

# 数理計画と最適化

## 一組み合わせ最適化1ー

精密工学科

浅間 ー

簗原 凜, 徐 彬斌, 楊 寧嘉 (TA)

asama@robot.t.u-tokyo.ac.jp

組み合わせ最適化(欲張り法) 授業(6/4), 演習(6/5)  
 組み合わせ最適化(分枝限定法) 授業(6/11), 演習(6/12)  
 グラフとネットワーク(ダイクストラ法) 授業(6/18), 演習(6/19)  
 グラフとネットワーク(巡回セールスマン問題) 授業(6/25), 演習(6/26)  
 ゲーム理論(安先生代講) 授業(7/2), 演習(7/3)  
 ミニテスト・最終課題 授業(7/9), 演習(7/10)

## 定式化 (Formulation)

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \max \quad f(x) = c^T x \rightarrow \max$$

$$g = \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b \quad g = a^T x \leq b$$

$$x_i = 0 \text{ or } 1$$

$$x_i \in X \quad \text{空でない有限集合}$$

$$S \quad \text{制約条件を満たす } x \text{ の集合}$$

$$c = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

## ナップザック問題

ハイキングの準備をしている桃子さんは、いくつかの品物のなかからどれとどれを選んで持つていこうか迷っている。品物は全部で  $n$  個あり、品物  $i$  の重さを  $a_i$  キログラム, その利用価値を数量的に表したものを  $c_i$  とする。ナップザックには全部で  $b$  キログラムまでしか詰め込めないとしたら、利用価値の総計が最大となるように品物を選ぶにはどうすればよいだろうか。

|       |      |     |   |      |
|-------|------|-----|---|------|
| $i$   | 1    | 2   | 3 | 4    |
| $c_i$ | 7    | 8   | 1 | 2    |
| $a_i$ | 4    | 5   | 1 | 3    |
| $v_i$ | 1.75 | 1.6 | 1 | 0.67 |

ナップザックの容量  $b=6$   
 ナップザックの重さ  $w=4$

福島雅夫: 数理計画入門, 朝倉書店, 1996

- ① 7.5
- ② 2.2
- ③ 3.2
- ④ 4.2

## 解法

• 列挙法 (Enumeration) (厳密解法)

• ランダム法 (Greedy Method) (近似解法)

• 欲張り法 (Greedy Method) (近似解法)

• けちけち法 (Stingy Method) (近似解法)

• 分岐限定法 (Branch and Bound Method) (厳密解法)

ー 緩和問題

1. 7.5

2. 2.2

3. 3.2

4. 4.2

5. 5.2



## 探索 (Search)

新規事業  $x_i = 0$  (行わない)

新規事業  $x_i = 0$  (行わない)

$$f(x) = c^T x \rightarrow \max$$

$$a^T x \leq b$$

$b$ : 予算

 $c_i$ : 期待利益 $a_i$ : 経費

## 2<sup>nd</sup>回評価

$$n\text{次元整数ベクトル}\{x_i\}$$

$$f = 7x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4 \rightarrow \max$$

$$g = 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 6$$

$$x_i = 0, 1 \quad (i = 1, \dots, 4)$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841,

$x_1 = 1, x_2 = 1$

の場合、既に制約を充足しない

制約×計算の無駄

解

|             |      |          |          |
|-------------|------|----------|----------|
| $(0, 0, 0)$ | $0$  | $0$      | $0$      |
| $(0, 0, 0)$ | $1$  | $2$      | $3$      |
| $(0, 1, 0)$ | $1$  |          |          |
| $(0, 0, 1)$ | $3$  | $4$      |          |
| $(0, 1, 0)$ | $8$  | $5$      |          |
| $(0, 1, 1)$ | $9$  | $6$      |          |
| $(0, 1, 0)$ | $10$ | $8$      | $\times$ |
| $(0, 1, 1)$ | $11$ | $9$      | $\times$ |
| $(1, 0, 0)$ | $7$  | $4$      |          |
| $(1, 0, 0)$ | $7$  | $\times$ |          |
| $(1, 0, 1)$ | $8$  | $5$      |          |
| $(1, 0, 1)$ | $10$ | $8$      | $\times$ |
| $(1, 1, 0)$ | $15$ | $9$      | $\times$ |
| $(1, 1, 0)$ | $17$ | $12$     | $\times$ |
| $(1, 1, 0)$ | $16$ | $10$     | $\times$ |
| $(1, 1, 1)$ | $18$ | $13$     | $\times$ |

# けちけち法

(Greedy Method) (近似解法)

アルゴリズム

- 目的関数  $f = \sum_{i=1}^m c_i x_i \rightarrow \max$
- 制約条件  $\sum_{i=1}^m a_i x_i \leq b$   
 $x_i = 0 \text{ or } 1$

$$r_i = \frac{c_i}{a_i} \quad (i=1 \dots n)$$

- $x_i$  を  $r_i$  の大きい順に並べかえる

- 初期設定  $\tilde{b} = b$
- $j = 1, \dots, n$  について
  - 次の手続きを繰り返す
    - 条件  $a_j > \tilde{b}$  が、
      - 真ならば  $x_j = 0$
      - 偽ならば  $x_j = 1$
    - $\tilde{b} = \tilde{b} - a_j$

- $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)^T$  を解とする

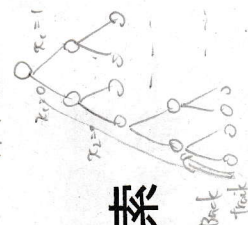
$$x = (1, 0, 0, 1) = x_{10823}$$

$$F_{0.1}^{\text{B}^2\text{B}^2} (0.1.1.0)$$

52-127A-172

① 歲時解法之訂正!!

ランダム探索



- 探索手順
  - 初期設定
    - 暫定解  $x_{\text{opt}} = \phi$ , 暫定最小値  $M = \infty$
  - 次の手続きを所定の回数繰り返す
    - $n$  次元整数ベクトル  $x$  をランダムに生成する
    - 制約条件  $x \in S$  を満たすとき、 $\mathcal{K} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$ 
      - $-f(x) < M$  ならば、
        - 暫定解  $x_{\text{opt}} = x$ , 暫定最小値  $M = f(x)$
  - $x_{\text{opt}}$  を解とする

# けちけち法

(Stingy Method)(近似解法)

欲張り法と同様に $x$ を $r_1$ の大きい順に並べ替えておく

- 初期設定  $\tilde{b} = \sum_{i=1}^n a_i, \quad x_i = 1 (i=1, \dots, n), \quad j = n$
- 条件  $\tilde{b}_{>b}$  が真である限り次の手続きを繰り返す
  - $\tilde{b} = \tilde{b} - a_j, \quad x_j = 0$
  - $j = j - 1$

さらに以下を行う場合もある

- $j < n$  ならば、  

$$- (x_{j+1}, \dots, x_n)^T$$
 について欲張り法を適用する
- $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  を解とする

$x = (1000)_{10}$  求其  
 $\rightarrow$  へいへい！  
 この値に七の一乗より法を用いて  
 $\rightarrow$  求める値  $x = (1010)_{10}$  求其