

基礎プロジェクトレポート(第3週分)

システム創成学科3年
西村弘平(03-160946)

1.目的

以下の3つの例題を通して3次元体系のシミュレーション手法を学ぶ。

例題1.3次元体系のキャビティ流れ

例題2.伝熱・対流流れ((2次元解析との比較)

例題3.3次元ポアズイユ流れ

2.解析条件・体系

例題1.3次元体系のキャビティ流れ

1m四方の3次元空間にて $z=1$ の平面上で $x=1.0\text{m/s}$ の速度を与え、キャビティ流れの様子を観測する。第1回るときと同様の条件にするために密度 1.0kg/m^3 、粘度 $0.01\text{Pa}\cdot\text{sec}$ でシミュレーションを行った。分割数は各方向10とした。

例題2. 伝熱・対流流れ(2次元解析との比較)

まず2次元空間で以下の条件で対流伝熱問題をシミュレーションする。

$x=0$ の面を 600K 、 $x=1$ の面を 300K の温度固定の滑りなし壁境界に設定する。 $y=0, y=1$ の面を断熱境界に設定する。 $\beta=0.01[1/\text{K}]$ 、 $\lambda=10[\text{W/m/K}]$ 、 $C=100[\text{J/kg/K}]$ で設定し、 y のマイナス方向に重力加速度を与えてシミュレーションを行う。分割数は x, y 方向ともに10とした。

次に、上記の2次元空間における z 方向の長さを1mにし、 $z=0, 1$ の面を周期境界としシミュレーションを行った。そのほかの条件は上の2次元空間のときと同じ値を用いた。分割数は x, y ともに10とした。

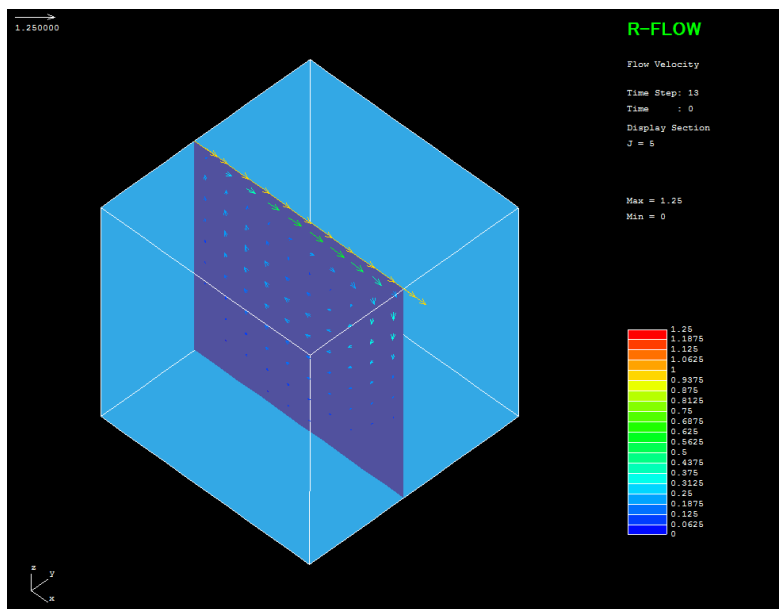
例題3.3次元ポアズイユ流れ

直径2m、高さ10mの円柱にてポアズイユ流れのシミュレーションを行った。密度 1.0kg/m^3 、粘度 $0.01\text{Pa}\cdot\text{sec}$ とし、 $z=0$ の面を流入境界、 $z=1$ の面を流出境界として z の正方向に速度 0.1m/s を与え、シミュレーションを行った。分割数は講義資料に従って分割を行った。円の中心に対角線の長さが1mの正方形を書き、その正方形の内部は1辺それぞれ10分割した。また、正方形の外部を4つに分け、それぞれ各辺10分割した。

