経済学基礎

-第３回前半　消費者選好と効用関数-

菅　史彦

内閣府　経済社会総合研究所

復習１：比較優位の理論

まず最もシンプルなモデルとして、リカードの「比較優位」モデルを勉強した。

- 二人の経済主体が、２つの財を生産・消費するモデル。
- 交換・分業により豊かになれるための必要最低限の条件とは何かを教えてくれる。
- どのように価格と数量が決まるかについては何も教えてくれない。

ある財の価格と数量がどのように決まるのかを知るために、競争市場における需要・供給と均衡について勉強した。

復習２：競争市場の理論

ある財の価格と数量がどのように決まるのかを知るために、１つの財の市場を考える。

- 消費者・生産者は価格受容者（プライステイカー）
- 右下がりの市場需要曲線
- 右上がりの市場供給曲線
- 需要曲線と供給曲線の交点（＝均衡）で価格と生産・消費量が決まる。

復習３：余剰分析

- 競争市場のモデルから、
  1. どのように価格と数量が決まるか。
  2. 需要・供給曲線へのショックが、価格と数量にどのように影響を与えるか。
  3. そのような価格・数量への影響は、需要・供給曲線の形状とどのように関わっているか。

  がわかった。
- 競争市場のモデルを制度・政策のデザインにどのように役立てるか。
- 余剰分析によって、政策が消費者・生産者の厚生に与える影響を分析することができる。

消費者の問題

需要曲線はどこからきたのか？

- 需要関数は $q_d = D(p, x_1, x_2, \ldots, x_m)$ で与えられる。
- 外生変数 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ に含まれるのは、所得や他の財の価格。
- 所得や他の財の価格が与えられたもとで、その財の価格と消費量をプロットしたのが需要関数。
- ここでは、所得や財の価格が与えられた時、どのように消費量を決定するのかという問題を考える。

