1. 命題 p を「a は 3 の倍数である」, 命題 q を「b は 3 の倍数である」とする. このとき, p, q と論理演算子を使って, 次の命題を表せ.

(a) a と b はどちらも 3 の倍数である.

(解答例)　$p \wedge q$.

(b) a と b の少なくとも一方は 3 の倍数である.

(解答例)　$p \vee q$ 等.

(c) a は 3 の倍数だが b は 3 の倍数でない.

(解答例)　$p \wedge (\neg q)$ 等.

(d) a と b のどちらも 3 の倍数でない.

(解答例)　$\neg p \wedge \neg q$ 等.

(e) a と b の一方だけが 3 の倍数である.

(解答例)　$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 等.

(f) a が 3 の倍数ならば b も 3 の倍数である.

(解答例)　$p \Rightarrow q$ 等.

2. 任意の命題 p, q, r に対して, 次が成り立つことを示せ.

(a) (結合法則) $(p \vee q) \vee r \Longleftrightarrow p \vee (q \vee r)$.

(解答例)

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
○	○	○	○	○	○	○
○	○	×	○	○	○	○
○	×	○	○	○	○	○
○	×	×	○	○	×	○
×	○	○	○	○	○	○
×	○	×	○	○	○	○
×	×	○	×	○	○	○
×	×	×	×	×	×	×

(b) (分配法則) $p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

(解答例)

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
○	○	○	○	○	○	○	○
○	○	×	○	○	○	×	○
○	×	○	○	○	×	○	○
○	×	×	×	×	×	×	×
×	○	○	○	×	×	×	×
×	○	×	○	×	×	×	×
×	×	○	○	×	×	×	×
×	×	×	×	×	×	×	×

3. (ド・モルガンの法則) 任意の命題 p, q に対して, 次が成り立つことを示せ.

(a) $\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q$.

(解答例)

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
◯	◯	◯	×	×	×	×
◯	×	◯	×	×	◯	×
×	◯	◯	×	◯	×	×
×	×	×	◯	◯	◯	◯

(b) $\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$.

(解答例)

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
◯	◯	◯	×	×	×	×
◯	×	×	◯	×	◯	◯
×	◯	×	◯	◯	×	◯
×	×	×	◯	◯	◯	◯

4. (対偶) 任意の命題 p, q に対して, 次が成り立つことを示せ.

$$(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p).$$

(解答例)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
◯	◯	◯	×	×	◯
◯	×	×	◯	×	×
×	◯	◯	×	◯	◯
×	×	◯	◯	◯	◯

5. (背理法) 任意の命題 p, q に対して, 次が成り立つことを示せ.

$$(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg(p \wedge \neg q)).$$

(解答例)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
◯	◯	◯	×	×	◯
◯	×	×	◯	◯	×
×	◯	◯	×	×	◯
×	×	◯	◯	×	◯