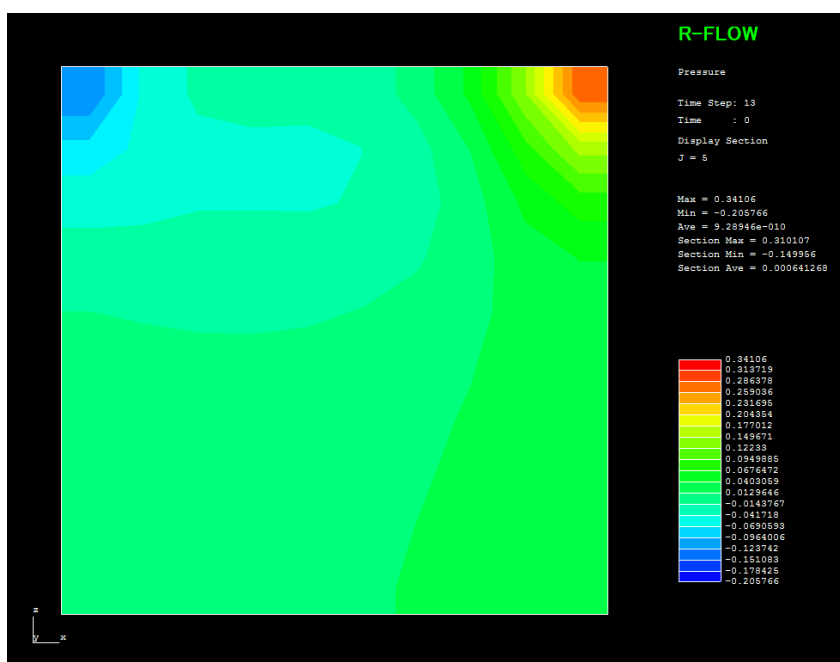
3.解析結果

例題1.3次元体系のキャビティ流れ

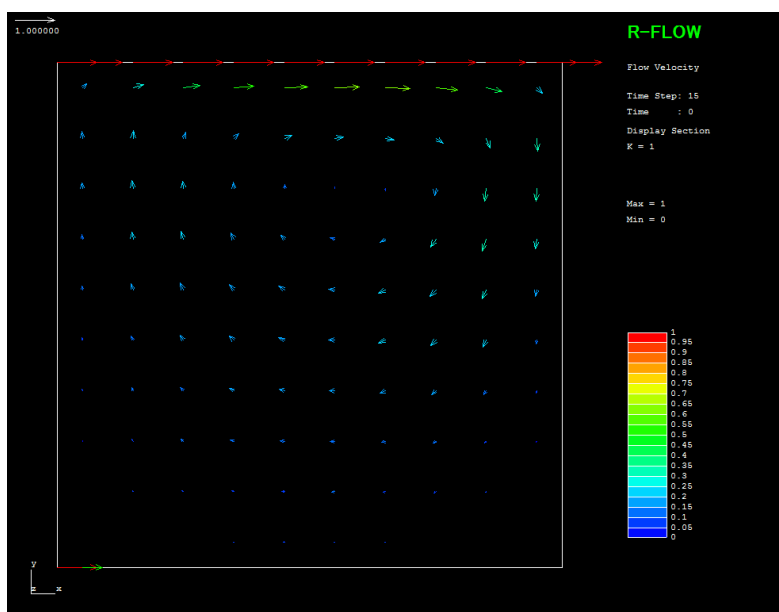
$y=5$ での速度分布図は下図



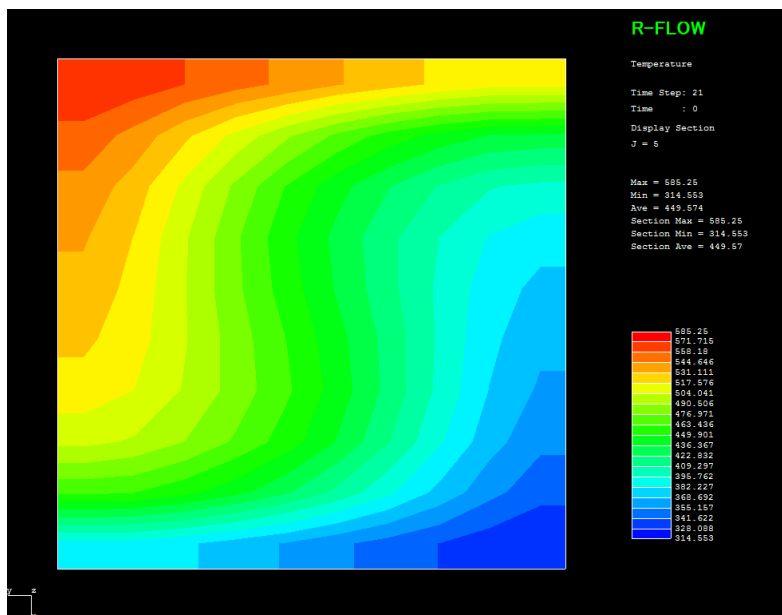
また、 $y=5$ での圧力分布図は下図



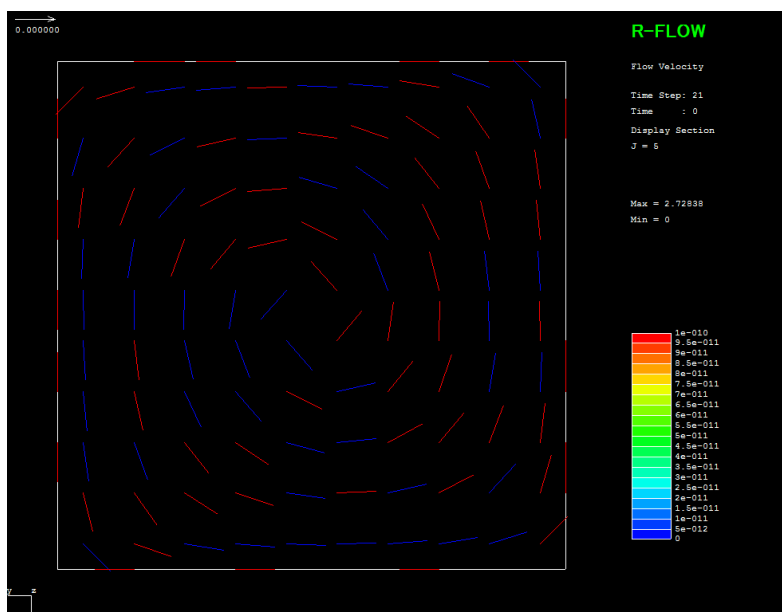
第1回のときの2次元の空間でのキャビティ流れの速度分布と圧力分布図は下図



3次元空間での温度分布は下図(図が反転してしまい修正する方法がわかりませんでした。)

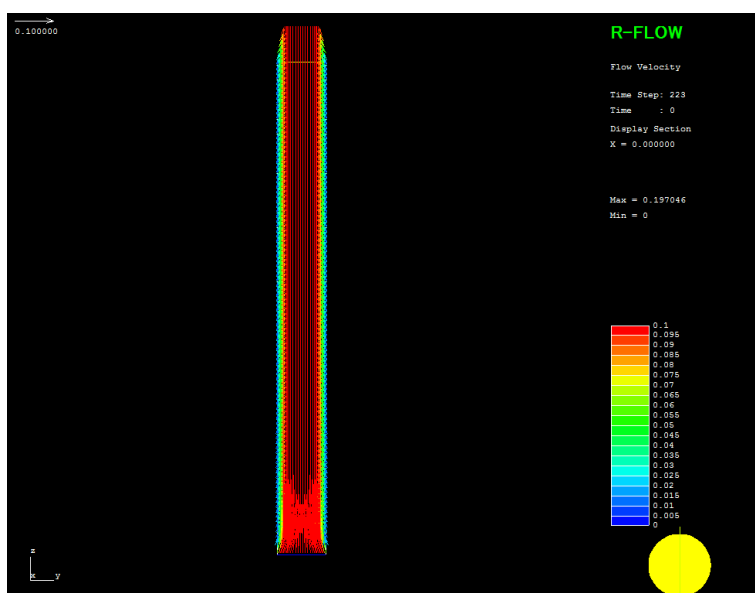


3次元空間での速度分布は下図



例題3.3次元ポアズイユ流れ

x=0における断面の速度分布は下図



4.考察

例題1.3次元体系のキャビティ流れ

圧力分布の様子は第1回の授業での二次元でのキャビティ流れと今回の3次元空間でのキャビティ流れで同様の分布となった。具体的な圧力の値については最大で100分の5ほど誤差があったがこれは2次元空間と3次元空間による圧力の差であり、特に3次元空間の方では $y=5$ の圧力値をとってきているために $y<5$ と $y>5$ の両側から影響を受けたために差異が生じたと考えられる。

また、速度の分布についても見てみる。2次元においては $x=5$ での速度分布、3次元では $x=5, y=5$ での直線上の速度分布を取ってみると下図のようになる。

| 変数 | 2次元 | 3次元 |
|-------------|--------------|--------------|
| 0.00000E+00 | 4.65661E-10 | 3.49246E-10 |
| 1.00000E-01 | -5.57456E-02 | -5.97614E-02 |
| 2.00000E-01 | -9.61263E-02 | -1.02418E-01 |
| 3.00000E-01 | -1.29253E-01 | -1.37416E-01 |
| 4.00000E-01 | -1.54141E-01 | -1.65115E-01 |
| 5.00000E-01 | -1.60504E-01 | -1.78232E-01 |
| 6.00000E-01 | -1.32809E-01 | -1.60627E-01 |
| 7.00000E-01 | -5.37863E-02 | -9.09242E-02 |
| 8.00000E-01 | 9.96614E-02 | 5.97778E-02 |
| 9.00000E-01 | 3.99265E-01 | 3.7084E-01 |
| 1.00000E+00 | 1.00000E+00 | 1.00000E+00 |

速度の値は異なるものの分布の様子は同様のものとなった。誤差に関してはシミュレーションを行う空間が2次元か3次元なのかによるものだと考えられる。

例題2.伝熱・対流流れ((2次元解析との比較)

