幾何学 1
第 2 回 命題と論理演算

野本 慶一郎

明星大学 教育学部 教育学科

2025/04/16

無理数の無理数乗は必ず無理数か？

Yes なら証明を与え, No なら反例を挙げよ.

前回の復習

よく使う集合の記号

$\mathbb{N}$ 自然数 (Natural number) 全体の集合.

$\mathbb{Z}$ 整数 (integer) 全体の集合. ドイツ語で整数を表す Zahlen が由来.

$\mathbb{Q}$ 有理数 (rational number) 全体の集合. 商を表す Quotient が由来.

$\mathbb{R}$ 実数 (Real number) 全体の集合.

$\mathbb{C}$ 複素数 (Complex number) 全体の集合.

$\forall$ 「任意の」,「全ての」という意味. for All ... における A を反転した表記.

$\exists$ 「ある〜が存在して」という意味. there Exists ... における E を反転した記号.

例

「任意の実数 x に対して, $x^2 \geq 0$ が成り立つ.」と以下の文は同じ意味.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0.$$

例

「ある自然数 e が存在して, 任意の整数 n に対して $ne = en = n$ が成り立つ.」
という文は以下のように表記できる. ($e \in \mathbb{N}$ とは結局 1 のことである.)

$$\exists e \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{Z}, n \times e = e \times n = n.$$

- s.t. は such that の略.「∃ A s.t. B」は,「ある A が存在して B を満たす.」とか「B を満たすような A が存在する」のような意味.

今日の内容

- 高校数学では, **背理法**や**対偶**を用いるような, 少し変わった証明法を学んだ.
- 例えば命題「p ならば q」の対偶は,「q でないならば p でない」であったが,
  元の命題と対偶の真偽が一致するということは明らかではないし,
  厳密な説明もされてこなかった.
- 今日の講義では, **命題から命題を作る操作 (論理演算)** について学び,
  背理法や対偶を用いた証明が正しいことを厳密に説明する.

定義 (教科書, 命題 2.1, p.13.)

真偽が定まる文章を命題という.

- 第一回では, 命題とは「成立することが数学的に証明された事柄」と説明をした.
- 今回のように, 論理について考えるときは「真偽が定まる事柄」を指す. 混乱しないように注意.

例

「12 は 4 で割り切れる」,「三角形の内角の和は 180 度である」は真な命題である.
「$\sqrt{2}$ は有理数である」,「$4^2 < 10$」は偽な命題である.

例

「全ての実数 x に対して, $x^2 \geq 0$」は真な命題である.

例

「$\forall\, n \in \mathbb{Z},\ n \equiv 0 \bmod 3$」は偽な命題である (反例は $n = 1$ 等).

例

「ある実数 y が存在して $y^2 \geq 1$」は真な命題である (例えば, $y = 1$ が条件を満たす).

例

「$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 = 0$」は偽な命題である ($x^2 + 1 = 0$ を満たす実数 x は存在しない).

定義 (教科書, 定義 2.5, p.14.)

二つの命題 p, q に対して，次のように論理演算を定める．

名称	論理記号での表記	日本語での意味
論理和	$p \lor q$	p または q
論理積	$p \land q$	p かつ q
否定	$\neg p$	p でない
含意	$p \Longrightarrow q$	p ならば q
同値	$p \Longleftrightarrow q$	$p \Longrightarrow q$ かつ $q \Longrightarrow p$

- このように, 命題から新たな命題を作る操作を**論理演算**という.
- $\lor, \land, \neg, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow$ のような記号を論理演算子という.

明星大学 MEISEI UNIVERSITY

例 (論理和)

命題「$x \geq 0$」は, $x > 0$ または $x = 0$ という意味であることから以下のように書ける.

$$(x > 0) \vee (x = 0)$$

例 (論理積)

命題「x は正整数である」は, x は正の値かつ x は整数であることと同じなので,
以下のように書ける.

$$(x > 0) \wedge (x \in \mathbb{Z})$$

例 (否定)

命題「$x \neq 0$」は, x は 0 でないという意味なので, 以下のように書ける.

$$\neg(x = 0)$$

例 (含意)

命題「x が実数ならば, その二乗は 0 以上である」は以下のように書ける.

