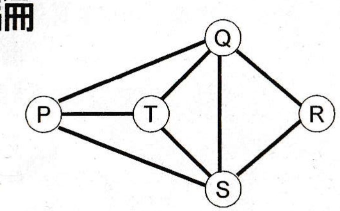
2015.6.18

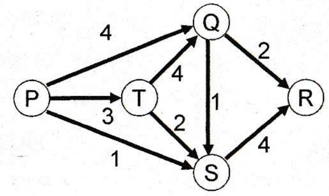
数理計画と最適化
ーグラフとネットワーク1ー

精密工学科
淺間 一
簑原 凜，徐 彬斌，楊 濘嘉（TA）
asama@robot.t.u-tokyo.ac.jp

グラフ理論

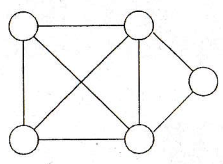


- 節点，点，ノード（Vertex）
- 枝，辺，アーク（Edge）
- グラフ（Graph） $G=(V, E)$
- 有向グラフ（Directed Graph）
- ネットワーク
  - グラフ上のフロー
  - 枝や節点に何らかの属性や数値が与えられている

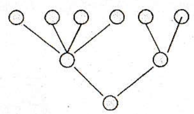


グラフ理論

- オイラーグラフ（Eulerian Graph）
  - すべての辺をちょうど一回ずつ通って出発点に戻る道
- ハミルトングラフ（Hamiltonian Graph）
  - すべての点をちょうど一回ずつ通って出発点に戻る道
- 木Tree
  - どの2点の間にも道が一本しかないグラフ



ハミルトン・グラフではあるが，
オイラー・グラフではない



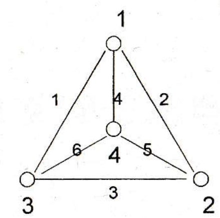
行列によるグラフ表現

- 隣接行列Adjacency Matrix
  - 点iと点jを結ぶ辺の本数を第ij要素とするn×nの行列
- 接続行列Incidence Matrix
  - 点iと辺jに接続している場合，第ij要素が1であり，接続していない場合0であるようなn×mの行列

n:節点数 4
m:辺の数 6

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\quad M=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&1&1\end{pmatrix}$$

列合計 2 2 2 2 2 2



最短経路問題

グラフ$G=(V, E)$の各枝$(i, j)\in E$が長さa_{ij}をもつとき，ある節点$s\in V$から別の節点$t\in V$への路のなかで，最も長さの短いものを見つける問題を最短経路問題という

節点sから節点tへの路とは，節点の列

$$P=(s, i, j, \ldots, k, t)$$

で，$(s, i)\in E$, $(i, j)\in E$, …, $(k, t)\in E$を満たすものをいい，それらの枝の長さの和

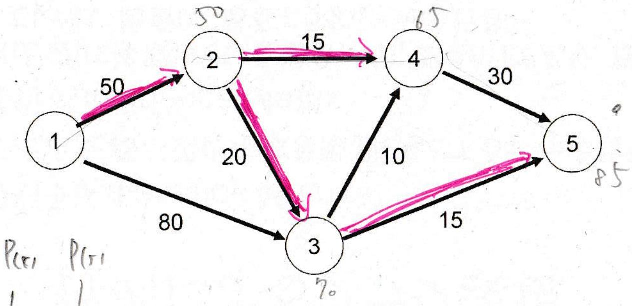
$$a_{si}+a_{ij}+\ldots+a_{kt}$$

をこの路Pの長さと定義する.

しばしば路を$s\to i\to j\to \ldots \to k\to t$のように表す.

最短経路問題

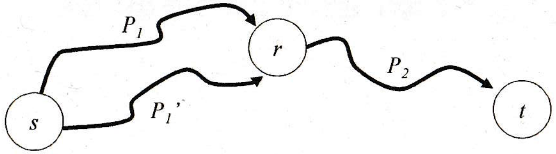
- 下記のネットワークにおいて，節点1から節点5に到達する最短経路を求めよ.



d(1)	d(2)	d(3)	d(4)	d(5)	v	S	p(1)	p(2)	p(3)	p(4)	p(5)
						ϕ					
0	∞	∞	∞	∞	1	{1}		1	1		
	50	80			2	{1,2}			2	2	
		70	65		4	{1,2,4}					4
				95	3	{1,2,3,4}					3
				85	5	{1,2,3,4,5}					

最適性の原理

いま仮に節点sからtへの最短路Pがえられるものとし，路Pに含まれる節点を一つ任意に選ぶ．その節点をrとすれば，路Pは節点sからrまでの部分とrからtへの部分に分割できる．前半と後半の部分に対応する路をそれぞれP_1, P_2とすれば，P_1は節点sからrへの最短路であり，P_2は節点rからtへの最短路になっているはずである．実際，もし節点sからrへP_1より短い路P_1'が別に存在するとすれば，路P_1'とP_2をつないだ路$P_1' \cup P_2$は明らかにもとの路$P=P_1 \cup P_2$より短い．これは節点sからtへの最短路がPであることに反する．節点rからtへの部分についても同様であるから，上に述べた性質は常に成り立つことがわかる．一般に節点sからtへの最短路Pにおいては，そのどの一部分を取り出しても，それがその両端の節点間を結ぶ最短路になっていることがわかる.



