数理分析手法Ⅰ　期末試験

2010/7/22

2 枚の解答用紙に学籍番号・氏名を必ず記入し，重ねて折りたたみ提出すること．
問 1 を 1 枚目の表，問 2 を 1 枚目の裏，問 3 を 2 枚目の表，問 4 を 2 枚目の裏に解答を記すこと．

問 1　以下の語句について解説せよ．(配点 20)

(1)　大数の法則と中心極限定理

(2)　二項分布とポアソン分布

問 2　式(1)の同時確率密度関数に従う連続型確率変数 X_1, X_2 に関して，以下の問いに答えよ．(配点 20)

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\begin{cases}15x_1x_2^2 & if\ \ 0<x_2<x_1<1 \\ 0 & otherwise\end{cases} \tag{1}$$

(1)　連続型確率変数の確率密度関数が満たすべき性質について記し，上記の関数がその性質を有することを示せ．

(2)　X_1 の周辺確率密度関数 $f_{X_1}(x_1)$，および，累積分布関数 $F_{X_1}(x_1)$ を導け．

(3)　$X_1 = x_1$ が所与の時の，条件付き確率密度関数 $f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)$ を示し，確率変数 X_2 の期待値を求めよ．

(4)　確率変数 X_1 と X_2 は統計的に独立か否か，解説せよ．

問 3　確率変数 X の分布を推定するため標本抽出を行う．標本抽出に関する以下の問いに答えよ．(配点 20)

(1)　無作為標本について解説せよ．

(2)　X の分布からの無作為標本 X_i $(i=1,\cdots,n)$ を用い，X の平均・分散を推定する．標本平均・標本分散を示し，その性質を解説せよ．

(3)　今，大標本と見なせるだけの十分な標本抽出が行われたとする．X の分散が既知および未知の場合に，X の平均の信頼区間はそれぞれどのように表されるかについて解説せよ．

問 4　線形回帰モデルに関する以下の問いに答えよ．(配点 40)

答案では，式(2)の文字を使用し線形回帰モデルを表記すること．問題中で定義されていない文字は，各自解答の中で定義を明確にした上で使用せよ．

$$\mathbf{y}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2}$$

ただし，n: 観測数，p: パラメータ数，$\mathbf{y}$: 被説明変数ベクトル($n\times1$)，$\mathbf{X}$: 説明変数行列($n\times p$)，$\boldsymbol{\beta}$: パラメータベクトル($p\times1$)，$\boldsymbol{\varepsilon}$: 攪乱項ベクトル($n\times1$)とする．

(1)　線形回帰モデルのパラメータを通常最小二乗法によって推定する際に必要な仮定を列挙し，解説せよ．

(2)　$\boldsymbol{\beta}$ の最小二乗推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ を求めよ．なお，$\dfrac{\partial(\mathbf{a}'\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}=\mathbf{a}$, $\dfrac{\partial(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}=(\mathbf{A}+\mathbf{A}')\mathbf{x}$ を利用してよい．

(3)　最小二乗推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ の分散を導け．ただし，攪乱項の分散は既知としてよい．

(4)　最小二乗推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ の統計的性質について解説せよ．

(5)　推定されたパラメータの有意性検定に必要な仮定を記せ．また，パラメータの有意性検定の対立仮説・帰無仮説を記せ．

以上