予算制約と予算集合

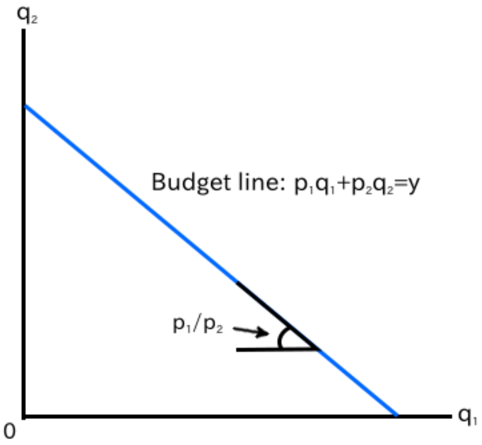
問題を簡単にするため、消費する財は２つとする。

- 財の価格を p_1, p_2、消費量を q_1, q_2、所得を y とおく。
- 予算制約式は以下で与えられる。

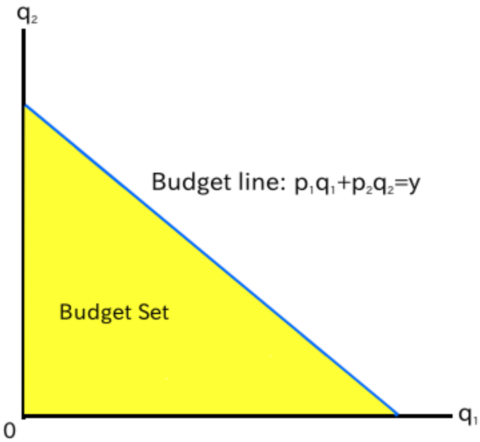
$$p_1 q_1 + p_2 q_2 \leq y$$

- q_1 を X 軸、q_2 を Y 軸にとり、予算制約線を描く。
- X 軸、Y 軸、予算制約線に囲まれたエリアの点はどこでも消費可能

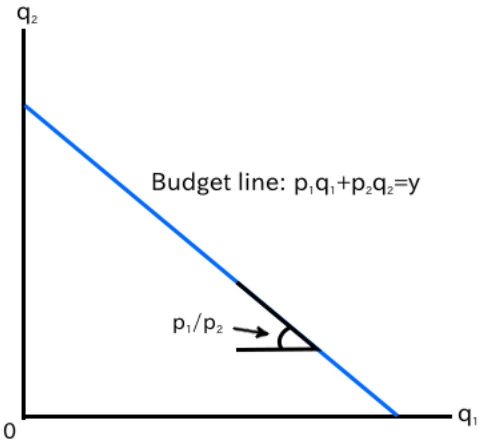
予算制約と予算集合



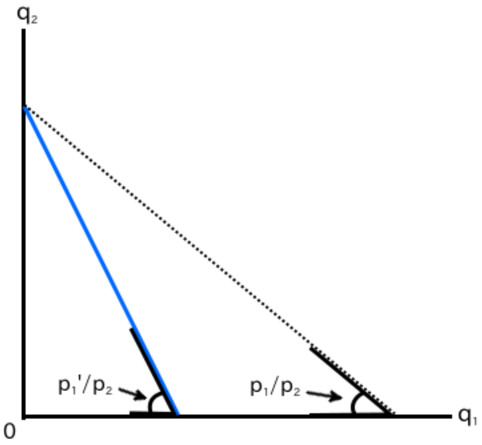
予算制約と予算集合



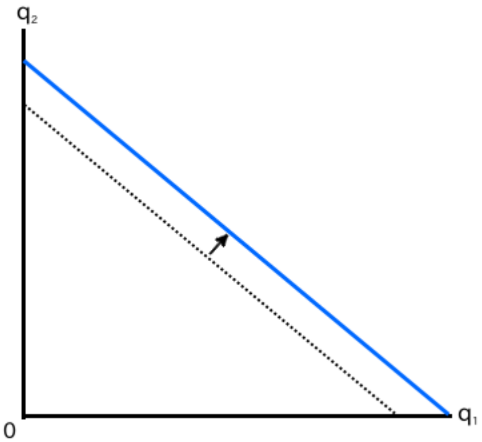
予算制約と予算集合



予算制約と予算集合



予算制約と予算集合



消費者の選好

「何をどれだけ消費できるか」は決まったので、その中で「何をどれだけ消費したいか」（＝消費者の選好（Preference））を考える。

- いま、一時的に n 個の財があるとする。
- ２つの異なった消費される財の組み合わせを表す n 次元ベクトルを Q_1、Q_2 とする。

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= (q_{11}, q_{12}, \ldots, q_{1n}) \\
Q_2 &= (q_{21}, q_{22}, \ldots, q_{2n})
\end{aligned}
$$

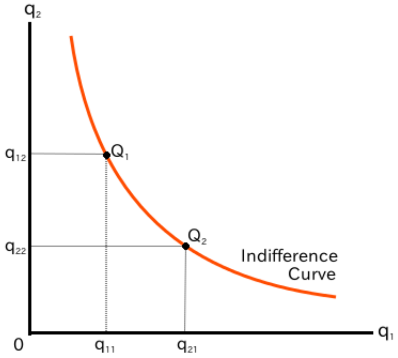
消費者の選好

消費者の「好み」を以下のような記号で表す：

- $Q_1 \succsim Q_2$：Q_1 が Q_2 より少なくとも同程度好まれる。
- $Q_1 \succ Q_2$：Q_1 が Q_2 より好まれる。
- $Q_1 \precsim Q_2$：Q_2 が Q_1 より少なくとも同程度好まれる。
- $Q_1 \prec Q_2$：Q_2 が Q_1 より好まれる。
- $Q_1 \sim Q_2$：Q_1 と Q_2 が同等に好まれる。

消費者の選好：無差別曲線

同等に好まれることを無差別 (indifferent) といい、消費者が無差別な財の組み合わせをつないだものを無差別曲線 (indifference curve) と呼ぶ。

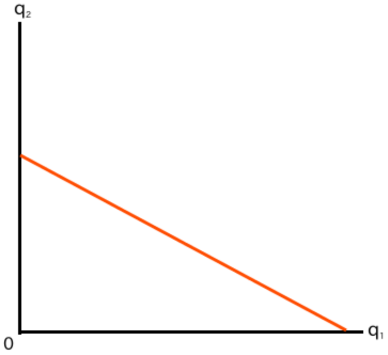


消費者の選好：無差別曲線

無差別曲線 (indifference curve) は、消費者にとっての２財の関係を表す。

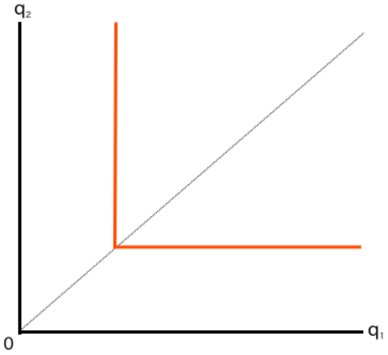
消費者の選好：無差別曲線

２財が完全代替財のとき。



消費者の選好：無差別曲線

２財が完全補完財のとき。



消費者の選好：合理的行動

消費者の合理性を考えるために、選好が満たすべき条件を考える。

完全性

選択対象となる全ての Q_1、Q_2 に関して、

- $Q_1 \succ Q_2$
- $Q_1 \prec Q_2$
- $Q_1 \sim Q_2$

のいずれか 1 つが成り立つこと。

消費者の選好：合理的行動

推移性

$Q_1 \succ Q_2$ かつ $Q_1 \succ Q_3$ ならば $Q_1 \succ Q_3$ が成り立つ。

消費者の選択行動が完全性と推移性を満たす、つまり、

- 全ての選択肢にきちんと順序が付き、
- かつ順序付けに矛盾がない

のであれば、とりあえず消費者の選好は首尾一貫していると見なせる。

合理的行動

完全性と推移性を満たす選好のもとで、最も好ましいものを選ぶこと。

効用関数

「選好」だけでは、微分したりすることができないので、消費行動を分析するには不便。そこで、効用関数を用いる。

効用関数

$Q_1 \succsim Q_2$ ならば $u(Q_1) \geq u(Q_2)$ となるような関数 $u(.)$ を選好 $\succsim$ を表現する効用関数と呼ぶ。

