経済学基礎

-第４回　消費者選好と効用関数つづき-

菅　史彦

内閣府　経済社会総合研究所

復習１：競争市場の理論

ある財の価格と数量が市場においてどのように決定されるのかを考えるために、１つの財の市場を考える。

- 消費者・生産者は価格受容者（プライステイカー）
- 右下がりの市場需要曲線
- 右上がりの市場供給曲線
- 需要曲線と供給曲線の交点（＝均衡）で価格と生産・消費量が決まる。

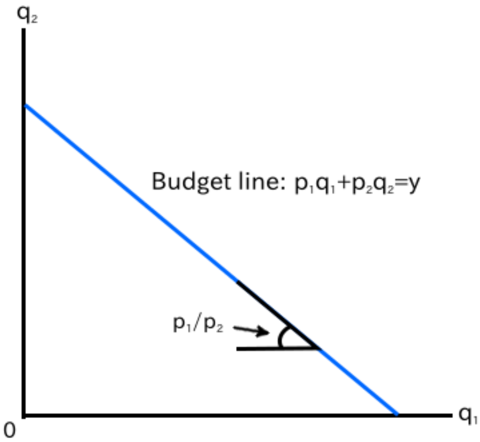
さらに余剰分析などを通じて、政策が与える影響を分析することができる。

復習２：消費者理論

- 競争市場のモデルでは、需要曲線は所与として扱われていた。
$\longrightarrow$ 財の価格や所得が与えられた時、どのようにして消費を決定するのかという問題は捨象されていた。
- 制度・政策をデザインすることを考えると、制約条件のもとでの消費者の意思決定の問題をモデルに組み込む必要がある。
- 所得・価格が与えられたもとでの消費に関する意思決定の問題を制約条件付き最適化問題としてきちんと定式化する。

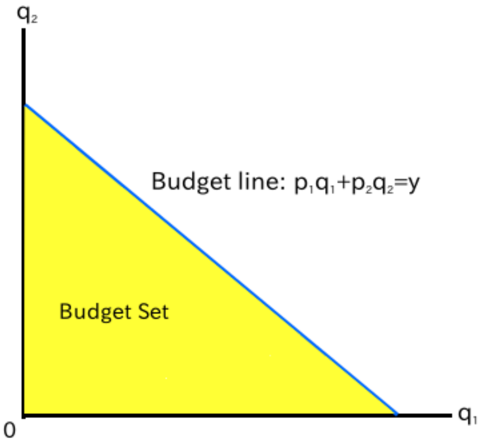
復習２：消費者理論

予算制約線、予算集合はどれだけ消費できるかを表す。



復習２：消費者理論

予算制約線、予算集合はどれだけ消費できるかを表す。

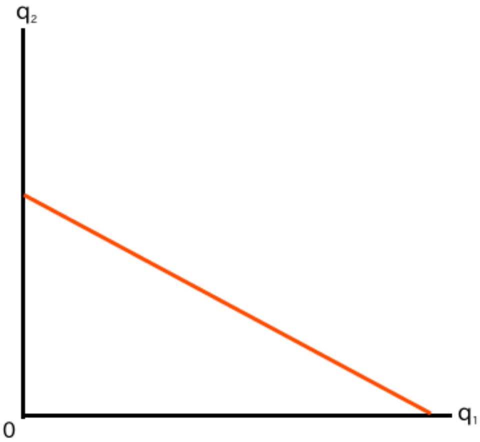


復習２：消費者理論

無差別曲線は何をどれだけ消費したいのかについて教えてくれる。

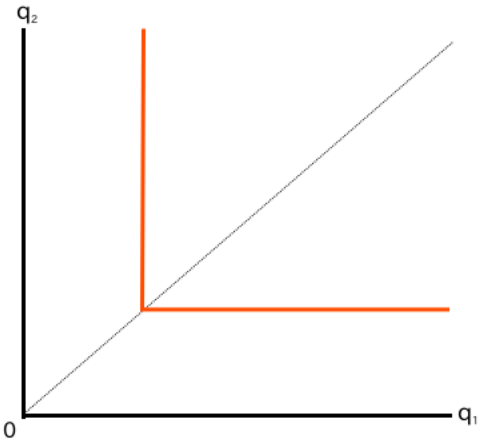
復習２：消費者理論

無差別曲線は何をどれだけ消費したいのかについて教えてくれる。



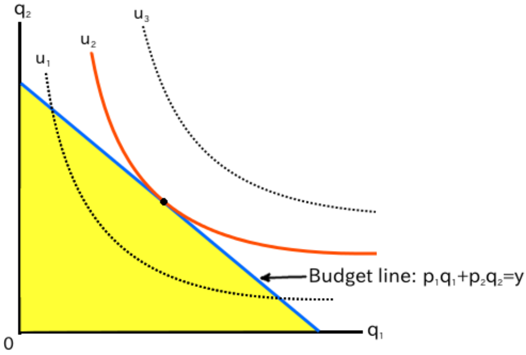
復習２：消費者理論

無差別曲線は何をどれだけ消費したいのかについて教えてくれる。



復習２：消費者理論

予算制約線と無差別曲線の接点で最適な消費が決定される。



復習２：消費者理論

- 無差別曲線が予算制約線に接するという条件は、

$$MRS \equiv \frac{u_1}{u_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

で与えられる。

- これは、

$$\frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2} = \lambda$$

とも書ける。
すなわち、消費が最適化されているとき、第一財に使われた最後の１円と、第二財に使われた最後の１円からの効用が等しい。

- これらの条件は、λ をラグランジェ乗数として、ラグランジェの未定乗数法からも導出できる。

例題１：消費者理論

- 例えば、消費者の問題が以下で与えられるとする：

$$\max_{q_1, q_2} \quad u(q_1, q_2) = q_1^{\alpha} q_2^{1-\alpha}$$
$$\text{s.t.} \quad p_1 q_1 + p_2 q_2 = y$$

- これを、

$$MRS = \frac{p_1}{p_2}$$

  の条件を使って解く、
- あるいは、ラグランジェの未定乗数法で解く。

復習３：医療費補助問題の例

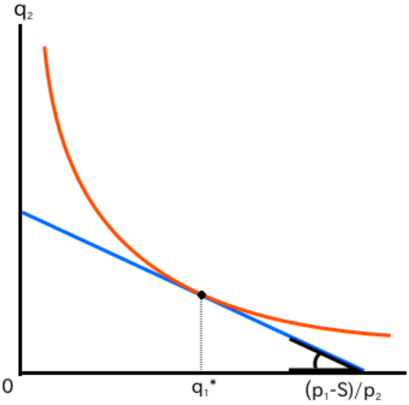
以上のような枠組みが現実の問題を分析する際にどのように役立つかを、医療費補助の問題を通して考える。前提条件として、

- 現在 70 歳以上なら医療費の負担は 1 割で、残りは政府（納税者）が払っている。
- 医療サービスを第一財（価格 p_1、消費量 q_1）、他の消費財を第二財（価格 p_2、消費量 q_2）とする。
- 政府が医療サービス一単位あたり S 円負担しているとする。

復習３：医療費補助問題の例

老人の予算制約式は以下で与えられる。

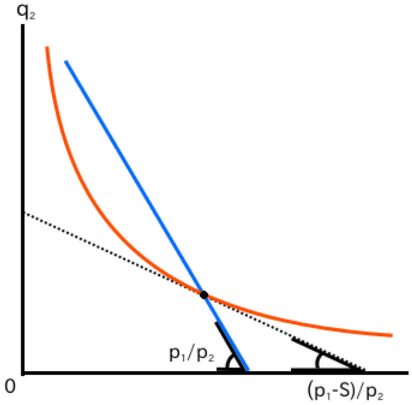
$$(p_1 - S)q_1 + p_2 q_2 = y$$



復習３：医療費補助問題の例

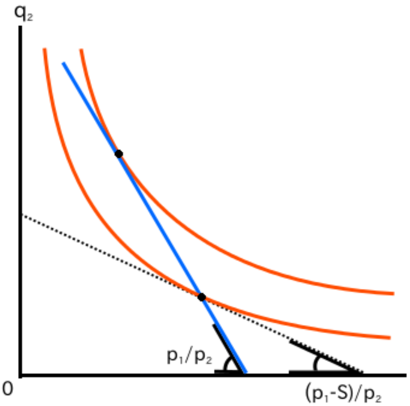
医療費補助をやめて、代わりに年金を $S \times q_1^*$ だけ増やす。

