2015.6.25

数理計画と最適化
ーグラフとネットワーク2ー

精密工学科
淺間 一
簑原 凜，徐 彬斌，楊 濘嘉（TA）
asama@robot.t.u-tokyo.ac.jp

中国の郵便配達員問題

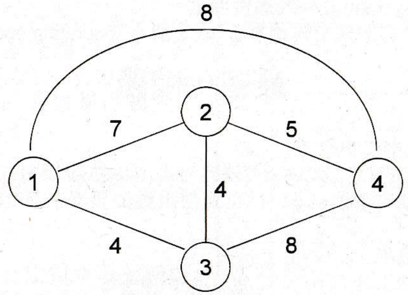
- 郵便配達員が手紙を配達するときに，できるだけ短い距離を歩いて出発点に戻るルートを求める問題（全ての道を1回以上通るような最適な経路を考える問題）．
- 担当区域内の各道路を少なくとも1回はたどらなければならないので，2回以上通る道が多くならないようにしたい．
- 重みつきグラフを用いて定式化できる．道路網に対応するグラフを考え．その辺の重みは対応する道路の長さであるとすればよい．この定式化では，すべての辺を含む閉じた歩道で，重みの合計ができるだけ小さいのを見つけることになる．

（中国の数学者梅谷によって議論された）

巡回セールスマン問題
(TSP: Traveling Salesman Problem)

- n個の節点をもつネットワーク$G=(V, E)$において，各枝$(i, j)\in E$の長さa_{ij}が与えられたとき，すべての節点をちょうど一度ずつ訪問して元に戻る順回路のなかで最短のものを見つける問題である．
- 枝(i, j)と枝(j, i)の長さが等しい（すなわち，節点iから節点jへの距離と節点jから節点iへの距離は等しい）場合，対称な巡回セールスマン問題と呼び（Gを無向グラフと考えることに対応），等しくない場合，非対称巡回セールスマン問題と呼ぶ．
- 巡回セールスマン問題は最短路問題と一見よく似ているが，すべての節点を必ず経由しなければならないという点が最短路問題と異なる．つまり，巡回セールスマン問題は個の節点の最適な並べ換え（順列）を求める問題ということができる．

対象な巡回セールスマン問題



節点1を出発点と考える．与えられた節点の集合$S\subseteq\{2, 3, \ldots, n\}$と$S$に含まれる節点$i$に対して，節点1を出発して，$S$に属するすべての節点をちょうど一度ずつ通ったあと，節点iに到達する路のなかで最短のものの長さを$f(S, i)$とする．
巡回セールスマン問題とは，

$$f^* = \min\{f(\{2,3,4\}, i) + d_{i1} \mid i \in \{2,3,4\}\}$$

d_{ij}：都市iからjへの距離（コスト）

非対称・巡回セールスマン問題

非対称・巡回セールスマン問題とは，都市iからjへの距離（コスト）をd_{ij}とするとき，d_{ij}が必ずしもd_{ji}と等しくないような巡回セールスマン問題である．

ここで，都市iからjに直接向かう経路を選択するとき$x_{ij}=1$，しないとき$x_{ij}=0$とし，$i=j$のとき$d_{ij}=\infty$とすると，

非対称巡回セールスマン問題：

目的関数：$z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij}$ → 最小

制約条件：$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1,\ i=1,2,\cdots,n$ かつ $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1,\ j=1,2,\cdots,n$

$x_{ij}=0,1\quad i=1,2,\cdots,n\quad j=1,2,\cdots,n$

注意）一巡閉路になるかどうかのチェックを必ず行なう
この制約条件だけでは一巡閉路かどうかを判別できない

非対称巡回セールスマン問題

i \ j	1	2	3	4	5
1	∞	21	7	13	15
2	11	∞	19	12	25
3	15	24	∞	13	5
4	6	17	9	∞	22
5	28	6	11	5	∞

分枝限定法による解法
現時点で対象とすべき距離d_{ij}の表をDと表わす．

分枝限定法の基本的な考え方

- 与えられた問題P_0を，複数の部分問題(Partial problems) $P_i(i=1, 2, \ldots)$に分解する（分枝操作: branching operation）←最適性原理
- 部分問題P_iを何らかの方法で終端する（限定操作: bounding operation）←効率的探索