- 選好もしくは選択行動を表現できればよいので、選好 $\succsim$ を表現する効用関数は無数に存在する。
- 例えばある関数 $u(.)$ が選好 $\succsim$ を表現する効用関数ならば、任意の単調増加関数 $f(.)$ を使って作った $f(u(.))$ も選好 $\succsim$ を表現する効用関数である。

選好 $\succsim$ と効用関数

どのような選好であっても、それを表現する効用関数が存在するのか？

$\rightarrow$ ある選好 $\succsim$ を表現する（かつ望ましい性質を持つ）効用関数が存在するためには、完全性と推移性に加えて、以下の３つの条件が必要である。

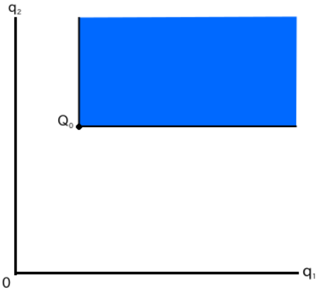
- 単調性
- 選択の連続性
- 無差別曲線が強凸性を持つこと

選好 $\succsim$ と効用関数

単調性

$Q_i = (q_{i1}, q_{i2}, \ldots, q_{in}), i = 1, 2$ とする。この時、全ての i について $q_{1i} \leq q_{2i}$ で、少なくとも一つの i について $q_{1i} < q_{2i}$ ならば $Q_1 \prec Q_2$

より多く消費できるなら、必ず嬉しいということ。

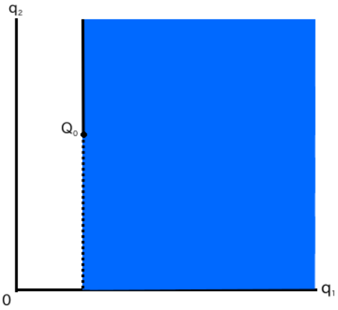


選好 $\succsim$ と効用関数

選択の連続性

全ての Q_0 について、$\{Q : Q \succsim Q_0\}$ は閉集合、$\{Q : Q \succ Q_0\}$ は開集合である。

辞書的オーダーの選好みたいな $\succsim$ が排除される。

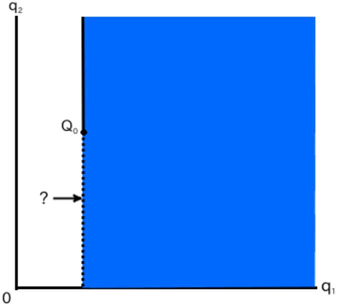


選好 $\succsim$ と効用関数

選択の連続性

全ての Q_0 について、$\{Q : Q \succsim Q_0\}$ は閉集合、$\{Q : Q \succ Q_0\}$ は開集合である。

辞書的オーダーの選好みたいな $\succsim$ が排除される。

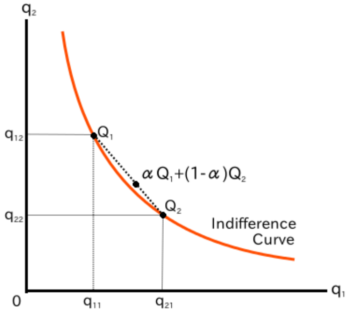


選好 $\succsim$ と効用関数

無差別曲線の強凸性

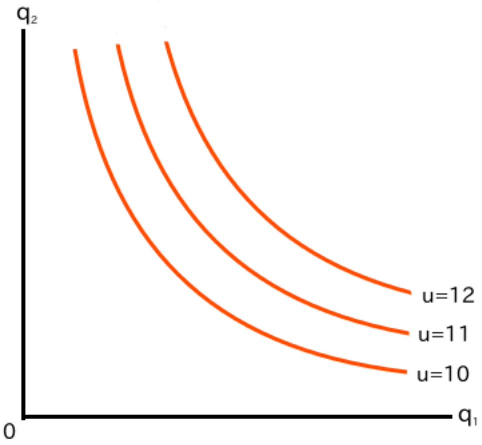
$Q_1 \neq Q_2$ で $Q_1 \sim Q_2$ ならば、全ての $0 < \alpha < 1$ に関して、

