

1. 以下の主張における括弧「」で囲まれた箇所を論理記号を用いて表現せよ。ただし、全ての主張が正しいとは限らない。

(a) 「任意の実数 x に対して, $x^2 \geq 0$ である。」

(b) 「ある有理数 q が存在して, $q^2 = 2$ が成り立つ。」

(c) 「ある整数 a と b が存在して, $a^2 + b^2 = 3$ が成り立つ。」

(d) $f(x) = x^2 + 1$ とする。このとき 「任意の実数 y に対して, ある実数 x が存在して, $y = f(x)$ が成り立つ。」

2. 以下の主張を, 論理記号を用いず日本語で表現せよ。

(a) $\forall a \in \mathbb{Q}, a + 1 \in \mathbb{R}$.

(b) $\exists z \in \mathbb{C}$ s.t. $z^2 = 1 + i$.

(c) $\forall s \in \mathbb{Z}, \exists t \in \mathbb{Z}$ s.t. $s + t = t + s = 0$.

(発展) 以下の主張における括弧「」で囲まれた箇所を論理記号を用いて表現せよ.

(a) (フェルマーの最終定理) $n \geq 3$ とする. このとき「ある自然数 X, Y, Z が存在して $X^n + Y^n = Z^n$ が成り立つ」は偽である.

(b) (素数定理) $\pi(x)$ で, x 以下の素数の個数を表すとする. このとき「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $x_0 > 0$ が存在して, 任意の実数 x に対して $[x_0 < x \implies |\pi(x)/(x/\log x) - 1| < \varepsilon]$ が成り立つ。」

(c) (ε - N 論法) $\{a_n\}_n$ を実数列, α を実数とする. 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の自然数 n に対して $[N \leq n \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon]$ が成り立つ。」