最適化問題

最小値探索問題P_0
目的関数: $f(x)$を最小にするxを
制約条件: $x\in S$ ただし$S\subset X$のもとで決定せよ．（S: 許容領域，X: 定義域）
ただし，SおよびXは有限個あるいは可算無限個の要素を持つ離散集合
P_iの緩和問題P'_i
目的関数: $g(x)$→最小
制約条件: $x\in\overline{S}_i$ただし$S_i\subset\overline{S}_i\subset X,\ g(x)\leqq f(x),\ x\in S_i$

分枝限定法における限定操作

- P_iの緩和問題P'_iが許容解をもたなければP_iを終端する
- $g(P_i)=f(P_i)$すなわちP'_iの最適値がP_iの最適値に一致すればP_iを終端する
- （下界値テスト）$g(P_i)\geqq z$が成立すればP_iを終端する（zは最適値の暫定値）
- （優越テスト）$f(P_j)\leqq f(P_i)$，すなわちP_iより優越する部分問題P_jがすでにあることがわかればP_iを終端する

分枝限定法の処理手順

最適解が一個の場合
A: 既に生成されているがまだ分解も終端もされていない部分問題の集合
N: 既に生成されている部分問題の集合
z: 最適値の暫定値　O: 最適解の集合

- 初期設定: $A=\{P_0\},\ N=\{P_0\},\ z=\infty$，および，$O=\phi$（空集合）．
- 条件$A\neq\phi$が真である限り次の手続きを繰り返す．
  - $P_i=s(A)$ とする．（sは部分問題を1個取り出す関数　例: 距離が最小の路を選択）
  - $x\in S$かつ$f(x)<z$の解 x があれば，
    - 暫定値更新: $z=f(x),\ O=\{x\}$とする．
  - 緩和問題によるテスト: P_iの緩和問題P'_iが許容解を持ち，かつ緩和問題の最適値 $g(x)$ が $f(x)$ に一致しなければ，
    - 下界値テスト: 条件 $g(x)<z$ が真で，優越テスト: P_i より優越する P_j が存在しないとき，
      - 分枝処理: P_i の子節点$P_{i1},P_{i2},\ldots P_{in}$を作り，$A=A\cup\{P_{i1},P_{i2},\ldots P_{in}\}$，$N=N\cup\{P_{i1},P_{i2},\ldots P_{in}\}$とする．
  - 終端処理: $A=A-\{P_i\}$とする．
- $z=\infty$のとき，与えられた問題P_0は許容解を持たない．
  $z<\infty$のとき，値 z を最適値，集合 O を最適解とする．

下界値の導出（緩和問題の解法）

巡回セールスマン問題における緩和問題は，一巡閉路でなければならないという制約をはずした場合であると考えられる．

よって，現時点で対象とすべき距離d_{ij}の表をDとあらわし，次の変換を考えて，下界値を導出する．

変換(1) 表Dの各行について，各行の最小値をそれぞれの値から引くとともに，各行の最小値の和S_lを求める．
（すべてのノードから，最低1回は出る）

変換(2) 次に，各列について，各列の最小値をそれぞれの値から引くとともに，各列の最小値の和S_cを求める．
$g = S_l + S_c$とする．
（すべてのノードに最低1回は入る）

表D

i \ j	1	2	3	4	5
1	∞	21	7	13	15
2	11	∞	19	12	25
3	15	24	∞	13	5
4	6	17	9	∞	22
5	28	6	11	5	∞

下界値導出のための変換(1)

- 表Dの各行について，各行の最小値をそれぞれの値から引くとともに，各行の最小値の和S_lを求める．
  - 各ノードは，必ず最低1回は通る（各ノードから出て行く）
  - 各行，最低一つの要素の距離は加算される．

i \ j	1	2	3	4	5	最小値
1	∞	21	7	13	15	7
2	11	∞	19	12	25	11
3	15	24	∞	13	5	5
4	6	17	9	∞	22	6
5	28	6	11	5	∞	5

i \ j	1	2	3	4	5	最小値
1	∞	14	0	6	8	-7
2	0	∞	8	1	14	-11
3	10	19	∞	8	0	-5
4	0	11	3	∞	16	-6
5	23	1	6	0	∞	-5