$$\alpha Q_1 + (1-\alpha)Q_2 \succ Q_1$$



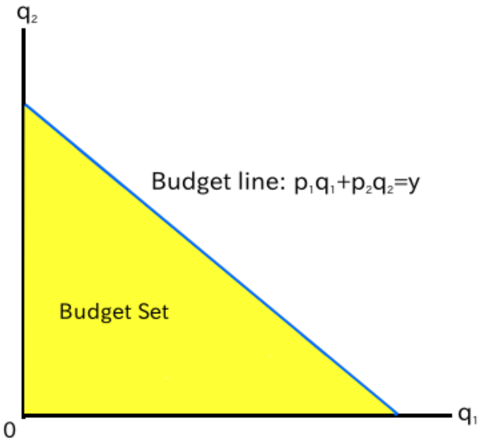
選好と無差別曲線

選好が合理的で、さらに上記の３つの条件を満たしていれば、こんな↓感じの無差別曲線が描けそう。



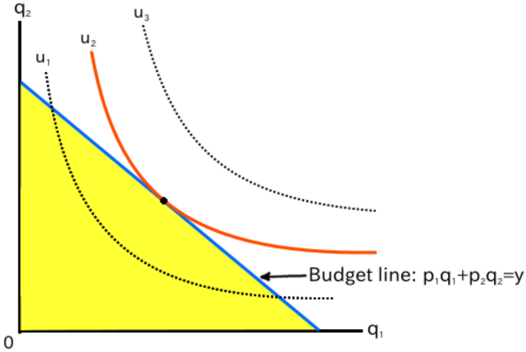
最適消費

消費可能な財の組み合わせの集合は、予算集合で与えられる。



最適消費

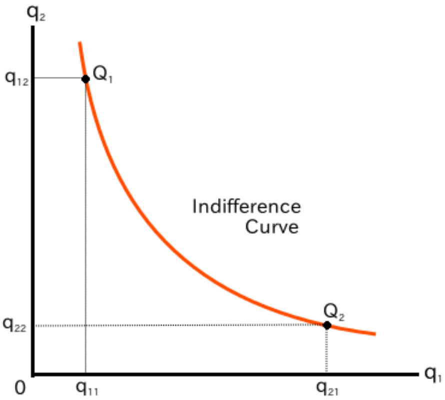
予算集合の中で最も好ましいものは、予算制約線と無差別曲線の接点になっている。



消費計画が一意に定まるには、無差別曲線の強凸性が大事。

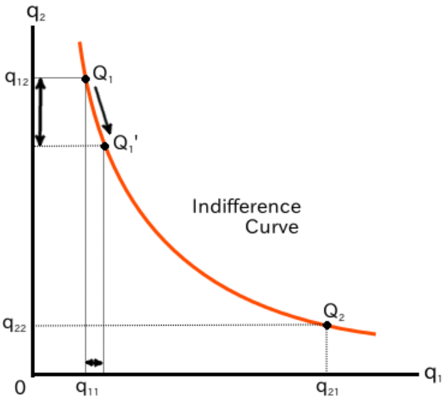
無差別曲線の強凸性の含意

直感的には、多く消費するほどありがたみが減り、少ししか消費できないとありがたみが増すということ。



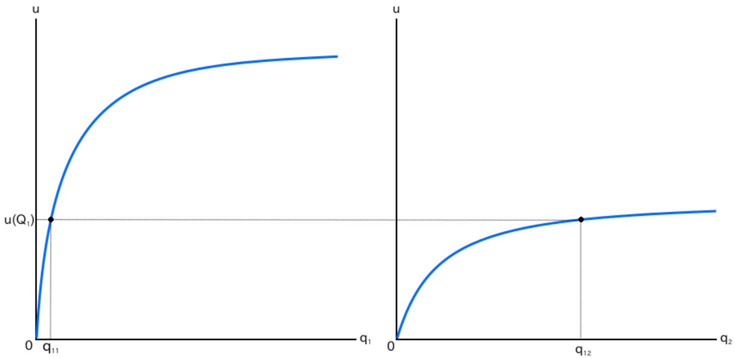
無差別曲線の強凸性の含意

直感的には、多く消費するほどありがたみが減り、少ししか消費できないとありがたみが増すということ。



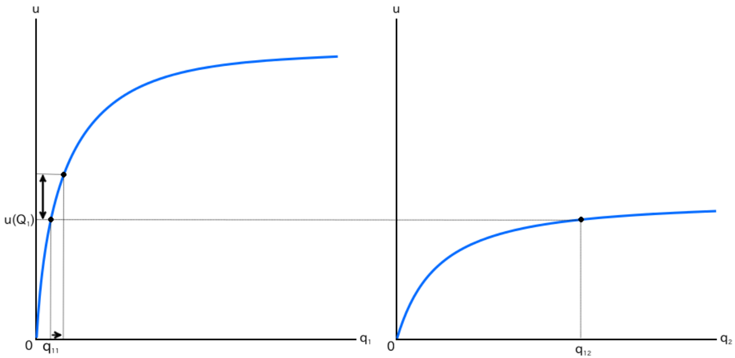
無差別曲線の強凸性の含意

無差別曲線の強凸性は効用関数の凹関数であることと関係がありそう。



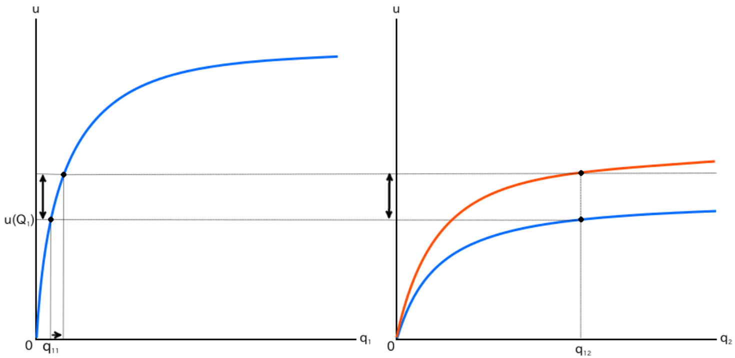
無差別曲線の強凸性の含意

無差別曲線の強凸性は効用関数の凹関数であることと関係がありそう。



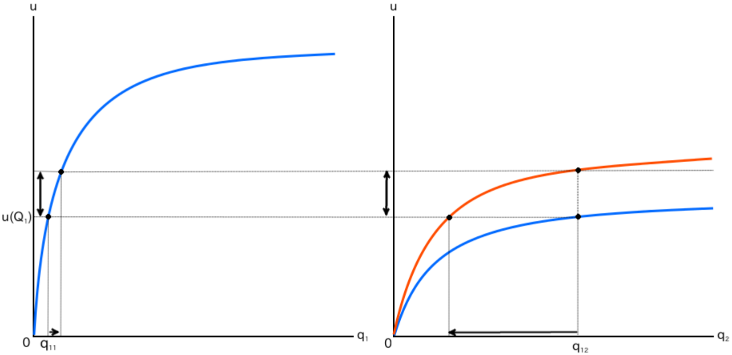
無差別曲線の強凸性の含意

無差別曲線の強凸性は効用関数の凹関数であることと関係がありそう。



無差別曲線の強凸性の含意

無差別曲線の強凸性は効用関数の凹関数であることと関係がありそう。



無差別曲線の強凸性の含意

これを数式を使ってきちんと考える。

- 効用関数を $u = u(q_1, q_2)$ とし、
