数理計画と最適化
ーゲーム理論ー

精密工学科
安 琪, 淺間 一
簑原 凜, 徐 彬斌, 楊 濘嘉(TA)
asama@robot.t.u-tokyo.ac.jp

ゲーム理論とは

- ゲームと言えば？
  - 野球, サッカーなどのスポーツ
  - 囲碁, 将棋, コンピュータゲーム
  - 進化ゲーム, ライフゲーム
- ゲームのルールの変化
  - 会社の経営や商取引を取り巻く環境の変化
  - 国のおかれた国際状況の変化
- ゲーム理論で言うゲームとは
  - 抽象化された概念としてのゲーム
  - 相互連関的意思決定理論(Interactive Decision Theory)
  - 複数の主体の合理的行動
- 1944年ゲーム理論と経済活動
  - Theory of Games and Economic Behavior
  - フォン・ノイマン（数学者）とモルゲンシュテルン（経済学者）
  - ミニマックス法
  - フォン・ノイマン
    - ノイマン型コンピュータ（プログラム内蔵方式のデジタルコンピュータ）
    - 『自己増殖オートマトンの理論』*Theory of Self Reproducing Automata*

ライフゲーム

- セル・オートマトン
- 四角形などのセルによって分割された空間において、時間に最小単位が存在する場合の計算モデル
- フォン・ノイマン
- ノイマン型コンピュータ
（プログラム内蔵方式のデジタルコンピュータ）
- 『自己増殖オートマトンの理論』
Theory of Self Reproducing Automata
- 自己複製機械
- 2次元セル・オートマトンによる自己複製機械の例を1952年

ライフゲーム

誕生

死んでいるセルに隣接する生きたセルがちょうど3つあれば、次の世代が誕生する。

生存

生きているセルに隣接する生きたセルが2つか3つならば、次の世代でも生存する。

過疎

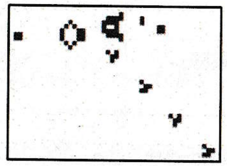
生きているセルに隣接する生きたセルが1つ以下ならば、過疎により死滅する。

過密

生きているセルに隣接する生きたセルが4つ以上ならば、過密により死滅する。

ライフゲームの基本ルール

ヒキガエル



グライダー銃

- ライフゲーム
  - セルに存在しない場合
    - 周囲に3個存在：誕生
    - それ以外：変化無し
  - セルに存在する場合
    - 周囲に2個もしくは3個存在：変化無し
    - それ以外：死亡
- 進化ゲーム
  - Dynamicな時間変化を扱うゲーム
  - 非協力ゲームは静的（ナッシュが扱う）

市場シェアゲーム

2つの企業A社とB社がコンピュータ市場で競争している．両者は新製品を生産し販売するかどうか経営戦略を決定しなければならない．現在はともに50%の市場シェアを占有しているが，もし1社だけが新製品の販売を始めれば市場シェアを70%に上げることができる．もし両者とも新製品の販売を始めれば，その市場シェアは現状と同じ50%になる．

A社 \ B社	新製品を販売	現状維持
新製品を販売	50%, 50%	70%, 30%
現状維持	30%, 70%	50%, 50%

両社とも現状維持なら，両社のシェアは，50%どうしのまま

A社のみ新製品を販売すると，A社のシェアは，70%に上がり，B社のシェアは，30%に落ちる

両者とも新製品を販売すると，両社のシェアは，ともに50%になってしまう

戦略型（標準型）ゲーム

戦略型n人ゲーム： $G=(N,\{S_i\}_{i\in M},\{f_i\}_{i\in N})$

(1) $M=\{1, \ldots, m\}$は戦略の集合，$N=\{1, \ldots, n\}$はプレイヤーの集合

(2) S_iはプレイヤーの選択可能な行動あるいは戦略の集合

(3) f_iは直積集合$S=S_1\times\ldots\times S_m$上の実数値関数であり，プレイヤー$i$の利得関数を表す

すべてのプレイヤー1, …, nは他のプレイヤーの選択を知らずにそれぞれの戦略$s_1\in S_1, \ldots, s_m\in S_m$を選択する．その結果プレイヤー$i$は利得$f_i(s_1, \ldots, s_m)$を得る．プレイヤーの目的は，自己の自得の最大化である．