下界値導出のための変換(2)

- 次に，各列について，各列の最小値をそれぞれの値から引くとともに，各列の最小値の和S_cを求める．
  - 各ノードは，必ず最低1回は通る（各ノードに入る）
  - 各列，最低一つの要素の距離は加算される．
- $g = S_l + S_c$とする．

i \ j	1	2	3	4	5	最小値
1	∞	14	0	6	8	-7
2	0	∞	8	1	14	-11
3	10	19	∞	8	0	-5
4	0	11	3	∞	16	-6
5	23	1	6	0	∞	-5
最小値	0	1	0	0	0	

i \ j	1	2	3	4	5	最小値
1	∞	13	0	6	8	-7
2	0	∞	8	1	14	-11
3	10	18	∞	8	0	-5
4	0	10	3	∞	16	-6
5	23	0	6	0	∞	-5
最小値	0	-1	0	0	0	

下界値

- これらの操作は，いずれも与えられた問題の最短巡回路そのものを変化させることはない．この変換前の最短経路長をz，変換後の最短経路長をz'とすると，
$$z = z' + g \qquad \therefore z \geqq g$$
となり，gを下界値として利用できる．

- 具体的には，
表Dに対して，これに対する上記の変換により，結果としてD'を得る．
また，変換中に各行，各列から引いた値（欄外にマイナスで表記されている値）の和は，35となるので，この時の下界値g=35となる．

i \ j	1	2	3	4	5	最小値
1	∞	13	0	6	8	-7
2	0	∞	8	1	14	-11
3	10	18	∞	8	0	-5
4	0	10	3	∞	16	-6
5	23	0	6	0	∞	-5
最小値	0	-1	0	0	0	

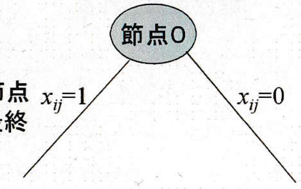
表D’

分枝の方法

次に，木を生成しながら，探索を行う場合に，探索のある時点において，x_{ij}の値によって分枝する際，それぞれの場合について，次のようにして下界値を計算できる．

（1）$x_{ij}=1$の場合：
都市$i \to j$が決定したので，現在の距離の表Dにおいて，もはや不要となったi行とj列を取り除いて新たに表を作り，このようについて，上記の下界値を計算し，d_{ij}を加えて，さらにその節点までに選択した経路の長さの和を加えて最終的な下界値とする．

（2）$x_{ij}=0$の場合：
都市$i \to j$を選択しないので，$d_{ij}=\infty$とする．
あらためて，下界値を計算し，さらにその節点までに選択した経路の長さの和を加えて最終的な下界値とする．



分枝の方法（具体例）

経路3→5を選ぶ場合（P_{35}と表記）：$x_{35}=1$
図1のような変換を行い，差し引いた数値の合計が30となり，$d_{35}=5$を加えて，下界値$g=35$となる．

