幾何学 1
第 3 回 集合 (集合の演算)

野本 慶一郎

明星大学 教育学部 教育学科

2025/04/16

全ての偶数は，一つの整数と 1:1 に対応していて，重なりもない．

整数 $\mathbb{Z}$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\cdots & -6 & -4 & -2 & 0 & 2 & 4 & 6 & \cdots
\end{array}
$$

偶数 $2\mathbb{Z}$

「整数の個数」＝「偶数の個数」と言えるか？

前回の復習

定義 (教科書, 定義 2.5, p.14.)

二つの命題 p, q に対して，次のように論理演算を定める．

名称	論理記号での表記	日本語での意味
論理和	$p \vee q$	p または q
論理積	$p \wedge q$	p かつ q
否定	$\neg p$	p でない
含意	$p \Longrightarrow q$	p ならば q
同値	$p \Longleftrightarrow q$	$p \Longrightarrow q$ かつ $q \Longrightarrow p$

- このように, 命題から新たな命題を作る操作を**論理演算**という.
- $\vee, \wedge, \neg, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow$ のような記号を論理演算子という.

■ 含意「$\Longrightarrow$」に関する真理値表は以下のようになる．

■ ただし，**仮定が偽ならば真**となることに注意．

$\Longrightarrow$ に関する真理値表

p	q	$p \Longrightarrow q$
○	○	○
○	×	×
×	○	○
×	×	○

今日の内容

- 数学では, ほとんどの問題は「集合」を用いて表され,「集合」を用いて研究され, そして証明されていきます.
- 例えばフェルマーの最終定理は, $X^n + Y^n = Z^n$ $(n \geq 3)$ を満たす自然数解 (X, Y, Z) は存在しないことを主張するものですが, 集合を使って書けば

$$\left\{(X, Y, Z) \in \mathbb{N}^3 \,\middle|\, X^n + Y^n = Z^n\right\} = \varnothing$$

  となります.
- 今日の講義では,「集合の包含関係 $A \subset B$」や「集合の等式 $A = B$」の厳密な証明記述力を身につけることを目標とします.
- したがって講義は短めにするので, 演習時間でたくさん証明問題を解いてください.

定義 (教科書, 定義 1.1, p.1)

集合とは「もの」の集まりのことである. また, 集合を構成する「もの」を, その集合の**要素**または**元**という.

- 一般に, a が集合 A の要素であることを以下のように表す.

$$a \in A \quad \text{または} \quad A \ni a.$$

- 逆に, a が A の要素でないことを以下のように表す.

$$a \notin A \quad \text{または} \quad a \not\ni A.$$

余談だが,「$\in$」という記号は要素 (Element) の E の形からきているらしい.

- 集合の表し方には, **全列挙 (外延的記法)** と, **条件を用いる方法 (内延的記法)** がある.

例

集合 A を, 12 の正の約数全体の集合とする. A は以下のように表せる.

- 外延的記法: $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.
- 内延的記法: $A = \{x \mid x \text{ は } 12 \text{ の正の約数}\}$.

- 要素の個数が有限であれば全列挙できる. このような集合を**有限集合**という.
- 一方で, 以下のような有限集合でない集合も存在し, それらを**無限集合**という.

例

集合 B を, 7 の倍数全体の集合とする. B は以下のように表せる.

- 外延的記法: $A = \{\ldots, -14, -7, 0, 7, 14, \ldots\}$.
- 内延的記法: $A = \{n \mid n \text{ は } 7 \text{ の倍数}\}$.

明星大学 MEISEI UNIVERSITY

- 内延的記法は, (全列挙と違い) 人によって若干表記が異なったりする.

例

X を 3 で割ると余りが 1 となる自然数全体の集合とすると, 以下のように表せる.

$$
\begin{aligned}
X &= \{n \mid n \text{ は 3 で割ると 1 余る}\} \\
&= \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \equiv 1 \bmod 3\} \\
&= \{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 1 \bmod 3\} \\
&= \{3n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}
$$

- もちろん, どの表記を用いても良い.

定義 (教科書, 定義 1.6, p.3)

要素の個数が 0 である集合を**空集合**といい, $\varnothing$ で表す.

- 集合というと, 一つ以上は要素を含んでいるものを想像しがちである.
- しかし, 整数の「0」のように "何もない" ものや状態に名前を付けておくと, 後々便利になる.

- 空集合の定義から, **どのような対象 x に対しても $x \notin \varnothing$** であることに注意しよう.

例

二乗して負の値になる実数は存在しないので, $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\} = \varnothing$ である.

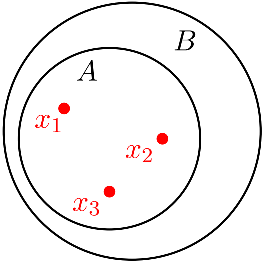
定義 (教科書, 定義 1.7, p.4)

二つの集合 A, B について

$$\textbf{全ての } A \textbf{ の要素 } x \textbf{ に対して, } x \textbf{ は } B \textbf{ の要素} \qquad (\forall x \in A, x \in B)$$

が成り立つとき, $A \subset B$ または $B \supset A$ と書く.