プレイヤー1 \ プレイヤー2	戦略s_1	戦略s_2
戦略s_1	$f_1(s_1, s_1), f_2(s_1, s_1)$	$f_1(s_1, s_2), f_2(s_1, s_2)$
戦略s_2	$f_1(s_2, s_1), f_2(s_2, s_1)$	$f_1(s_2, s_2), f_2(s_2, s_2)$

プレイヤー1がS_1，プレイヤー2がS_1の戦略をとったとき，プレイヤー1，プレイヤー2はそれぞれ$f_1(s_1, s_1), f_2(s_1, s_1)$の利得を得る

ゼロ和ゲーム： $\sum_{i=1}^{n} f_i(s_1,\cdots,s_m)=0$

ジャンケン
（ゼロ和ゲーム*）

プレイヤー1 \ プレイヤー2	グー	チョキ	パー
グー	0, 0	1, -1	-1, 1
チョキ	-1, 1	0, 0	1, -1
パー	1, -1	-1, 1	0, 0

1: 勝ち，-1: 負け，0: 引き分け

必勝戦略はない．
合理的な戦略は，グーとチョキとパーを確率1/3で出すこと（ナッシュ均衡）．

* 二人の利得の和が常にゼロになるゲーム．株取引など，リソースが限られている場合はゼロ和

ゼロ和（サム）二人ゲーム

- 二人の利得の和が常にゼロになるゲーム
- 株取引など（売買）：リソースが限られている

支配戦略

- 自分がある戦略をとれば，相手がいずれの戦略を取っても，つねに大きい利得が得られる，という戦略が存在する場合，その戦略は自分にとっての最適な戦略であり，これを支配戦略と呼ぶ．
- 囚人のジレンマでは，自白が支配戦略

囚人のジレンマ
（非ゼロ和ゲーム）

囚人1＼囚人2	黙秘	自白
黙秘	-1, -1	-5, 0
自白	0, -5	-3, -3

囚人1が黙秘して，
相棒の囚人2も黙秘すれば，
囚人1の刑期は1年で済む

しかし囚人1が黙秘して，
相棒の囚人2が裏切って自白をすれば，
刑期は5年になってしまう

囚人1が裏切って自白した場合，
相棒の囚人2が黙秘すれば，
囚人1は無罪放免される

しかし，囚人1が裏切って自白した場合，
相棒の囚人2も裏切って自白すれば，
囚人1の刑期は3年になってしまう

囚人2も同様

このゲームにおいては，裏切って自白することが合理的である．なぜなら，
相棒（囚人2）が黙秘する場合，自分（囚人1）は裏切って自白したほうが得
相棒（囚人2）が裏切って自白する場合でも，自分（囚人1）は裏切って自白したほうが得

＝支配戦略*が存在する．
* 他のプレイヤーがとる戦略のすべてに対して，最適反応となっている戦略

男と女のジレンマ（逢い引きのジレンマ）
（非ゼロ和ゲーム）

女＼男	オペラ	サッカー
オペラ	2, 1	0, 0
サッカー	0, 0	1, 2

女は男と一緒にオペラに行きたい．
男と一緒にオペラに行くことができれば利得は2，
しかし，男がサッカーに行くと別々になってしまうので，利得は0

女がオペラをあきらめ，サッカーに行った場合でも，
男と一緒にサッカーに行ければ，利得は1，
しかし，男がオペラを選べば，利得は0

男も同様

支配戦略は存在しない
自分と相手の行動を，二人の目の前で偶然機構に委ねて決定するという方法が解決法であるともに，期待利得3/2を獲得することになる．

このような戦略を相関戦略*と呼ぶ
* プレイヤー間で共通に観察できる偶然機構があるとき，それが生成する偶然事象に依存して各プレイヤーが選ぶ戦略

ミニマックス定理

相手がどんな戦略を選んでも確実に獲得できる利得（最低限の利得）の保証水準が最大となる戦略をマックスミニ戦略と呼ぶ．また，そのときの利得の保証水準をマックスミニ値と呼ぶ．（ジャンケンの場合，マックスミニ値＝-1）