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = y + S q_1^*$$



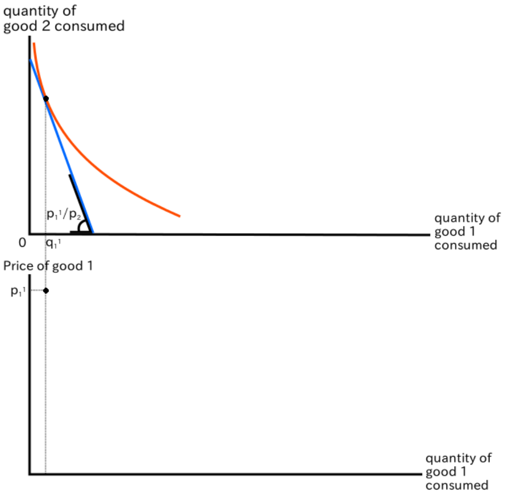
復習３：医療費補助問題の例

政府の支出は変わらず、老人の効用は増大する。→ 政府が価格を無理に安くしようとすると、ロスが発生する。



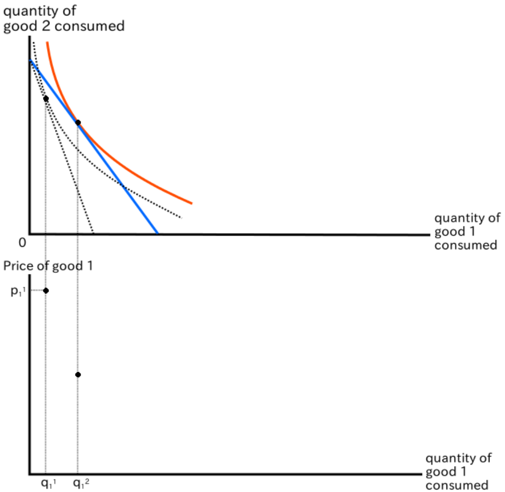
需要曲線の導出

価格を変えながら消費量をプロットし、需要曲線を導出する。



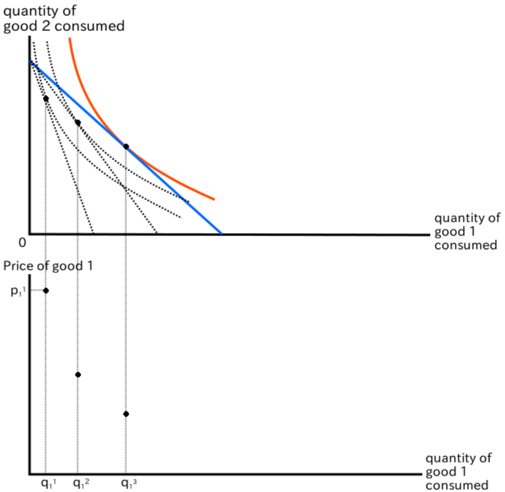
需要曲線の導出

価格を変えながら消費量をプロットし、需要曲線を導出する。



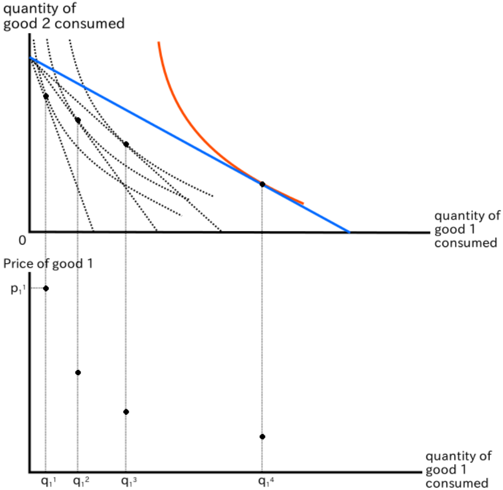
需要曲線の導出

価格を変えながら消費量をプロットし、需要曲線を導出する。



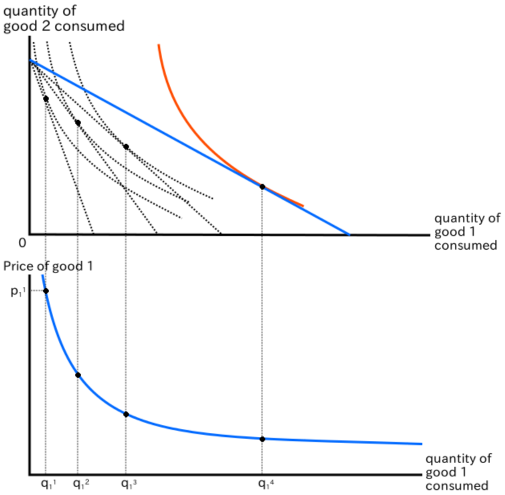
需要曲線の導出

価格を変えながら消費量をプロットし、需要曲線を導出する。



需要曲線の導出

価格を変えながら消費量をプロットし、需要曲線を導出する。



無差別曲線の曲率と補償需要関数

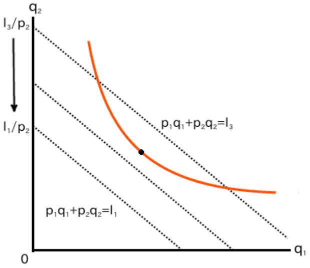
- 第１財の価格が下がった時、第１財の消費がどの程度伸びるのかによって、需要関数の形状が決まる。
- 第１財の消費の伸びは、無差別曲線の曲がり具合に依存して決まる。
- 無差別曲線の曲がり具合は、消費者にとって２つの財がどのような関係にあるかを表す。
- 無差別曲線が直線に近い場合：代替関係
- 無差別曲線が曲がっている場合：補完関係
- これを分析するために補償需要関数を導入する。

補償需要関数

財の価格 $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)'$ と効用水準 $\bar{u}$ が与えられた時の補償需要関数 $\tilde{q}_i(\boldsymbol{p}, \bar{u})$ を以下の支出最小化問題の解として定義する：

$$\min_{q_1, q_2, \ldots, q_n} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$$

$$\text{s.t.} \quad u(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \bar{u}$$

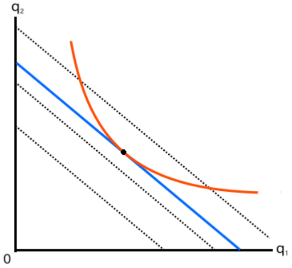


補償需要関数

財の価格 $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)'$ と効用水準 $\bar{u}$ が与えられた時の補償需要関数 $\tilde{q}_i(\boldsymbol{p}, \bar{u})$ を以下の支出最小化問題の解として定義する：

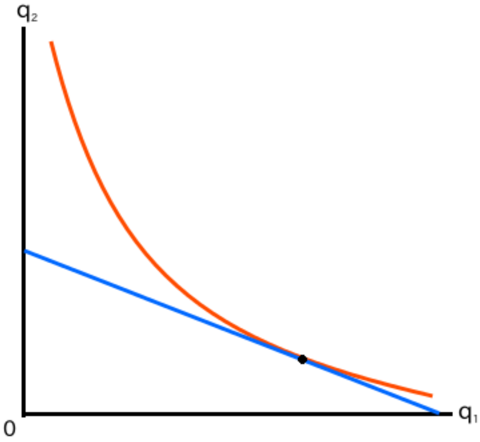
$$\min_{q_1, q_2, \ldots, q_n} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$$

$$\text{s.t.} \quad u(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \bar{u}$$