- $u_1 \equiv \partial u/\partial q_1 > 0$、$u_2 \equiv \partial u/\partial q_2 > 0$ とする。
- 効用関数の全微分は、

$$du = u_1 dq_1 + u_2 dq_2$$

となる。

無差別曲線の強凸性の含意

- 無差別曲線上の点では効用は同じなので $du = 0$、したがって、

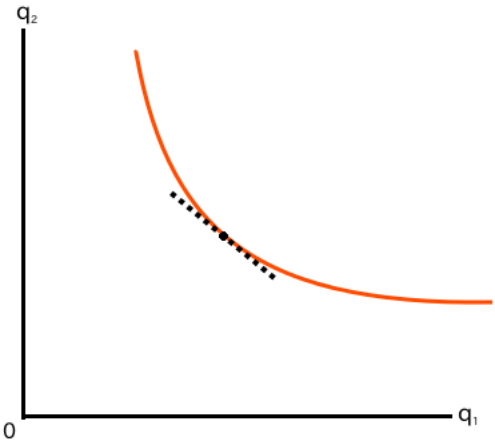
$$u_1 dq_1 + u_2 dq_2 = 0$$

- よって無差別曲線の傾きは、

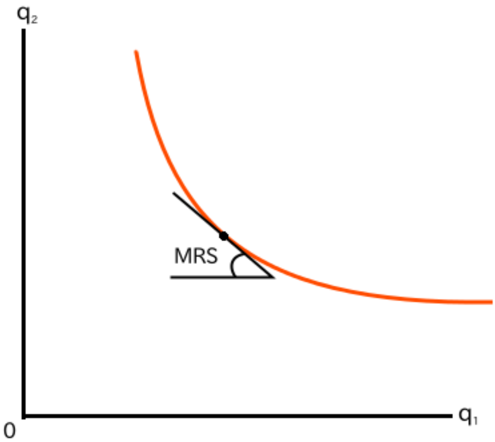
$$\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{u_1}{u_2} < 0$$

  で与えられる。
- これは、q_1 が 1 単位増加／減少したときに、効用を一定に保つために減少／増加させなければならない q_2 の量で、u_1/u_2 は限界代替率 (MRS) と呼ばれる。

無差別曲線の強凸性の含意



無差別曲線の強凸性の含意



無差別曲線の強凸性の含意

いまは無差別曲線の「凸性」に関心があるので、２次の微分をとる。

- $g \equiv dq_2/dq_1 (= -u_1/u_2)$ と定義する。
- g を全微分すると、

$$
\begin{aligned}
dg &= -\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{u_1}{u_2}\right) dq_1 - \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{u_1}{u_2}\right) dq_2 && (1) \\
&= \frac{u_{12}u_1 - u_{11}u_2}{u_2^2} dq_1 - \frac{u_{12}u_2 - u_{22}u_1}{u_2^2} dq_2 && (2)
\end{aligned}
$$