経路3→5を選択しない場合（$\overline{P_{35}}$と表記）： $x_{35}=0$
図2のような変換を行い，$g=51$となる．

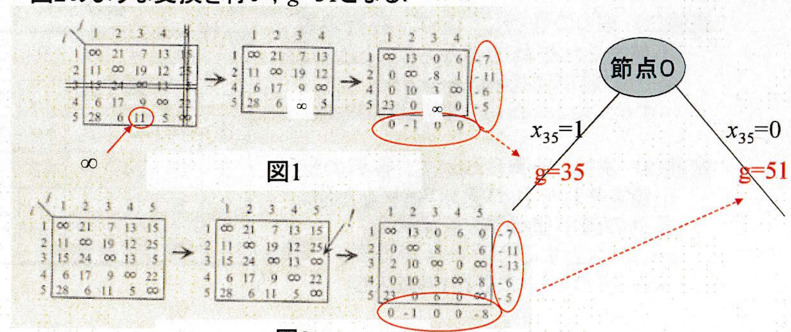


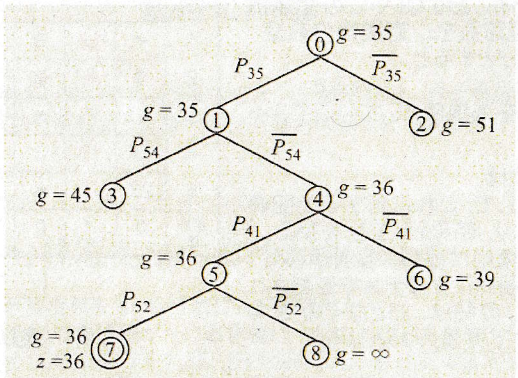
図1

図2

表Dに対する分枝図

このように，順次下界値を求めながら，許容解が得られるまで処理を繰り返す．
表Dに対して，最良下界探索を実行した結果の分枝図を以下に示す．

2分岐の例



一巡閉路になるかどうかのチェックを必ず行なう

（部分問題4：$P_{35}\overline{P_{54}}$）次図の計算値31に$d_{35}=5$を加えて，$g=36$を得た．現時点で最良の下界値なので，部分問題4を経路4→1を用いて部分問題5と6に分解した．

	1	2	3	4
1	∞	21	7	13
2	11	∞	19	12
4	6	17	9	∞
5	28	6	$\boxed{\infty}$	5

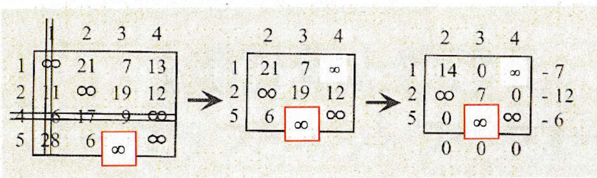
→

	1	2	3	4
1	∞	21	7	13
2	11	∞	19	12
4	6	17	9	∞
5	28	6	$\boxed{\infty}$	∞ !

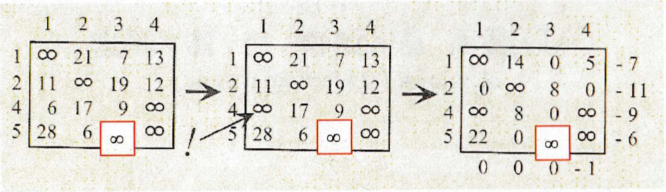
→

	1	2	3	4	
1	∞	14	0	5	-7
2	0	∞	8	0	-11
4	0	11	3	∞	-6
5	22	0	$\boxed{\infty}$	∞	-6
	0	0	0	-1	

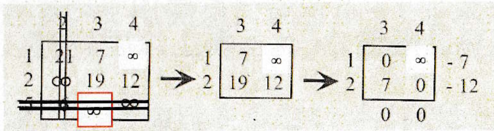
（部分問題5：$P_{35}\overline{P_{54}}P_{41}$）次図の計算値25に$d_{35}=5$と$d_{41}=6$を加えて，**g=36を得た**.



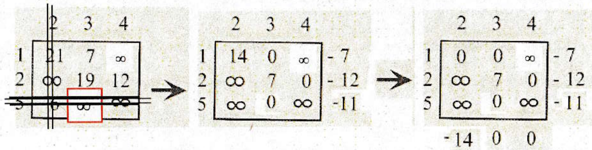
（部分問題6：$P_{35}\overline{P_{54}}\overline{P_{41}}$）次図の計算値34に$d_{35}=5$を加えて，**g=39**を得た．この時点で，部分問題5の下界値が最小なので，部分問題5を経路5→2を用いて，部分問題7と8に分解した．



（部分問題7：$P_{35}\overline{P_{54}}P_{41}P_{52}$）次図の計算値19に$d_{35}=5$, $d_{41}=6$, $d_{52}=6$を加えて，**g=36**を得た．この時点で，巡回路1→3→5→2→4→1が決定し，許容解を得たので，目的関数の暫定値**z=36**とした．



（部分問題8：$P_{35}\overline{P_{54}}P_{41}\overline{P_{52}}$）次図の計算値44に$d_{35}=5$, $d_{41}=6$,を加えて，**g=55**を得た．この時点で，部分問題7が最適値を与えることがわかる．



演習問題

下記に示す非対称巡回セールスマン問題の最適解を，分枝限定法を用いて求めよ．

i ＼ j	1	2	3	4	5
1	∞	21	5	15	9
2	17	∞	12	6	24
3	13	5	∞	20	8
4	9	12	7	∞	23
5	26	7	13	8	∞