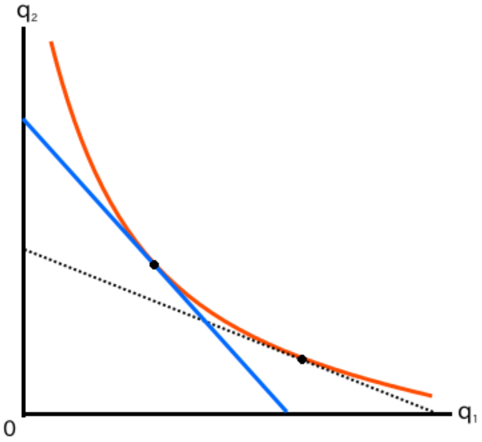
補償需要

価格が変化した時の補償需要の変化を見れば、財の代替・補完関係がわかる。



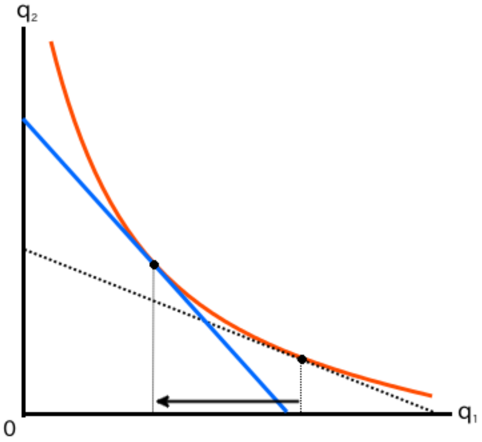
補償需要

価格が変化した時の補償需要の変化を見れば、財の代替・補完関係がわかる。



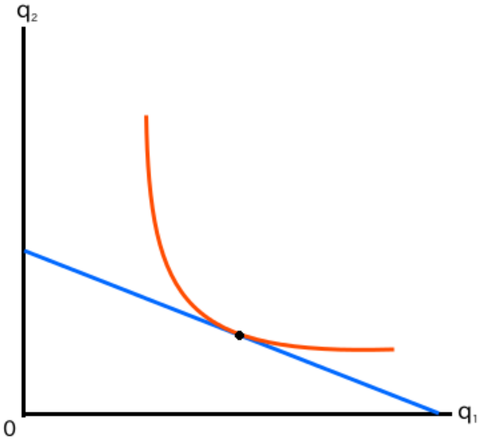
補償需要

価格が変化した時の補償需要の変化を見れば、財の代替・補完関係がわかる。



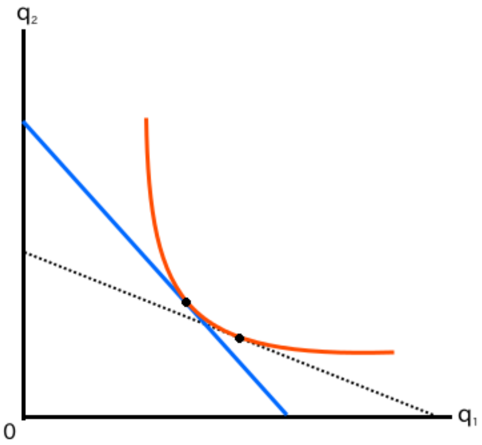
補償需要

価格が変化した時の補償需要の変化を見れば、財の代替・補完関係がわかる。



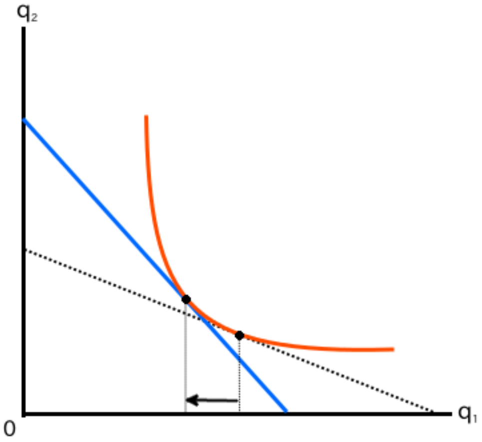
補償需要

価格が変化した時の補償需要の変化を見れば、財の代替・補完関係がわかる。



補償需要

価格が変化した時の補償需要の変化を見れば、財の代替・補完関係がわかる。



支出関数

- 価格 $\boldsymbol{p}$ と効用水準 $\bar{u}$ が与えられた時、最も安上がりな消費計画が補償需要。
- 各財の補償需要に価格を掛けて足しあわせれば、価格 $\boldsymbol{p}$ のもとで効用水準 $\bar{u}$ を実現する最小の支出額が導出される。これが（最小支出関数）：

$$I\left(\boldsymbol{p},\bar{u}\right)=\sum_{i=1}^{n}p_i\tilde{q}_i\left(\boldsymbol{p},\bar{u}\right)$$

- 最小支出関数は、価格の上昇・下落が消費者にもたらす損失と利益を、お金で表現するのに使える。
例）原発事故により価格が $\boldsymbol{p}$ から $\boldsymbol{p}'$ に上がったことにより消費者が被った被害を補償するのに必要な額は $I(\boldsymbol{p}',\bar{u})-I(\boldsymbol{p},\bar{u})$。

支出関数

包絡線定理から、支出関数を i 財の価格に関して微分すると、i 財の補償需要関数になることがわかる。これをシェファードの補題と呼ぶ。

シェファードの補題

$$\frac{\partial I(\boldsymbol{p}, \bar{u})}{\partial p_i} = \tilde{q}_i(\boldsymbol{p}, \bar{u})$$

例題２：支出関数と補償需要関数

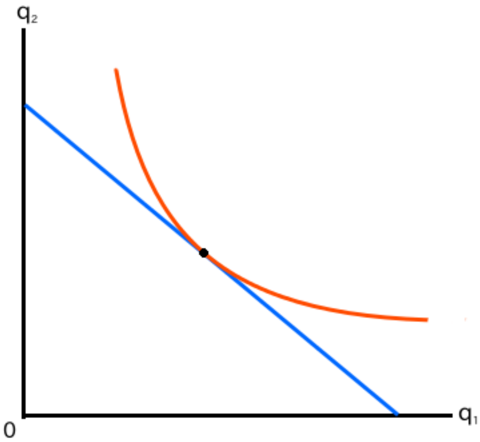
- 消費者の問題が以下で与えられるとする：

$$\min_{q_1, q_2} \quad p_1 q_1 + p_2 q_2$$
$$\text{s.t.} \quad u(q_1, q_2) = q_1^{\alpha} q_2^{1-\alpha} = \bar{u}$$

- この支出最小化問題を解いて、補償需要関数 $\tilde{q}_1(\boldsymbol{p}, \bar{u})$、$\tilde{q}_2(\boldsymbol{p}, \bar{u})$ を求めよ。