あるプレイヤーがある戦略をとるとき，防ぎきれない損失（最大限の損失）の保証水準をできるだけ小さくする戦略をミニマックス戦略と呼ぶ．また，そのときの損失の保証水準をミニマックス値と呼ぶ．

$\boxed{\text{マックスミニ値} \leqq \text{ミニマックス値}}$

ナッシュ均衡点

(Nash equilibrium point)

John Forbes Nash, Jr.
2015年5月23日没
ノーベル経済学賞受賞

与えられた非ゼロ和ゲームごとに，合理的と思われる行動様式をそのつど考案し，分析するというやり方は，非効率であり，科学の方法論として一貫性を欠いている

非協力ゲーム：互いに相談することなく，相手の戦略を予測した上で，自分のとるべき戦略を決定しなければならない（プレイヤーが互いの戦略を独立に決定する）

戦略型n人ゲームにおいて，プレイヤーの戦略の組$S^*=(S_1^*, \ldots, S_n^*)$がナッシュ均衡点であるとは，すべてのプレイヤー$i(=1, \ldots, n)$に対して戦略$S^*_i$が他のプレイヤーの戦略の組$S^{*-i}$に対する最適反応であるとき，それをナッシュ均衡点と呼ぶ

たとえば二人のゲームにおいて，自分の行動x^*と相手の行動y^*の組(x^*, y^*)がナッシュ均衡であるとは，

$\boxed{x^*\text{は}y^*\text{に対する最適反応であり，}y^*\text{は}x^*\text{に対する最適反応である}}$

ということを意味する．

参考：映画「Beautiful Mind」，
ノーベル賞を受賞した
天才数学者John Nash*を描いた作品

ナッシュ均衡点

- 囚人のジレンマでは，（自白，自白）が唯一のナッシュ均衡（支配戦略の組は，常にナッシュ均衡である）
- 逢い引きのジレンマでは，（オペラ，オペラ）と（サッカー，サッカー）がナッシュ均衡
- 確率1/2で行動の組（オペラ，オペラ）；確率1/2で行動の組（サッカー，サッカー）を決定する相関戦略もナッシュ均衡
- プレイヤー1が確率2/3でオペラ，確率1/3でサッカー，プレイヤー2が確率1/3でオペラ，確率2/3でサッカーを選ぶ行動戦略の組((2/3, 1/3), (1/3, 2/3))もナッシュ均衡
- ジャンケンでの戦略，((1/3, 1/3, 1/3), (1/3, 1/3, 1/3))もナッシュ均衡（グー，パー，チョキをそれぞれ確率1/3で選ぶ，すなわち完全にでたらめに出すことが唯一の合理的な戦略）

純（純粋）戦略と混合戦略

純（純粋）戦略：確定的にある行動を選択する戦略
混合戦略：　　ある確率分布に従って選択を行う戦略

混合戦略における実現確率の分布

プレイヤー1 ＼ プレイヤー2	S_1	S_2
S_1	xy	$x(1-y)$
S_2	$(1-x)y$	$(1-x)(1-y)$

x=プレイヤー1が戦略S_1をとる確率
y=プレイヤー2が戦略S_1をとる確率

ナッシュ均衡の求め方（例）

非ゼロ和ゲームの利得行列

Player 1 \ Player 2	S_1	S_2
S_1	(3, 2)	(2, 1)
S_2	(0, 3)	(4, 4)

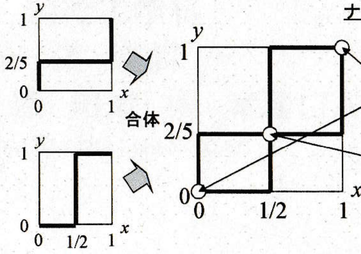
混合戦略$x=(x, 1-x)$, $y=(y, 1-y)$による各プレイヤーの平均利得

