2015.6.4

数理計画と最適化
ー組み合わせ最適化1ー

精密工学科
浅間 一
簑原 凜，徐 彬斌，楊 濘嘉（TA）
asama@robot.t.u-tokyo.ac.jp

組み合わせ最適化（欲張り法）	授業（6/4），演習（6/5）
組み合わせ最適化（分枝限定法）	授業（6/11），演習（6/12）
グラフとネットワーク（ダイクストラ法）	授業（6/18），演習（6/19）
グラフとネットワーク（巡回セールスマン問題）	授業（6/25），演習（6/26）
ゲーム理論（安先生代講）	授業（7/2），演習（7/3）
ミニテスト・最終課題	授業（7/9），演習（7/10）

緩和
$(1\ \frac{2}{5}\ 0\ 0)$

目 $= 7 + 8 \times \frac{2}{5}$
$= 10.2$

定式化（Formulation）

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max \qquad f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \to \max$$

$$g = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b \qquad g = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \le b$$

$$x_i = 0 \text{ or } 1$$

$x_i \in X$ 空でない有限集合

S 制約条件を満たすxの集合

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ナップザック問題

ハイキングの準備をしている桃子さんは，いくつかの品物のなかからどれとどれを選んで持っていこうか迷っている．品物は全部でn個あり，品物iの重さをa_iキログラム，その利用価値を数量的に表したものをc_iとする．ナップザックには全部でbキログラムまでしか詰め込めないとすれば，利用価値の総計が最大となるように品物を選ぶにはどうすればよいだろうか．

福島雅夫：数理計画入門，朝倉書店，1996

i	1	2	3	4
c_i	7	8	1	2
a_i	4	5	1	3
r_i	1.75	1.6	1	0.67

$b = 6$
$n = 4$

よくばり法
① 1をとる
② 2をとると b を超えるので ×
③ 3をとる
④ 4をとる

クラスP 多項式時間で解ける
⇕
クラスNP

終了

解法

必ず最適解が求まる

- 列挙法（Enumeration）（厳密解法）
- ランダム法 → 勿論厳密解法ではないし近似解法とも呼ばない
- 欲張り法（Greedy Method）（近似解法） ← たぶん最適解
- けちけち法（Stingy Method）（近似解法）
- 分岐限定法（Branch and Bound Method）（厳密解法）
  - 緩和問題

けちけち法
① 全部とる
② bを超えているので 4をはずす
③ 〃 3
④ 〃 2
⑤ bを下回る → 終了

列挙法(例題:ナップザック問題)

問題

新規事業　$x_i = 0$（行わない）
　　　　　$= 1$（行う）
　　　　　$(i = 1, \ldots, n)$　　$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \to \max$

b：予算　　　　　　　　　　$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le b$
c_i：期待利益
a_i：経費

2^n回評価
n次元整数ベクトル$\{x_i\}$
$f = 7x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max$
$g = 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 \leqq 6$
$x_i = 0, 1 \ (i = 1, \ldots, 4)$
(x_1, x_2, x_3, x_4)　f　g

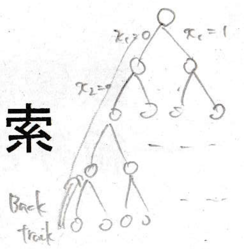
$x_1 = 1, x_2 = 1$
の場合は，既に制約を充足しない
制約×　　　　計算の無駄

解

(0, 0, 0, 0)	0	0	
(0, 0, 0, 1)	2	3	
(0, 0, 1, 0)	1	1	
(0, 0, 1, 1)	3	4	
(0, 1, 0, 0)	8	5	
(0, 1, 1, 0)	9	6	
(0, 1, 0, 1)	10	8	×
(0, 1, 1, 1)	11	9	×
(1, 0, 0, 0)	7	4	
(1, 0, 0, 1)	9	7	×
(1, 0, 1, 0)	8	5	
(1, 0, 1, 1)	10	8	×
(1, 1, 0, 0)	15	9	×
(1, 1, 0, 1)	17	12	×
(1, 1, 1, 0)	16	10	×
(1, 1, 1, 1)	18	13	×

ランダム探索

探索(Search)



深さ探索
縦型

- 探索手順
  - 初期設定
    - 暫定解 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{opt}} = \phi$, 暫定最小値 $M = \infty$
  - 次の手続きを所定の回数繰り返す
    - n次元整数ベクトル $\boldsymbol{x}$ をランダムに生成する
    - 制約条件 $\boldsymbol{x} \in S$ を満たすとき、 $x = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$
      - $f(\boldsymbol{x}) < M$ ならば、
        - » 暫定解 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{opt}} = \boldsymbol{x}$, 暫定最小値 $M = f(\boldsymbol{x})$
  - $\boldsymbol{x}_{\mathrm{opt}}$ を解とする

欲張り法

(Greedy Method)(近似解法)

問題:ナップサック問題

- 目的関数　$f = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \to \max$
- 制約条件　$\sum_{i=1}^{m} a_i x_i \le b$
  　　$x_i = 0 or 1$

$$r_i = \frac{c_i}{a_i} \quad (i = 1 \cdots n)$$

- x_iをr_iの大きい順に並べかえる

ヒューリスティックス

アルゴリズム

- 初期設定　$\tilde{b} = b$
- $j = 1, \ldots, n$ について
  次の手続きを繰り返す
  - 条件　$a_j > \tilde{b}$ が、
    - 真ならば $x_j = 0$
    - 偽ならば $x_j = 1$
      $\tilde{b} = \tilde{b} - a_j$
- $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ を解とする

$x = (1, 0, 1, 0)$ となるが
正しい答えは $(0, 1, 1, 0)$
⇓
厳密解法ではない!!

けちけち法

(Stingy Method)(近似解法)

欲張り法と同様にxをr_iの大きい順に並べ替えておく

- 初期設定　$\tilde{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad x_i = 1 \ (i = 1, \ldots, n), \quad j = n$
- 条件　$\tilde{b} > b$ が真である限り次の手続きを繰り返す
  - $\tilde{b} = \tilde{b} - a_j, \quad x_j = 0$
  - $j = j - 1$

$x = (1\ 0\ 0\ 0)$ が求まる
→ ダメ!

さらに以下を行う場合もある

- $j < n$ ならば、
  - $(x_{j+1}, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ について欲張り法を適用する
- $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ を解とする

この後にもう一度よくばり法を用いるとよい
→ この方法で $x = (1\ 0\ 1\ 0)$ が求まる…