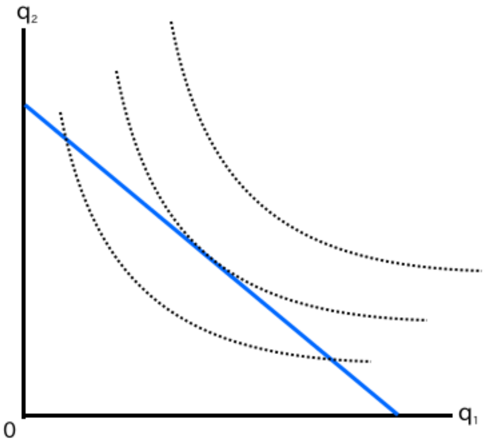
消費の二面性

ぱっと見だと効用最大化の結果か費用最小化の結果かわからない。



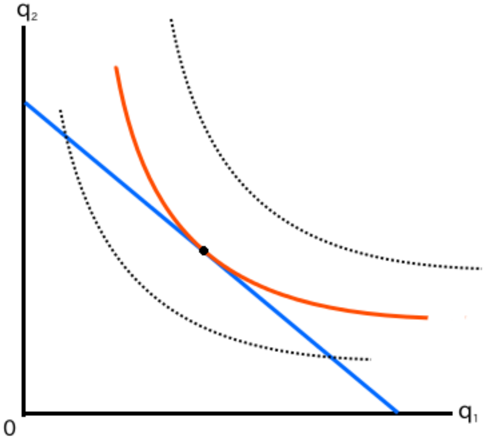
消費の二面性

ぱっと見だと効用最大化の結果か費用最小化の結果かわからない。



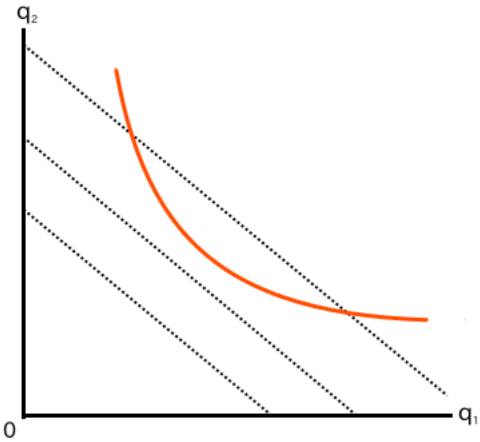
消費の二面性

ぱっと見だと効用最大化の結果か費用最小化の結果かわからない。



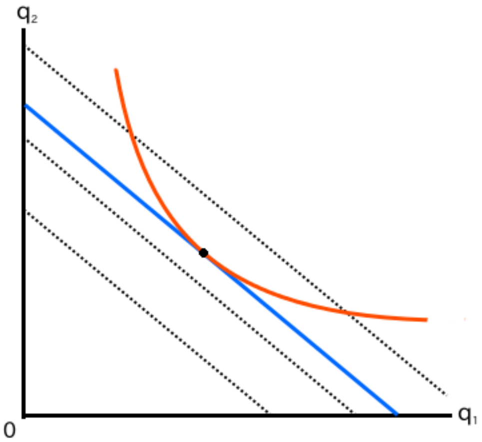
消費の二面性

ぱっと見だと効用最大化の結果か費用最小化の結果かわからない。



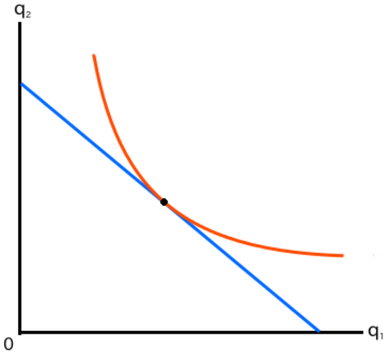
消費の二面性

ぱっと見だと効用最大化の結果か費用最小化の結果かわからない。



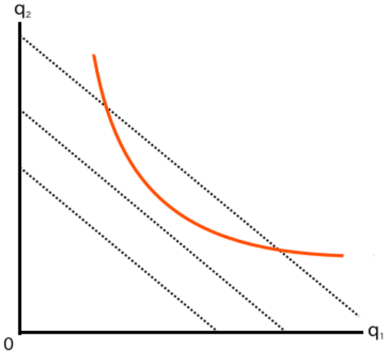
消費の二面性

すなわち、ある価格 $\boldsymbol{p}$ と効用水準 $\bar{u}$ が与えられたもとで最小化された費用 $I(\boldsymbol{p}, \bar{u})$ を所得として、価格 $\boldsymbol{p}$ と所得 $y = I(\boldsymbol{p}, \bar{u})$ のもとで効用最大化すれば、同じ消費計画のもとで効用水準 $\bar{u}$ が実現する。



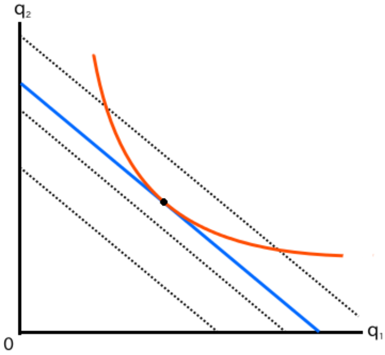
消費の二面性

すなわち、ある価格 $\boldsymbol{p}$ と効用水準 $\bar{u}$ が与えられたもとで最小化された費用 $I(\boldsymbol{p}, \bar{u})$ を所得として、価格 $\boldsymbol{p}$ と所得 $y = I(\boldsymbol{p}, \bar{u})$ のもとで効用最大化すれば、同じ消費計画のもとで効用水準 $\bar{u}$ が実現する。



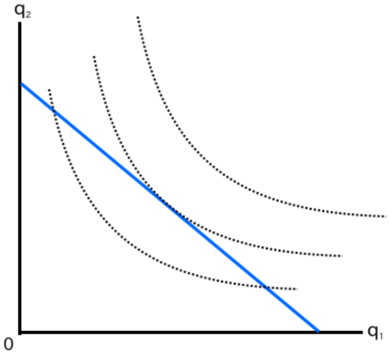
消費の二面性

すなわち、ある価格 $\boldsymbol{p}$ と効用水準 $\bar{u}$ が与えられたもとで最小化された費用 $I(\boldsymbol{p}, \bar{u})$ を所得として、価格 $\boldsymbol{p}$ と所得 $y = I(\boldsymbol{p}, \bar{u})$ のもとで効用最大化すれば、同じ消費計画のもとで効用水準 $\bar{u}$ が実現する。



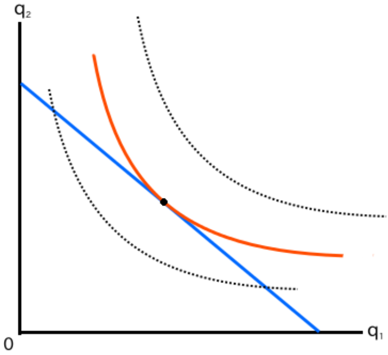
消費の二面性

すなわち、ある価格 $\boldsymbol{p}$ と効用水準 $\bar{u}$ が与えられたもとで最小化された費用 $I(\boldsymbol{p}, \bar{u})$ を所得として、価格 $\boldsymbol{p}$ と所得 $y = I(\boldsymbol{p}, \bar{u})$ のもとで効用最大化すれば、同じ消費計画のもとで効用水準 $\bar{u}$ が実現する。



消費の二面性

すなわち、ある価格 $\boldsymbol{p}$ と効用水準 $\bar{u}$ が与えられたもとで最小化された費用 $I(\boldsymbol{p}, \bar{u})$ を所得として、価格 $\boldsymbol{p}$ と所得 $y = I(\boldsymbol{p}, \bar{u})$ のもとで効用最大化すれば、同じ消費計画のもとで効用水準 $\bar{u}$ が実現する。



例題３：効用最大化と支出最小化

効用最大化問題と支出最小化問題はコインの表裏なので、

- 例えば、例題 1 で求めた需要関数 $q_1(\boldsymbol{p}, y)$ を効用関数に代入し、
- 得られた間接効用関数を、今度は効用の水準を $\bar{u}$ として、所得 y について解く。
- そうして得られた $y = I(\boldsymbol{p}, \bar{u})$ は支出関数になっており、
- これを p_i について微分すれば、シェファードの補題から、$\tilde{q}_i(\boldsymbol{p}, \bar{u})$ が得られる。

スルツキー分解

- 消費計画がきちんと予算制約線と無差別曲線の接点で達成されているのであれば、以下が恒等的に成立している。

$$\tilde{q}_i(\mathbf{p}, \bar{u}) = q_i\left(\mathbf{p}, I(\mathbf{p}, \bar{u})\right) \tag{1}$$

- (1) は恒等式なので、両辺を微分してもそのまま成立。

$$\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_i} = \frac{\partial q_i}{\partial p_i} + \frac{\partial q_i}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial p_i} \tag{2}$$

- シェファードの補題を使って書き換えると、

$$\frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_i} = \frac{\partial q_i}{\partial p_i} + \frac{\partial q_i}{\partial I} q_i \tag{3}$$

となる。

スルツキー分解

これを並び替えると、以下のスルツキー方程式が得られる。

スルツキー方程式

$$\frac{\partial q_i}{\partial p_i} = \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_i} - \frac{\partial q_i}{\partial I} q_i$$

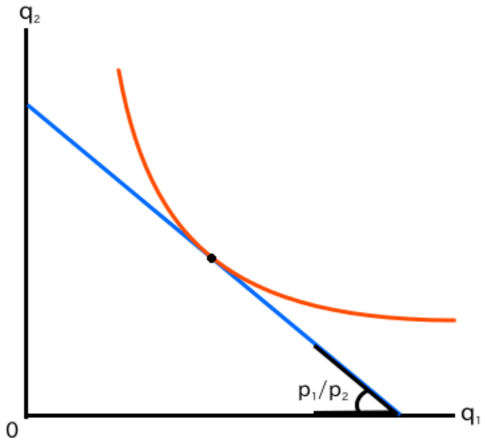
- i 財の価格の微小な変分 Δp_i に伴う消費量の変分 Δq_i を考えると、以下が近似的に成り立つ：

$$\Delta q_i \approx \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_i} \Delta p_i - \frac{\partial q_i}{\partial I} q_i \Delta p_i$$

