよ。
(c) その最適解が、グローバルな最適解であることを示せ。

7. 以下の文が、正しければ〇、間違っていれば×を書け。問題文があいまいで複数の解釈が可能な場合、その理由を横に書いておくと、出題者の意図と違う解答であっても理由がもっともであれば正解にする事もある。

(a) 行列が正方行列でなくても，特異値分解は可能である.

(b) 行列式がゼロとなる行列は、逆行列は存在しないが、一般化逆行列は必ず存在する。

(c) 全ての関数に対して最適化手法を用いる事で、グローバルな最適解を得る事ができる。

(d) 最適化手法の性能の評価は得られる解の精度のみによって決定される。

(e) 最急降下法を用いて得た解はその性質上、必ず誤差を含む。

(f) ペナルティー法（内点法）を用いて得た解は可能解であるとは限らない

(g) ＳＱＰ法とは非線形関数を線形近似して解くアルゴリズムである。

(h) 最適解が可能領域にあるとは限らない。

(i) ある制約つき最小化問題に対するラグランジュ関数からは、基の問題に対する上界を得る事ができる。

(j) 非線形計画法のプログラムを使って線形計画法の問題を解くことはできるが、逆はできない。

(k) 線形計画法の一般形は、常に標準形に変換することが可能である。

(l) 線形計画法では、最適解が存在すればそれはグローバルな最適解である。

(m) ２段階シンプレックス法は、可能解からスタートする必要がある。

(n) 制約なしの最適化問題の場合、共役勾配法の方が最急降下法より常に収束が早い。

(o) 非線形計画問題のラインサーチでは、黄金分割法がもっとも効率的な手法である。

(p) 一般に非線形計画法では、0次法より、1次法、1次法より2次法と、高次の感度を用いた方法の方がより早く、安定に収束する。

(q) 非線形計画法では求められた解がグローバルな最適解であるという保証はない.

(r) 非線形計画法を用いれば、離散的な変数の問題を解くこともできる。

(s) Kuhn Tuckerの条件は、ある解が最適解であるための必要十分条件である.

(t) GNU Octaveはフリーソフトであるが，ソースコードは公開されていない.