無差別曲線の強凸性の含意

- 知りたいのは $d^2q_2/dq_1^2 = dg/dq_1$ なので、（2）式の両辺を dq_1 で割って、$dq_2/dq_1 = -u_1/u_2$ を代入すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2q_2}{dq_1^2} = \frac{dg}{dq_1} &= \frac{u_{12}u_1 - u_{11}u_2}{u_2^2} - \frac{u_{12}u_2 - u_{22}u_1}{u_2^2}\frac{dq_2}{dq_1} \\
&= \frac{-u_{11}u_2^2 + 2u_{12}u_1u_2 - u_{22}u_1^2}{u_2^3} \\
&= \frac{1}{u_2^3}\Delta, \quad \Delta = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_1 \\ u_{12} & u_{22} & u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

- $u_2 > 0$ なので、$\Delta > 0$ なら無差別曲線は強凸関数。

無差別曲線の強凸性の含意

ここで、効用関数 $u(.)$ のヘッシアン行列を

$$H \equiv \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{bmatrix}$$

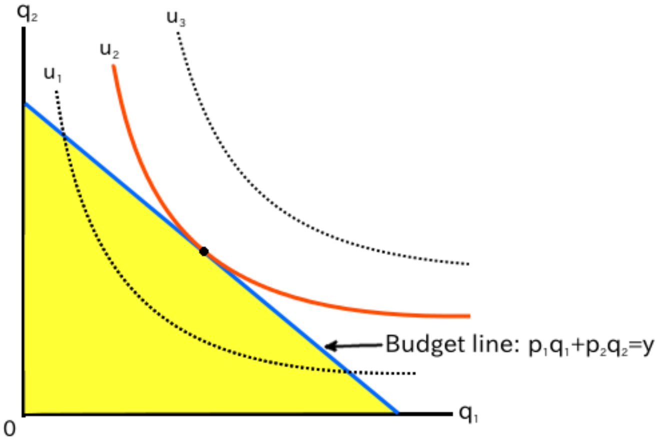
と定義し、H^* を以下のように定義する。

$$H^* \equiv \begin{bmatrix} -u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & -u_{22} \end{bmatrix}$$

このとき、$\Delta = (u_1, u_2)H^*(u_1, u_2)'$ とかける。よって、H^* が正値定符号行列=H が負値定符号行列ならば無差別曲線は強凸性を持つ。
→ これは効用関数が強準凹関数であるための条件と同じ。

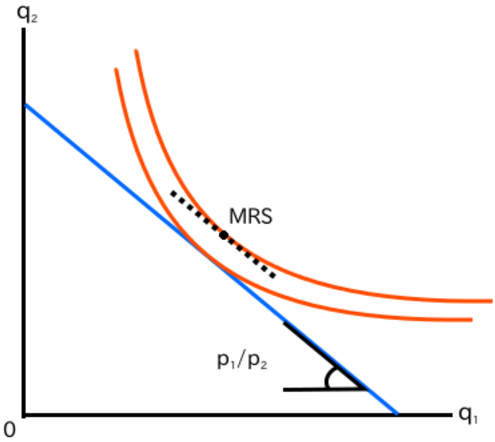
最適消費の条件

予算集合の中で最も好ましいものは、予算制約線と無差別曲線の接点になっている。



最適消費の条件

すなわち、$MRS = p_1/p_2$ が成立する。



最適消費の条件の意味

- $MRS = p_1/p_2$ の条件は、

$$\frac{u_1}{p_1} = \frac{u_2}{p_2} \equiv \lambda$$

  と書ける。

- これは、第 1 財に払った最後の 1 円からの効用と、第 2 財に払った最後の 1 円からの効用が等しいことを意味する。

- λ は所得が 1 円増えた時に、その 1 円でどちらかを買って得られる効用なので、所得の限界効用と見なせる。

最適消費の導出

これを例によって、きちんと数式を使って考える。

- 消費者の問題は、

$$\max_{q_1, q_2, \ldots, q_n} \quad u(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i q_i = y$$

  と書ける。

- これをラグランジュの未定乗数法で解く。

ラグランジュの未定乗数法

1. まず、以下のように L を定義する：

$$L = u(q_1, q_2, \ldots, q_n) + \lambda \left(y - \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \right)$$

2. これを $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ と λ について微分して 0 とおく。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial q_1} & = 0 \\ & \vdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial q_n} & = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} & = 0 \end{cases}$$

ラグランジュの未定乗数法

このとき、

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial q_1} & = u_1 - \lambda p_1 = 0 \rightarrow \frac{u_1}{p_1} = \lambda \\ & \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial q_n} & = u_n - \lambda p_n = 0 \rightarrow \frac{u_n}{p_n} = \lambda \end{cases}$$