- 第一項は代替効果、第二項は所得効果と呼ばれる。

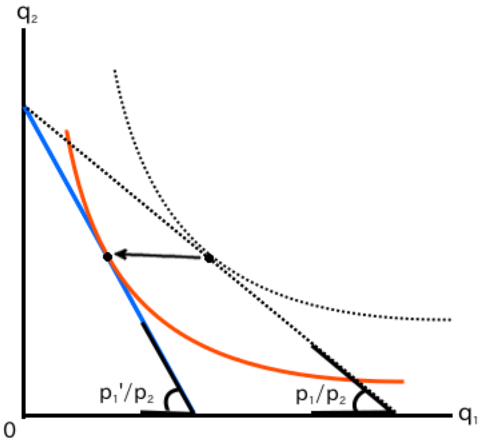
スルツキー分解

これを図で見ると…



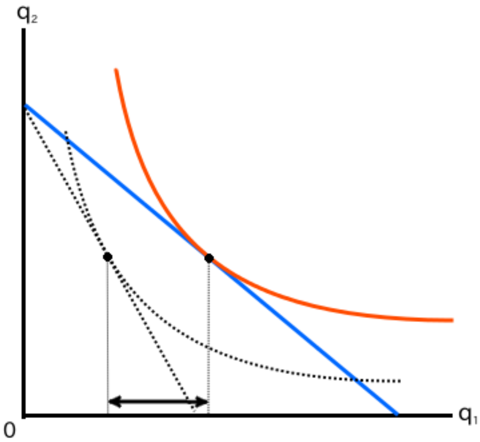
スルツキー分解

これを図で見ると…



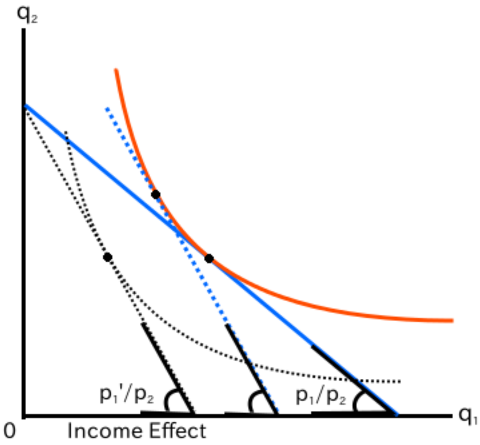
スルツキー分解

これを図で見ると…



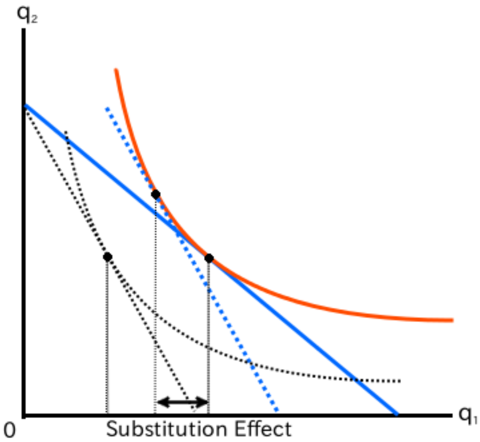
スルツキー分解

これを図で見ると…



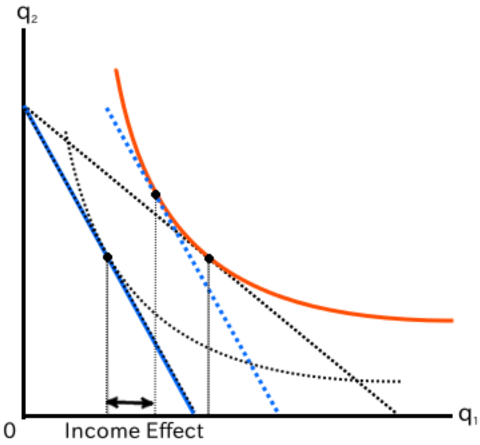
スルツキー分解

これを図で見ると…



スルツキー分解

これを図で見ると…



所得効果と代替効果

- ある財の価格が上がると、普通その財の消費は減る。
- このとき、消費の変化分は、
  1. その財が相対的に高くなり、他の財へのシフトが起こった効果
     → 代替効果
  2. 値上がりで消費に使えるお金が減ることの効果
     → 所得効果

  に分けられる。
- これを分解するのが、スルツキー分解である。

最適労働供給の決定問題

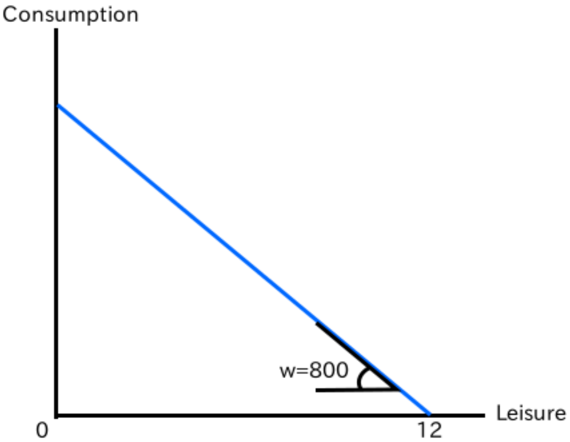
スルツキー分解が現実の問題の分析にどのように役立つのかを知るために、労働供給に関する意思決定の問題を考える。前提条件として、

- 労働者は一日に最大で 12 時間働くことができる。
- 時間あたり賃金は 800 円。
- 働いて稼いだ分だけ消費財を消費できる。
- 労働者は消費財の消費と、余暇から効用をえる。