温度に関しては誤差が生じていて、特に300Kの壁面側の温度に誤差が生じた。z方向は周期境界であり、2次元と3次元の空間による誤差にしては大きすぎるのでは思ったが他に2つのシミュレーションで条件に違いはないので空間の誤差と考えられる。

例題3.3次元ポアズイユ流れ

円管の半径をR,円管の長さをLとしてポアズイユ流れの厳密解を考える。今回のシミュレーションでの流れ場の条件は非圧縮、定常、層流。ナビエ・ストークスの方程式のz方向を考えると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u$$

速度は円の中心が最大となり、壁近傍での流速は0という境界条件をあわせてこの微分方程式を解くと流速は半径からの距離rの関数として $u(r) = -\frac{p_2 - p_1}{4\mu L} (R^2 - r^2)$ として表される。 $(p_1, p_2$ をそれぞれ流入、流出境界の圧力とする。 $p_1 > p_2$)

$u(r)$ を用いて流量Qを求める。円柱の断面で面積分してやると

$$Q = \int_0^R \int_0^{2\pi} \pi u(r) r d\theta dr = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left(\frac{p_1 - p_2}{L} \right)$$

今回のシミュレーションにおいて流量は

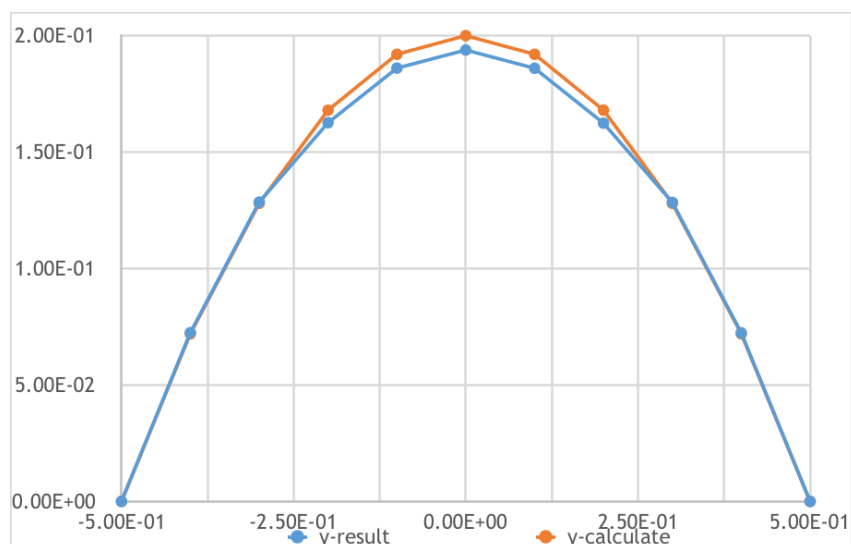
$$\pi \times R^2 \times 0.1 \times 1$$

なのでここから $u(r)$ を計算すると

$$u(r) = 0.8(0.25 - r^2)$$

数値解(x=0、z=5での速度値をy-result)と厳密解(y-calculate)として表、グラフにしたものが下図

| y | y-result | y-calculate |
|-----------|----------|-------------|
| -5.00E-01 | 7.33E-08 | 0.00E+00 |
| -4.00E-01 | 7.25E-02 | 7.20E-02 |
| -3.00E-01 | 1.29E-01 | 1.28E-01 |
| -2.00E-01 | 1.63E-01 | 1.68E-01 |
| -1.00E-01 | 1.86E-01 | 1.92E-01 |
| 7.45E-09 | 1.94E-01 | 2.00E-01 |
| 1.00E-01 | 1.86E-01 | 1.92E-01 |
| 2.00E-01 | 1.62E-01 | 1.68E-01 |
| 3.00E-01 | 1.28E-01 | 1.28E-01 |
| 4.00E-01 | 7.24E-02 | 7.20E-02 |
| 5.00E-01 | 8.31E-08 | 0.00E+00 |



速度について数値解と厳密解がほぼ一致し、シミュレーション結果が理論値に一致した。グラフについて中央では誤差が生じているが、誤差は0.0006ほどでメッシュが各線分を10分割していることによるものだと考えられる。

5.まとめ

3次元空間のシミュレーション方法を学習できた。3次元と2次元では温度、速度、圧力など分布は同様になるものの、全く同じ値にはならなかった。密度、粘性粒度などは同じ値でシミュレーションを行ったのでその誤差が2次元と3次元の空間の差異によるものだと考えたが、3次元のシミュレーション結果から各値を導く場合にどの切断面から値を導くかでどのように値や誤差が変化するかを調べてみたいと思う。

参考URL: ハーゲン・ポアズイユ流れ(http://okuma.uunyan.com/category/rheology/hagen_poiseuille_flow/hagen_poiseuille_flow.html)