ダイクストラ法
Dijkstra's algorithm

- 初期設定：$S:=\phi, \overline{S}:=V, d(s):=0, d(i):=\infty\ (i\in V-\{s\})$ とおく．
  Sは探索済接点の集合，$\overline{S}$ は未探索接点の集合．sは始点ノード．
- 条件 $S\neq V$ が真である限り次の手続きを繰り返す.
  - $d(v)=\min\{d(i)\ |i\in\overline{S}\}$ であるような節点 $v\in\overline{S}$ を選ぶ.
  - $S:=S\cup\{v\}, \overline{S}:=\overline{S}-\{v\}$ とする.
  - すべての (v, j) に対して次の手続きを繰り返す.
    - 条件 $(v, j)\in E$ のとき，
      - 条件 $j\in\overline{S}$ かつ $d(j)>d(v)+a_{vj}$ ならば $d(j):=d(v)+a_{vj}, p(j):=v$ とする.

- S: 探索済みのリスト　$\overline{S}$: 探索すべきリスト
- a_{ij}: (i, j)の距離　$d(i)$: sからiまでの距離

$p(j)$はsからjまでの最短路において，jの直前に位置する節点を示す.
（これが解を示す）

[初期化]

$S=\phi$, $\bar{S}=\{1,2,3,4,5\}$, $d(1)=0$, $d(2)=d(3)=d(4)=d(5)=\infty$.

[反復1]

$\min\{d(1), d(2), d(3), d(4), d(5)\}=\min\{0,\infty,\infty,\infty,\infty\}$より$v=1$となる.

$S=\{1\}$, $\bar{S}=\{2,3,4,5\}$であり、さらに$d(2)=\infty>d(1)+a_{12}=0+50$であるから$d(2)=50$, $p(2)=1$となり、$d(3)=\infty>d(1)+a_{13}=0+80$であるから$d(3)=80$, $p(3)=1$となる($d(4)=\infty$, $d(5)=\infty$は変化しない).

[反復2]

$\min\{d(2), d(3), d(4), d(5)\}=\min\{50,80,\infty,\infty\}$より$v=2$となる.

$S=\{1,2\}$, $\bar{S}=\{3,4,5\}$であり、さらに$d(3)=80>d(2)+a_{23}=50+20$であるから$d(3)=70$, $p(3)=2$となり、$d(4)=\infty>d(2)+a_{24}=50+15$であるから$d(4)=65$, $p(4)=2$となる($d(5)=\infty$は変化しない).

[反復3]

$\min\{d(3), d(4), d(5)\}=\min\{70,65,\infty\}$より$v=4$となる.

$S=\{1,2,4\}$, $\bar{S}=\{3,5\}$であり、さらに$d(5)=\infty>d(4)+a_{45}=65+30$であるから$d(5)=95$, $p(5)=4$となる($d(3)=70$は変化しない).

[反復4]

$\min\{d(3), d(5)\}=\min\{70, 95\}$より$v=3$となる.

$S=\{1,2,3,4\}$, $\bar{S}=\{5\}$であり、さらに$d(5)=95>d(3)+a_{35}=70+15$であるから$d(5)=85$、$p(5)=3$となる.

[反復5]

$S=\{5\}$であるから、自動的に$v=5$となる.

$S=\{1,2,3,4,5\}$, $\bar{S}=\phi$となる.

計算量

ダイクストラ法

基本演算(加減乗除, 大小比較)の回数

問題の大きさ n, m

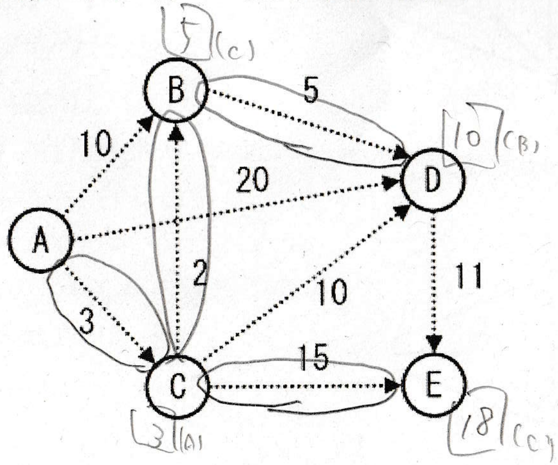
(1) $n^2 \to O(n^2)$

(2) $m \to O(m)$

$\to O(n^2+m) \Rightarrow O(n^2)$

演習問題

Aからスタートして, Eに至る最短路を求めよ.



d(A)	d(B)	d(C)	d(D)	d(E)	v	S	P(A)	P(B)	P(C)	P(D)	P(E)
0	∞	∞	∞	∞	A	{A}		A	A		
	10	3									
	5		13	18	C	{A,C}		C		C	C
			10		B	{A,B,C}				B	
					D	{A,B,C,D}					
					E	{A,B,C,D,E}					