と仮定する。

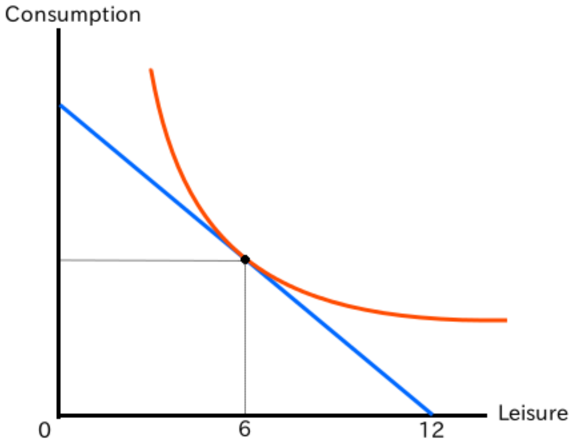
最適労働供給の決定問題

図で見ると…



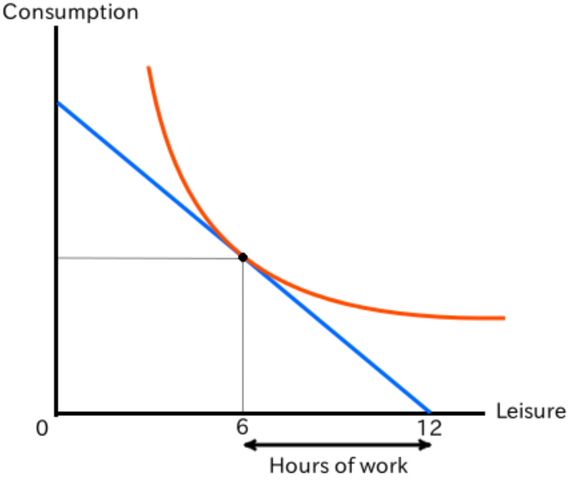
最適労働供給の決定問題

図で見ると…



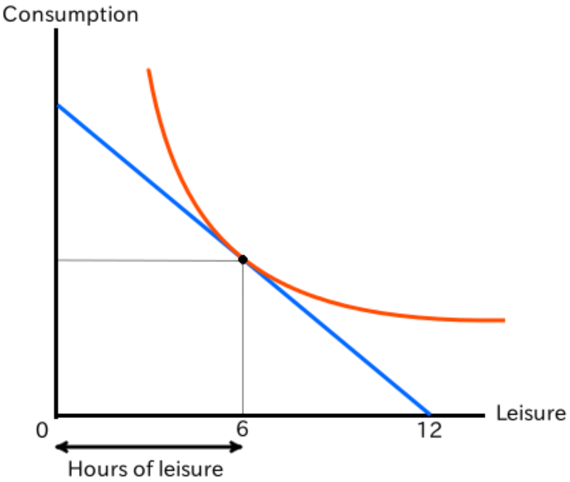
最適労働供給の決定問題

図で見ると…



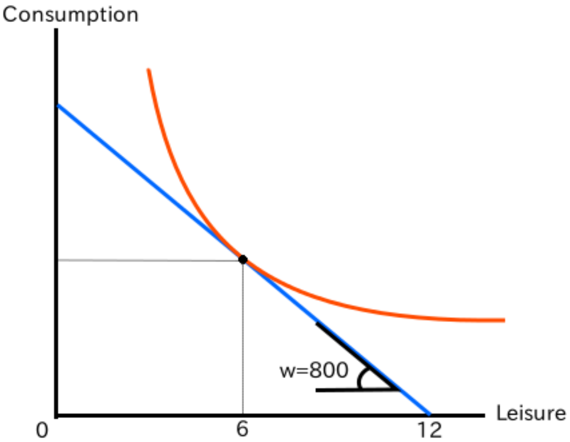
最適労働供給の決定問題

図で見ると…



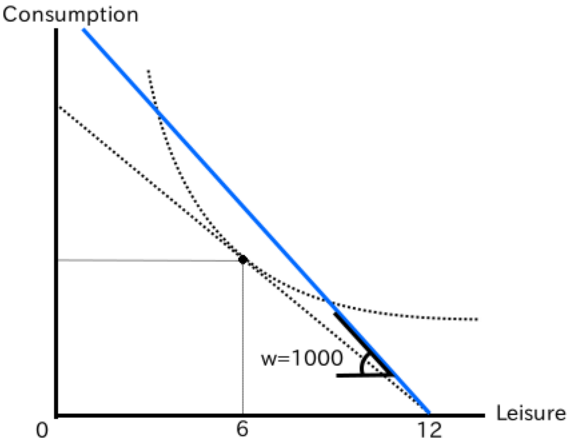
最適労働供給の決定問題

ここで時間あたり賃金が 1000 円に上がったとすると…



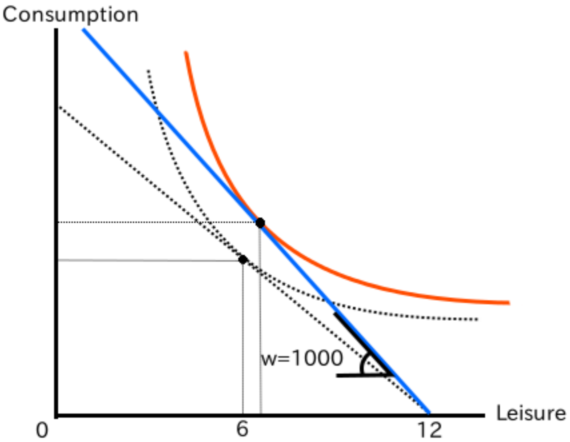
最適労働供給の決定問題

ここで時間あたり賃金が 1000 円に上がったとすると…



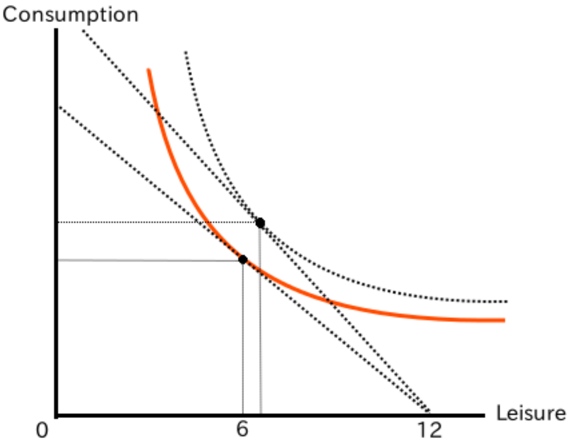
最適労働供給の決定問題

ここで時間あたり賃金が 1000 円に上がったとすると…



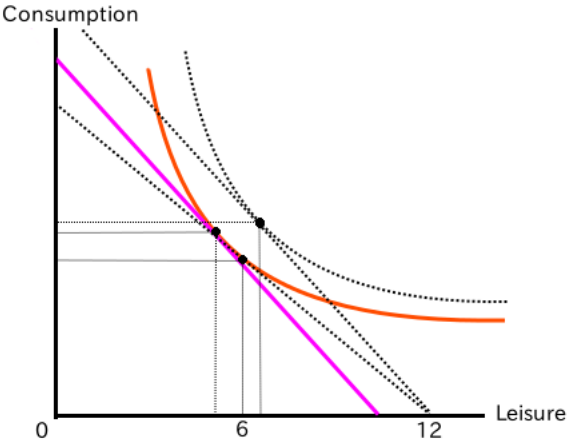
最適労働供給の決定問題

ここで時間あたり賃金が 1000 円に上がったとすると…



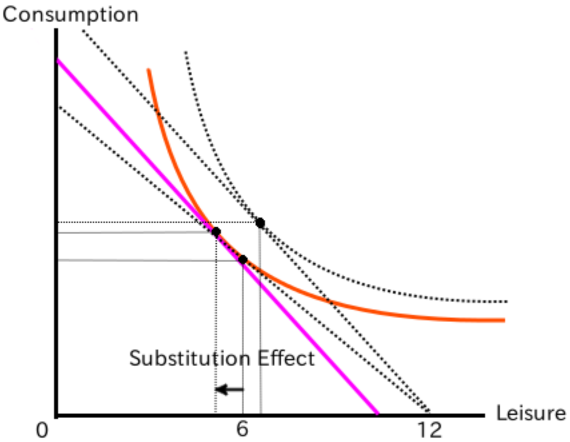
最適労働供給の決定問題

ここで時間あたり賃金が 1000 円に上がったとすると…



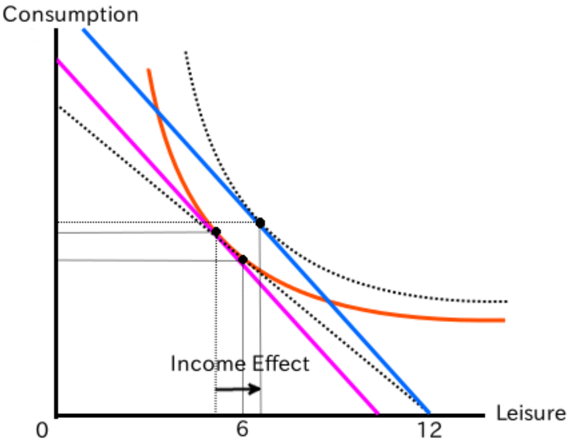
最適労働供給の決定問題

ここで時間あたり賃金が 1000 円に上がったとすると⋯



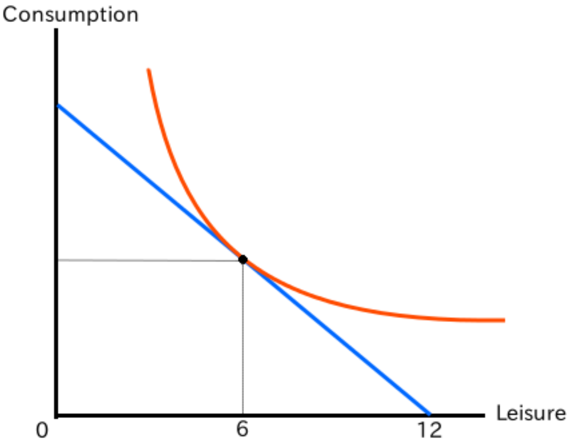
最適労働供給の決定問題

ここで時間あたり賃金が 1000 円に上がったとすると…



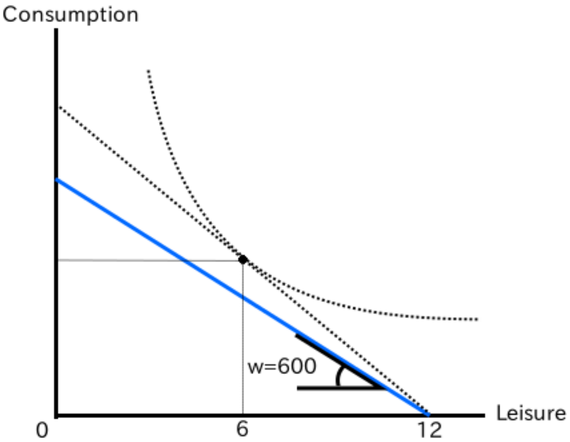
最適労働供給の決定問題

あるいは時間あたり賃金が 600 円に下がったりとすると…