$$(x \in \mathbb{R}) \Longrightarrow (x^2 \geq 0)$$

- 以下の例は，教科書 p.18 の問 2 で述べられているものです．
  今回の演習問題第 2 問に載せていますので，今から解いてみましょう．

例

命題 p を「a は 3 の倍数である」，命題 q を「b は 3 の倍数である」とする．
このとき次の命題を p, q と論理演算子を用いて表せ．

1. a と b はどちらも 3 の倍数である．
2. a と b の少なくとも一方は 3 の倍数である．
3. a は 3 の倍数だが，b は 3 の倍数でない．
4. a と b のどちらも 3 の倍数でない．
5. a と b の一方だけが 3 の倍数である．
6. a が 3 の倍数ならば b も 3 の倍数である．

真理値表

- 実は命題 p, q の真偽が分かっていれば，論理演算結果の命題の◯偽は自動的に決まってしまう．つまり，論理演算後の命題を丁寧に解釈する必要はない．
- 例えば，命題 p, q の◯偽に従って，論理和 $p \vee q$ は以下のように決まる．

p	q	$p \vee q$
◯	◯	◯
◯	×	◯
×	◯	◯
×	×	×

- この表のことを**真理値表**という．

真理値表 (論理和, 論理積, 否定)

$\vee$ に関する真理値表

p	q	$p \vee q$
○	○	○
○	×	○
×	○	○
×	×	×

$\wedge$ に関する真理値表

p	q	$p \wedge q$
○	○	○
○	×	×
×	○	×
×	×	×

$\neg$ に関する真理値表

p	$\neg p$
○	×
×	○

真理値表 (含意)

$\Longrightarrow$ に関する真理値表

p	q	$p \Longrightarrow q$
○	○	○
○	×	×
×	○	○
×	×	○

- 3, 4 行目は注意.「仮定が偽ならば真」と口語的に覚えるとよい.
- 例えば友人と「雨が降ったら旅行は中止にしよう」と約束していたとする. 仮定が偽, すなわち実際には晴れだったとする. この場合, 旅行を中止しても問題ない. 何故ならば「雨が降ったら」という話しかしていないので,「晴れだったら」という状況に関しては何も言っていないのだから.

$\Longleftrightarrow$ に関する真理値表

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
○	○	○
○	×	×
×	○	×
×	×	○

- つまり同値というのは，二つの命題の真偽が完全に一致することをいう．
- どちらも真かもしれないし，どちらも偽かもしれない．

■ 命題 p, q, r に対して, 以下の二つの命題の真偽を比較してみよう.

$$p \lor (q \land r), \quad (p \lor q) \land (p \lor r)$$

p	q	r	$q \land r$	$p \lor (q \land r)$	$p \lor q$	$p \lor r$	$(p \lor q) \land (p \lor r)$
○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	×	×	○	○	○	○
○	×	○	×	○	○	○	○
○	×	×	×	○	○	○	○
×	○	○	○	○	○	○	○
×	○	×	×	×	○	×	×
×	×	○	×	×	×	○	×
×	×	×	×	×	×	×	×

- 高校では, ド・モルガンの公式を学習した. どのような主張であったか再確認しよう.

命題 (ド・モルガンの公式, 教科書, 命題 2.16, p.19)

任意の命題 p, q に対して, 次が成り立つ.

1. $\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$.
2. $\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$.

- 上記の命題が成り立つかどうか確かめるためには, 両辺の真理値表を書いて, 全ての場合の真偽が一致するかどうか確かめればよい.
- 実際に手を動かして, 証明してみましょう (演習問題 4).

- 命題「p ならば q」の**対偶**とは，命題「q でないならば p でない」のことであった．
- 元の命題と対偶が，どんな場合でも真偽が一致するという事実は，
  論理演算を用いて以下のように表現できる．

定理 (対偶)

任意の命題 p, q に対して

$$p \Rightarrow q \Longleftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p.$$

- 両辺の真理値表を書いて真偽が全て一致するか確認しましょう (演習問題 5)．

- 命題「p ならば q」を証明するには，背理法を用いることもできる．
背理法とは，q が偽であると仮定し，矛盾を導く証明法のことであった．
- より正確には以下のような論法である．

"p なのに q でない $(p \land \neg q)$ と仮定すると偽になった．
ということは (q でないと仮定したのが間違いだったので) 元の命題は真である"

- このような証明法が正しいことは，以下の定理によって保証される．

定理 (背理法)

任意の命題 p, q に対して

$$p \Rightarrow q \iff \neg(p \land \neg q).$$

- 両辺の真理値表を書いて真偽が全て一致するか確認しましょう (演習問題 6).

演習の時間