なので、ラグランジュの未定乗数 λ は所得の限界効用になっている。

包絡線定理

これは、包絡線定理を使って確認することもできる。

- 目的関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ を制約式 $g(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0$ のもとで最大化する。
- ラグランジュの未定乗数法で解くため、

$$L = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) + \lambda g(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$$

  とおく。
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ と λ について一階条件をとって、以下を得る。

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad \text{for} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

包絡線定理

- これを解くと、解として、

$$x_i^* = x_i(z) \quad i = 1, 2, \dots, n$$
$$\lambda^* = \lambda(z)$$

が得られる。

- これを目的関数 f に代入したものを $h(z)$ と定義する。

$$h(z) \equiv = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, z) = f(x_1(z), x_2(z), \dots, x_n(z), z)$$

- 包絡線定理は、

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial L}{\partial z}$$

を示すもの。

包絡線定理

これを消費者の問題に適用する。いま、

$$L = u(q_1, q_2, \ldots, q_n) + \lambda\left(y - \sum_{i=1}^{n} p_i q_i\right)$$

$$h = u\left(q_1\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, y\right), \ldots, q_n\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, y\right)\right)$$

なので、

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} u\left(q_1\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, y\right), \ldots, q_n\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, y\right)\right) = \lambda$$

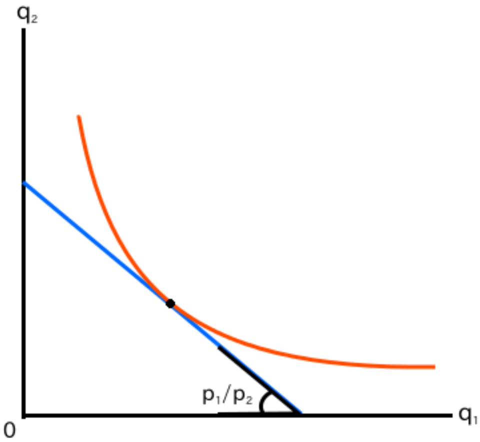
が得られる。
$\rightarrow \lambda$ が所得の限界効用であることを確認できた。

最適消費の性質

- 最適な消費計画 $q_1, q_2, \ldots, q_n$ は、価格 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ や所得 y に依存して決まる。
- 今、価格ベクトル $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)'$ と所得 y が与えられたもとでの i 財の最適な消費を $q_i^* = q_i(\boldsymbol{p}, y)$ で表し、これを需要関数と呼ぶこととする。
- 価格や所得が変化した時に、最適な消費計画はどのように変化するかを分析する。
- このような分析は、増税／減税によって所得や財の相対価格が変化した際の政策効果を分析するのに役立つ。