- 非常に基本的な定義であるが, 集合の包含関係や等式を示すためには必ずこの定義通りに証明をする.
- 包含関係に関する問題を手を動かしてたくさん解くことで, 必ず身につけてほしい定義である.

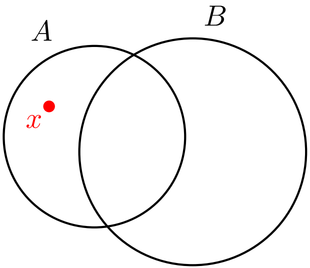


明星大学 MEISEI UNIVERSITY

- 集合 A が集合 B の部分集合**でない**とき, $A \not\subset B$ と書く.
- これは, A の要素であるが B の要素でないものが存在するとき, すなわち

$$\exists x \in A \text{ s.t. } x \notin B$$

が成り立つことである.



定義 (教科書, 定義 1.10, p.5)

集合 A, B に対して

$$A \subset B \text{ かつ } B \subset A$$

が成り立つとき, $A = B$ と書く.

- つまり $A = B$ というのは

$$\forall x \in A, x \in B \text{ かつ } \forall x \in B, x \in A$$

が成り立つことである.

- **「等式 $A = B$ を示せ」という問題は, 必ず $A \subset B$ と $B \subset A$ を示すようにしましょう.**

注意

- 慣れてきた人ほど, 集合の等式証明で

$$A = B = C = \cdots = X = Y = Z$$

  と等式変形をしがちです. この計算でよい場合ももちろんありますが, それで間違ってしまっては元も子もありません.

- 例えば等式

$$\{2x + 3y \mid x, y \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$$

  は等式変形で示すことは難しいと思います.

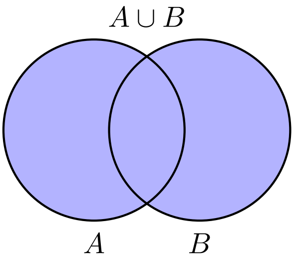
- 誰の目が見ても明らかな等式変形ならばいいですが, 基本的には定義に則って $A \subset B$ と $B \subset A$ を二つ示しましょう.

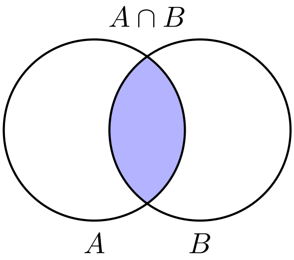
定義 (教科書, 定義 1.14, p.7)

集合 A, B について

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}, \quad A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

と定める. **集合 $A \cup B$ を A と B の和集合**, **集合 $A \cap B$ を A と B の共通部分**という.





補集合

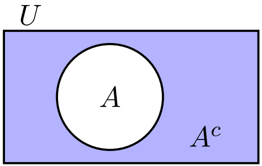
定義 (教科書, 定義 1.18, p.9)

集合 U を考える．このとき部分集合 $A \subset U$ の (U における) **補集合**とは

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

のことである．

- つまり $A \subset U$ の補集合とは, U の要素の内, A に属していないもの全体の集合である．
- このような U を**全体集合**と言う．



余談だが,「c」は補うという意味の complement からきている．

問題

A を 12 の約数全体の集合, B を 36 の正の約数全体の集合とする.
このとき $A \subset B$ であることを示せ.

(証明)

定義より

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

であり, 明らかに A の全ての元は B に属している. したがって $A \subset B$ である. □

■ 次のページにように, 集合 A, B を全列挙しなくても証明することができる.

問題

A を 12 の約数全体の集合, B を 36 の正の約数全体の集合とする.
このとき $A \subset B$ であることを示せ.

(証明)

任意に $n \in A$ を取る. このとき A の定義より n は正の 12 の約数である. したがって n は 36 の正の約数でもある. **よって $n \in B$ である. 以上より $A \subset B$ が成り立つ.** $\square$

■ **赤色**で書かれている箇所は必ず書くようにしてください.

問題

A, B, C を集合とする．$A \subset C$ かつ $B \subset C$ ならば $A \cup B \subset C$ であることを示せ．

(解答例)

任意に $x \in A \cup B$ を取る． このとき $x \in A$ または $x \in B$ である．

(i) $x \in A$ のとき

$A \subset C$ より $x \in C$ である．

(ii) $x \in B$ のとき

$B \subset C$ より $x \in C$ である．

いずれの場合も **$x \in C$ である．したがって $A \cup B \subset C$ が成り立つ．** $\square$

問題

(分配法則) A, B, C を集合とする．$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ であることを示せ．

(解答例)

まず「$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$」を示す．

任意に $x \in A \cup (B \cap C)$ を取る．このとき $x \in A$ または $x \in B \cap C$ である．

(i) $x \in A$ のとき

$A \subset A \cup B$ より $x \in A \cup B$ である．同様にして $x \in A \cup C$ である．

したがって $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ である．

(ii) $x \in B \cap C$ のとき...(中略)

次に「$A \cup (B \cap C) \supset (A \cup B) \cap (A \cup C)$」を示す....(中略)

演習の時間