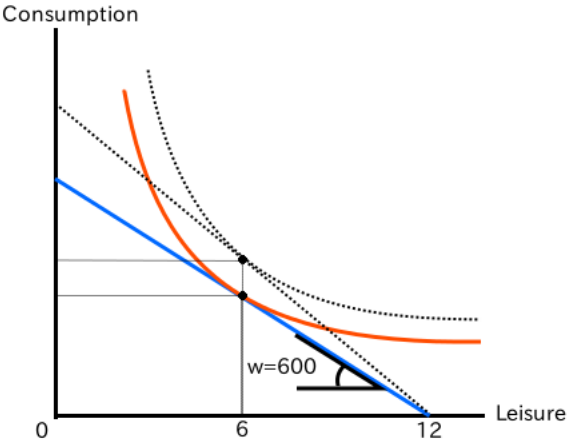
最適労働供給の決定問題

あるいは時間あたり賃金が 600 円に下がったりとすると…



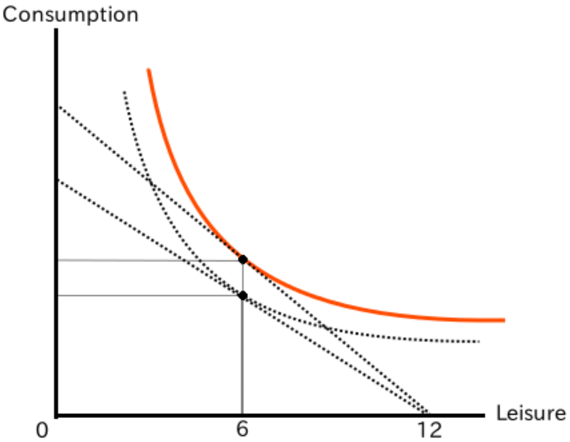
最適労働供給の決定問題

あるいは時間あたり賃金が 600 円に下がったりとすると…



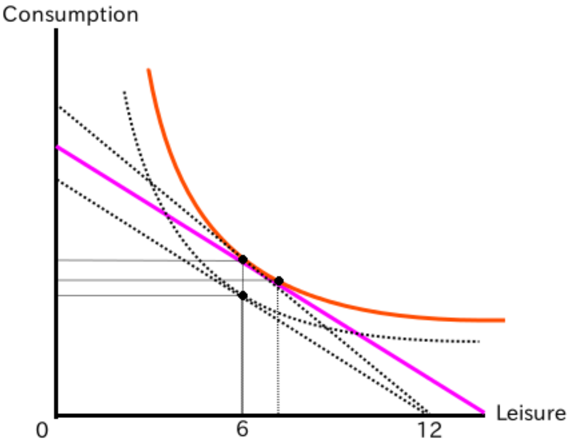
最適労働供給の決定問題

あるいは時間あたり賃金が 600 円に下がったりとすると…



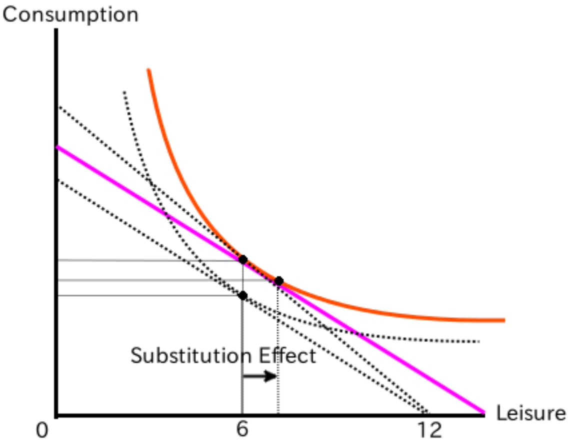
最適労働供給の決定問題

あるいは時間あたり賃金が 600 円に下がったりとすると…



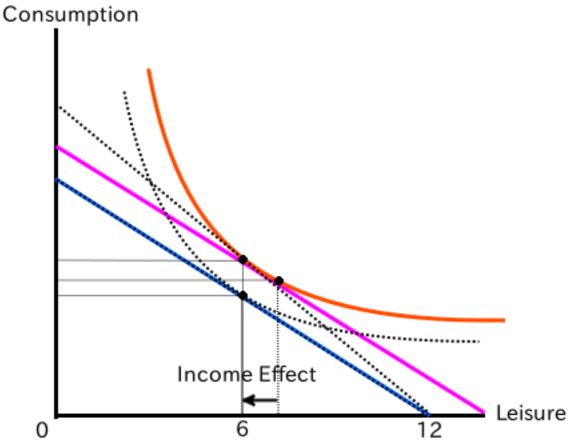
最適労働供給の決定問題

あるいは時間あたり賃金が 600 円に下がったりとすると…



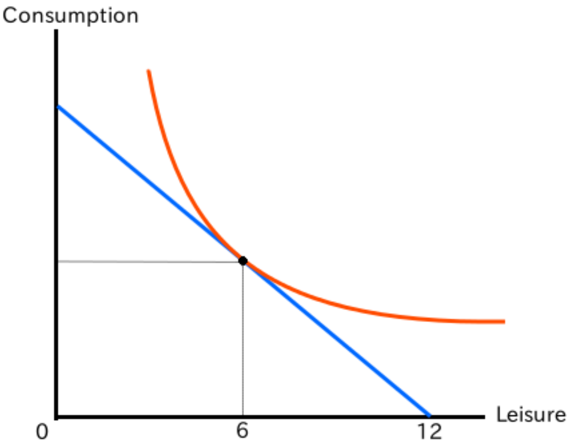
最適労働供給の決定問題

あるいは時間あたり賃金が 600 円に下がったりとすると⋯



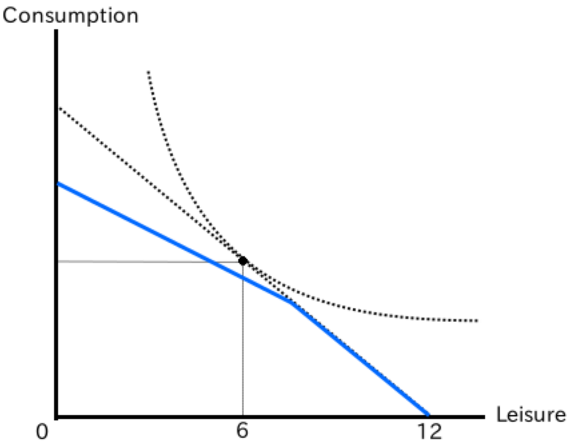
最適労働供給の決定問題

あるいは、時給 800 円だけど、日給が 4000 円を超えると、一時間あたり 100 円所得税を払うとすると…。



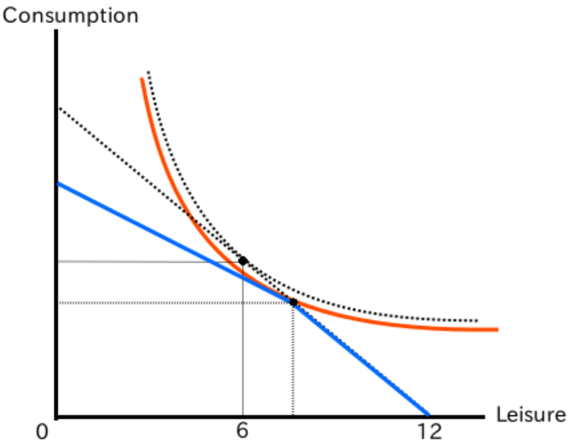
最適労働供給の決定問題

あるいは、時給 800 円だけど、日給が 4000 円を超えると、一時間あたり 100 円所得税を払うとすると…。



最適労働供給の決定問題

あるいは、時給 800 円だけど、日給が 4000 円を超えると、一時間あたり 100 円所得税を払うとすると…。



最適貯蓄額の決定問題

さらに、消費者の意思決定の問題とスルツキー分解が、現実の問題の分析にどのように役立つのかを知るために、貯蓄額の関する意思決定の問題を考える。前提条件として以下を仮定する：