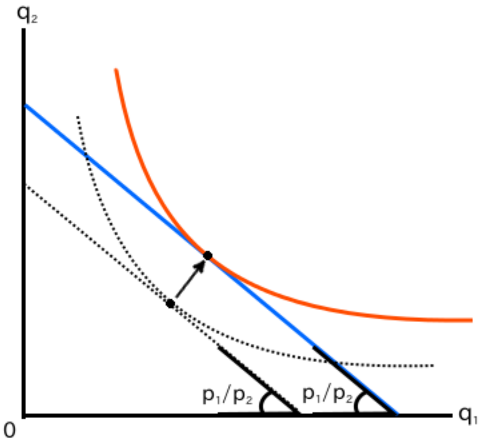
最適消費の性質：所得の影響

所得が増加するとき、財の消費が増えるのは上級財（正常財）



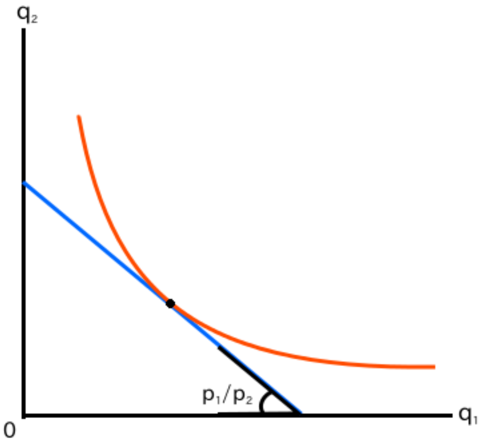
最適消費の性質：所得の影響

所得が増加するとき、財の消費が増えるのは上級財（正常財）



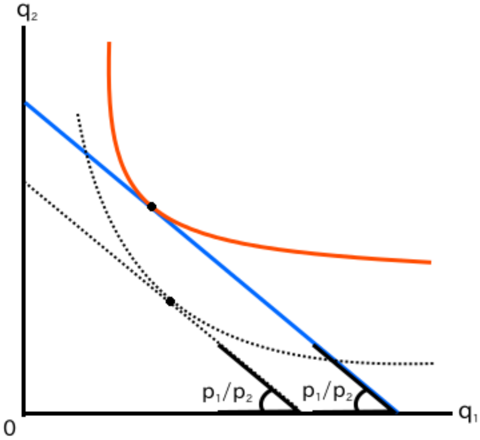
最適消費の性質：所得の影響

所得が増加するとき、財の消費が減るのは下級財



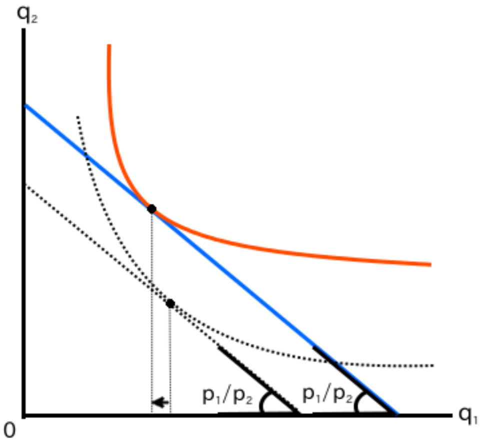
最適消費の性質：所得の影響

所得が増加するとき、財の消費が減るのは下級財



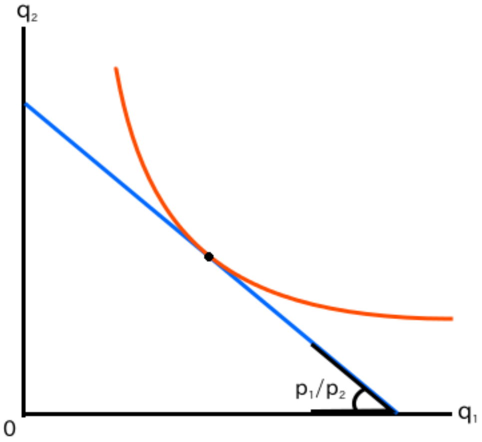
最適消費の性質：所得の影響

所得が増加するとき、財の消費が減るのは下級財



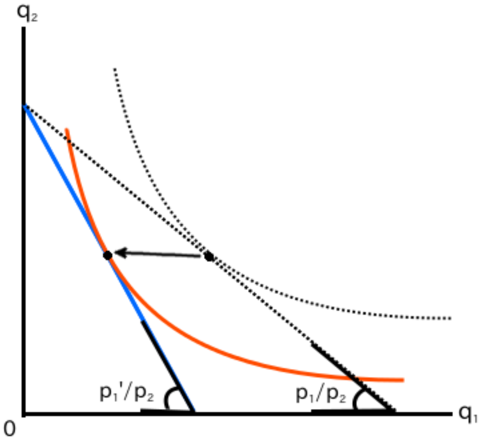
最適消費の性質：価格の影響

価格が上がれば、その財の消費は普通減る。（減らずに増えたら、その財はギッフェン財と呼ばれる。）



最適消費の性質：価格の影響

価格が上がれば、その財の消費は普通減る。（減らずに増えたら、その財はギッフェン財と呼ばれる。）



高齢者医療費の例

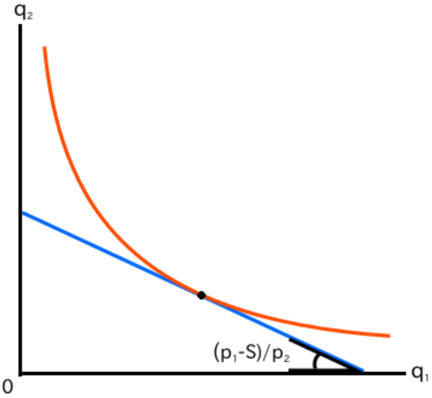
神取通宏『ミクロ経済学の力』で紹介されている例。

- 以上の分析の枠組みが、現実の問題の分析にどのように役立つかを見るため、医療費補助の問題を考える。
- 現在 70 歳以上なら医療費の負担は 1 割で、残りは政府（納税者）が払っている。
- 医療サービスを第一財（価格 p_1、消費量 q_1）、他の消費財を第二財（価格 p_2、消費量 q_2）とする。
- 政府が医療サービス一単位あたり S 円負担しているとする。

最適消費の性質：価格の影響

老人の予算制約式は以下で与えられる。

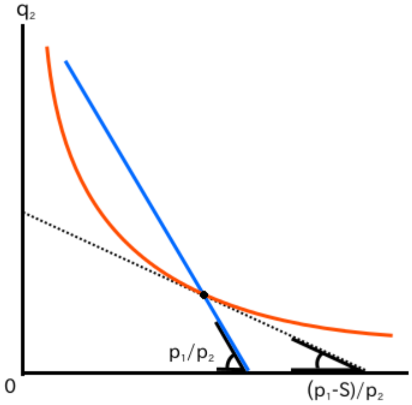
$$(p_1 - S)q_1 + p_2q_2 = y$$



最適消費の性質：価格の影響

医療費補助をやめて、代わりに年金を $S \times q_1^*$ だけ増やす。

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = y + S q_1^*$$



最適消費の性質：価格の影響

政府の支出は変わらず、老人の効用は増大する。→ 政府が価格を無理に安くしようとすると、ロスが発生する。