数理計画と最適化
中間試験

手書きのノートのみ持ち込み可

2005/11/18
9:00〜12:00

１．　以下の線形計画問題をシンプレックス法を用いて解け。シンプレックス表を用いても、式の形で書いてもよい。

(a) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12$

$x_i \geq 0 \quad (i = 1,2,3)$

初期可能解　$(x_1, x_2, x_3) = (12,0,0)$

(b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + x_3 \to \min$

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 6$

$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$

$x_i \geq 0 \quad (i = 1,2,3)$

初期可能解は適当に選べ。

２．　以下の線形計画問題を考える。

$$f = 3x_1 + 2x_2 \quad \to \text{最大化}$$
$$2x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(a) 可能領域を図に示し、可能基底解をすべてあげよ。
(b) この問題のKuhn Tucker条件を導き、上記のそれぞれの可能基底解がKuhn Tucker条件を満足するかどうか確認せよ。

３．　以下の非線形計画の問題を考える。

$$f(x_1, x_2) = (x_1)^4 + (x_2)^2 \to \min$$
$$x_1 + x_2 \geq 3$$

(a) Kuhn Tucker条件を導き、それを解くことにより最適解を求めよ。
(b) ペナルティ法を使って解く場合の評価関数を、内点法、外点法のそれぞれについてしめせ。
(c) 外点法の場合、初期点を$(x_1, x_2) = (1,1)$としたときの共役勾配法の最初の探索方向を示せ。（ラインサーチはしなくてよい）

４． 以下の1変数関数の最小化問題を数値的に解きたい。

$$f(x) = (10 - x)^2 + 2x \quad \rightarrow \text{最小化}$$

(a) まず、解の存在する範囲をおおまかに絞りたい。０から４刻みでBracket法を適用し、解の範囲を絞れ。刻み幅を細かくするステップは行わないでよい。
(b) 次に、２分割法を用いて解の範囲をさらに絞り込む。上記で求めた範囲に対して、解析的に導いた微分を用いて、最終的に範囲の幅が２になるまで反復させよ。
(c) Newton法を収束するまで適用して、それぞれのステップで解を示せ。初期値は適当に選んでよい。なぜその反復回数になるか理由を述べよ。

５． 以下の非線形計画の問題を考える。

$$f(x_1, x_2) = (x_1)^4 + (x_2)^2 \rightarrow \min$$
$$x_1 + x_2 \geq 3$$

(d) Kuhn Tucker条件を導き、それを解くことにより最適解を求めよ。

６． 以下の文が、正しければ○、間違っていれば×を書け。問題文があいまいで複数の解釈が可能な場合、その理由を横に書いておくと、出題者の意図と違う解答であっても理由がもっともであれば正解にする事もある。

(a) システムを最適化するには、各種の最適化手法を用いた後にシステムのモデリングを行う必要がある。
(b) 最適化手法を用いて、複数の目的関数と複数の制約条件に対して解を求めることができる。
(c) 工学的に用いる関数は必ず微分が連続である。
(d) 関数の評価に大規模な計算が必要な場合、数値的な誤差が累積しやすい。
(e) １階の微係数がゼロの点が最小値であるか最大値であるかを区別するには２階の微係数が有効である。
(f) 解析による感度よりも差分による感度の方が正確である。
(g) 行列の固有値は行列の基本的な性質の指標であり、行列の成分が変化すると固有ベクトルは変化するが固有値は変化しない。
(h) 一般逆行列を用いれば、どんな線形方程式でも解くことができる。
(i) 行列に逆行列が存在するときは一般逆行列は逆行列に一致する。
(j) 大規模な線形計画問題はコンピュータの発展の前は主に手計算によって解かれていた.
(k) 設計変数が離散的に変化する問題は非線形計画法を用いて解くことができる。
(l) 最適解は必ず可能解である。

(m) 線形計画法においては可能解が存在すれば基底解の中に最適解が必ず存在し、シンプレックス法を用いれば必ず解を求めることができる。

(n) 線形計画法においては目的関数と制約条件の両方が線形である必要があり、いずれかが非線形の場合は非線形計画法を用いる必要がある。

(o) 線形計画法においては列挙法がもっとも簡単で効率的な手法である。

(p) シンプレックス法においては、移動する基底解はすべて可能解である必要がある。

(q) 非線形計画法においては求められた解がグローバルな最適解であるという保証はない。

(r) 非線形計画法は関数の最小値を求める手法であり、最大値を求めることはできない。

(s) 非線形計画法の手法の１つであるＳＱＰ法を用いればローカルな最適解であれば必ず解を求めることができる。

(t) 行列が正方行列でなくても，特異値分解は可能である.

(u) 行列が逆行列を持つ場合，それは必ず一般逆行列と一致する.

(v) 一般逆行列を用いて求めた解は，必ずしもすべての方程式を満足するとは限らない.

(w) 最適化手法を用いて、複数の目的関数と複数の制約条件に対して解を求めることができる。

(x) 線形計画法の一般形は、常に標準形に変換することが可能である。

(y) ２段階シンプレックス法は、可能解からスタートする必要がある。

(z) 制約なしの最適化問題の場合、最急降下法の方が共役勾配法より収束が早い。

(aa) 非線形計画問題のラインサーチでは、黄金分割法がもっとも安定で効率的な手法である。

(bb) 非線形計画法のプログラムを使って線形計画法の問題を解くことはできるが、逆はできない。

(cc)非線形計画法の解法であるSLP法では、各ステップで線形計画法を用いる。

(dd) Kuhn Tuckerの条件は、ある解が最適解であるための必要十分条件である.

(ee) 一般に非線形計画法では、0次法より、1次法、1次法より2次法と、高次の微係数を用いた方法の方がより早く、安定に収束する。

(ff) 擬似ニュートン法を用いるには、ヘッセ行列を解析的に求める必要がある。

(gg) 共役勾配法を用いると、制約なし最適化問題はどんな関数に対しても変数と同じ数の反復で収束する。

(hh) GNU Octaveはフリーソフトであるが，ソースコードは公開されていない.