- 若い頃（第 1 期）の収入は I_1、年を取ってから（第 2 期）の収入（年金）は I_2。
- 若い頃の消費を q_1、年を取ってからの消費を q_2 とおき、割引率を β とおく。ただし $0 \le \beta \le 1$。
- 生涯の効用関数は以下で与えられるとする：

$$\max_{q_1, q_2} \; v(q_1) + \beta v(q_2)$$

- 貯蓄に対して利子収入があり、利子率は $r \times 100\%$とする。

最適貯蓄額の決定問題

予算制約式は以下で与えられる：

$$(1+r)q_1 + q_2 = (1+r)I_1 + I_2$$

もしくは、

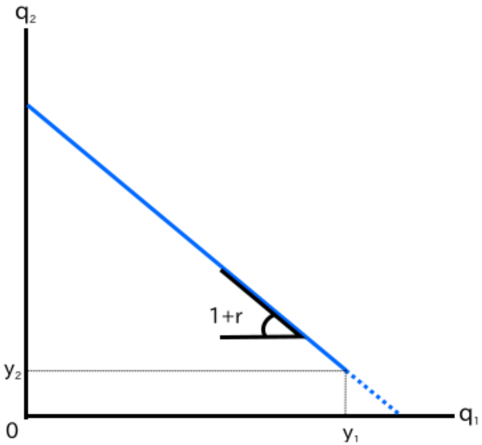
$$q_1 + \frac{1}{1+r}q_2 = I_1 + \frac{1}{1+r}I_2$$

もしくは、

$$q_2 = (1+r)(I_1 - q_1) + I_2$$

最適労働供給の決定問題

図で見ると…



最適貯蓄額の決定問題

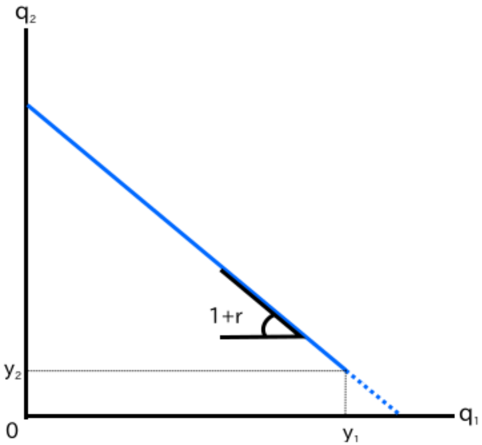
MRS は、

$$MRS = \frac{v'(q_1)}{\beta v'(q_2)}$$

- 各期の効用関数 $v(.)$ は強凹関数を仮定。
- 割引率 β は、今期の満足と来期の満足を比べる際のウェイト。
- β が小さいほど今期を重視。
- β が小さいほど q_1 が大きくなる。

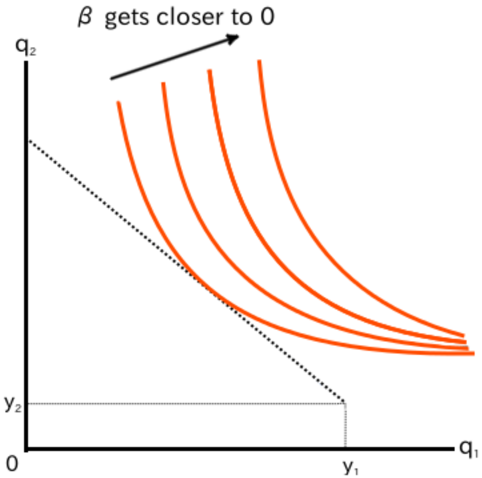
最適貯蓄額の決定問題

図で見ると…



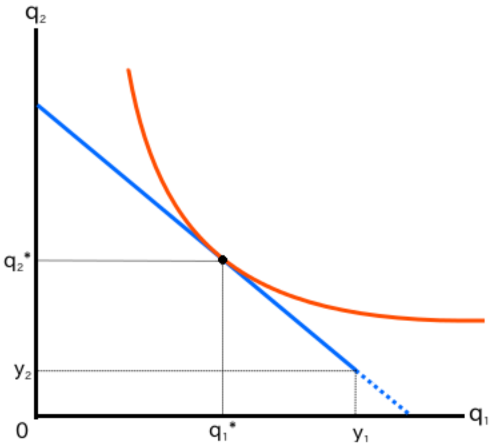
最適貯蓄額の決定問題

図で見ると…



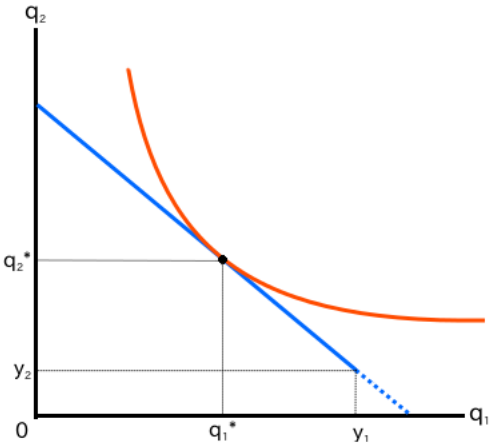
最適貯蓄額の決定問題

図で見ると…



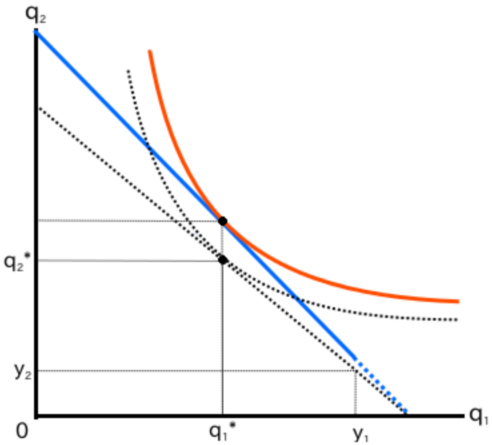
最適貯蓄額の決定問題

利子率 r が上昇すると…



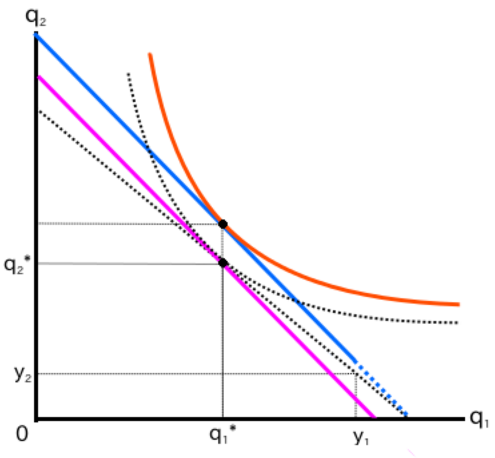
最適貯蓄額の決定問題

利子率 r が上昇すると…



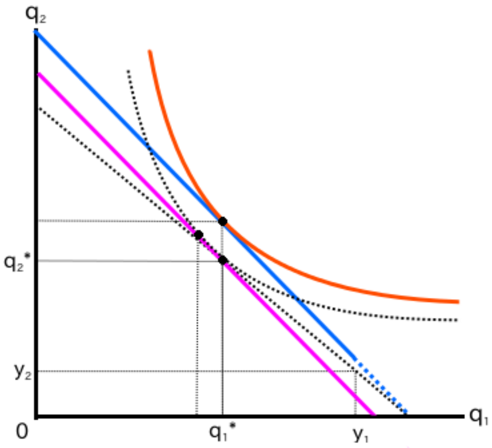
最適貯蓄額の決定問題

利子率 r が上昇すると…



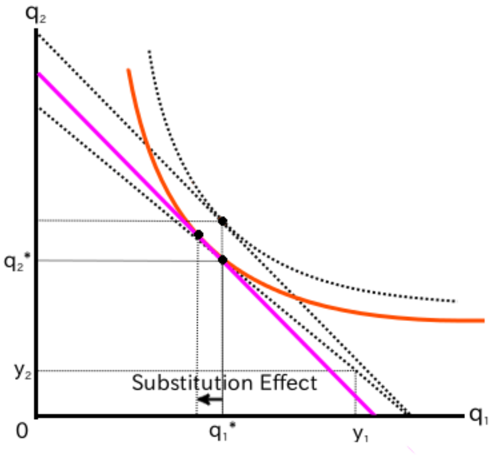
最適貯蓄額の決定問題

利子率 r が上昇すると…



最適貯蓄額の決定問題

利子率 r が上昇すると…



最適貯蓄額の決定問題

利子率 r が上昇すると…