$e_1(x, y)=3xy+2x(1-y)+0(1-x)y+4(1-x)(1-y)=x(5y-2)+4-4y$

$e_2(x, y)=2xy+1x(1-y)+3(1-x)y+4(1-x)(1-y)=y(2x-1)+(4-3x)$

e_1に関しては
1) $y<2/5$なら，$x=0$で最大
2) $y=2/5$なら，$0\leqq x\leqq 1$で最大
3) $y>2/5$なら，$x=1$で最大

e_2に関しては
1) $x<1/2$なら，$y=0$で最大
2) 2) $x=1/2$なら，$0\leqq y\leqq 1$で最大
3) 3) $x>1/2$なら，$y=1$で最大



$u_1(S_1, q) = 3q + 2(1-q) = q+2$

$u_1(S_2, q) = 4(1-q)$

$q+2 > 4-4q$

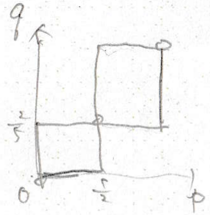
$q > \frac{2}{5}$

$u_2(p, S_1) = 2p + 3(1-p) = 3-p$

$u_2(p, S_2) = p + 4(1-p) = 4-3p$

$3-p > 4-3p$

$p > \frac{1}{2}$



(S_1, S_1), (S_2, S_2)

$(\frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{2}S_2, \frac{2}{5}S_1 + \frac{3}{5}S_2)$

演習問題

逢い引きのジレンマのナッシュ均衡を求めよ

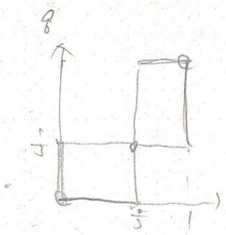
Player 1（女） \ Player 2（男）	オペラ	サッカー
オペラ	(2,1)	(0, 0)
サッカー	(0, 0)	(1, 2)

$u_1(オ, q) = 2q$

$u_1(サ, q) = 1-q$

$2q > 1-q$

$q > \frac{1}{3}$



$u_2(オ, p) = p$

$u_2(サ, p) = 2(1-p)$

$p > 2-2p$

$p > \frac{2}{3}$

(オ, オ), (サ, サ)

$(\frac{2}{3}オ + \frac{1}{3}サ, \frac{1}{3}オ + \frac{2}{3}サ)$

演習問題

逢い引きのジレンマのナッシュ均衡を求めよ

Player 1（女） \ Player 2（男）	オペラ	サッカー
オペラ	(2,1)	(0, 0)
サッカー	(0, 0)	(1, 2)

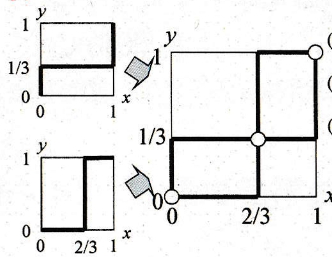
混合戦略をu_1, u_2とし，u_1（オペラ）$=p$, u_1（サッカー）$=1-p$；u_2（オペラ）$=q$, u_2（サッカー）$=1-q$ とすると各プレイヤーの期待利得は，

$e_1=2pq+1(1-p)(1-q)=(3q-1)p+(1-q)$

$e_2=1pq+2(1-p)(1-q)=(3p-2)q+2(1-p)$

e_1に関しては
1) $q<1/3$なら，$p=0$で最大
2) $q=1/3$なら，$0\leqq p\leqq 1$で最大
3) $q>2/5$なら，$p=1$で最大

e_2に関しては
1) $p<2/3$なら，$q=0$で最大
2) $p=2/3$なら，$0\leqq q\leqq 1$で最大
3) $p>2/3$なら，$q=1$で最大



$(p, q)=(0, 0)$
女も男もサッカーを選ぶ
$(p, q)=(1, 1)$
女も男もオペラを選ぶ
$(p, q)=(2/3, 1/3)$
u_1（オペラ）=2/3
u_1（サッカー）=1/3
u_2（オペラ）=1/3
u_2（サッカー）=2/3
女はオペラを2/3の確率で，
男はオペラを1/3の確率で選ぶ