

幾何学 1

第 1 回 集合論の概要

野本 慶一郎

明星大学 教育学部 教育学科

2025/04/09

イントロダクション

名前 野本 慶一郎

生年月日 1995 年 9 月 8 日 (29 歳)

出身等 愛知県豊田市出身. 22 歳から 27 歳まで福岡に居住. 28 歳から神奈川.

出身大学 愛知教育大学 教育学部 中等教育教員養成課程 数学専攻
九州大学大学院 数理学府 修士・博士課程 修了

現在 企業で暗号アルゴリズムの研究開発をしています.

好きなもの ビール, ルービックキューブ, 漫画・アニメ, 東海オンエア,
Acid Black Cherry, UNISON SQUARE GARDEN, Aooo,
YOASOBI, NOMELON NOLEMON, 結束バンド, ...

- 3つの正方形のチョコレートがあります. 3つとも, 厚さは同じです.
- 大きな1つか, 小さな2つがもらえます.

どっちが得か, 何も道具を使わずに判断できますか？



© Masahiko Sato, Ryo Oshima, and Junya Hirose, 2021.

講義について

- 基本的に講義は対面で行います。ただ、諸事情により対面講義ができない場合はオンデマンド (動画視聴) 講義を行います。

- 講義構成は以下の通りとします。

数学クイズ 15 分 + 講義 45 分 + 演習 30 分

- 教科書: 大田春外, 「はじめての集合と位相」, 日本評論社。



- 成績はレポートと確認テスト(2回)を評価して行います.
- レポートや確認テストは実施前に, 明星 LMS にて告知します.

- 成績の内訳:

レポート 40 点 + (前半) 確認試験 30 点 + (後半) 確認試験 30 点

合計 60 点以上で単位が出ます. (必要に応じて加点することもあるかもしれません.)

- 講義内容等について質問がある場合,
明星 LMS の個別指導 (コレクション) を活用してください.
- もしくは私のメールアドレスに連絡をください.

`keiichiro.nomoto@meisei-u.ac.jp`

- どんな小さなことでもいいので, 気軽に質問してください.

- 講義資料や演習問題等は毎回私の HP にて共有しますので、必ずブックマークしておいてください。
- 資料を見返したいときなども当然ありますので、講義はスマホや PC 等で資料を見ながら聞いていただいて構いません。



野本慶一郎の HP

幾何学1で学ぶこと

- 幾何学 1 では, 主に**集合論**について学びます.
- 集合論は, 実は高校で既に触れています. 実際, 数 A で習った
命題, 対偶, 必要十分条件, 集合, 共通部分, 和集合, ...
といった概念は, 集合論で学ぶ概念の一部です.
- とすると, 集合論は微分積分とかと違って地味だ, という印象をもつかもかもしれません.
- しかし学習を進めていくと, 数学のどの分野でも集合論の知識が必要となります.
- 集合論とは**数学の基礎を支える理論体系**であり, 現代の数学に必要不可欠なものです.

- まずは数学の主張を説明する際に欠かせない用語を確認しましょう。
ただし、ここではイメージしやすいようにざっくりとした説明を書きます。

公理 (Axiom) 証明無しに正しいと仮定した性質. 論理を展開する上での大前提.

定義 (Definition) ある事柄に対して名前をつけること.

命題 (Proposition) 成立することが数学的に証明された事柄.

定理 (Theorem) 最も主張したい命題.

補題 (Lemma) 定理を証明するための準備となる命題.

系 (Corollary) 定理から派生的に証明される命題.

- 定理も補題も系も、全て命題の一つである.
- ある文脈では命題 A を定理 A と呼ぶべきかもしれない.
他の状況では補題 A と呼ぶべきかもしれない. 呼び方は状況により異なる.

公理

全てのものは何らかの分類に属する.

- これは証明なしに正しいと仮定する性質であり, 議論の大前提とするものである.

定義

りんごとは, バラ科リンゴ属の落葉高木における果実のことをいう.

- 「バラ科リンゴ属の落葉高木における果実」という概念に「りんご」と名付けた.

命題

りんごは果物の一種である.

- (ここでは「果物」の定義を与えてはいないが) 証明できる事柄である.

補題

果物は植物の一種である.

- 命題であり, 後に記す定理を証明するために必要な命題である.

定理

りんごは植物の一種である.

- (この説明の中で) 最も主張したい命題.

系

りんごは空気や水から養分を得る.

- 定理により結果的に得られる命題.

■ 数学の文を書くためには、いくつかの世界共通の記号を知っておく必要がある。

\mathbb{N} 自然数 (Natural number) 全体の集合.

\mathbb{Z} 整数 (integer) 全体の集合. ドイツ語で整数を表す Zahlen が由来.

\mathbb{Q} 有理数 (rational number) 全体の集合. 商を表す Quotient が由来.

\mathbb{R} 実数 (Real number) 全体の集合.

\mathbb{C} 複素数 (Complex number) 全体の集合.

例

「 x は実数である。」と「 x は実数全体の集合に属す。」と「 $x \in \mathbb{R}$ 。」は全て同じ意味である。

■ 現代の数学において必要不可欠な論理記号を挙げる.

∀ 「任意の」, 「全ての」という意味. for All ... における A を反転した表記.

例

■ 「任意の実数 x に対して, $x^2 \geq 0$ が成り立つ。」と以下の文は同じ意味.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0.$$

■ 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $1/\varepsilon > 0$ が成り立つ。」と以下の文は同じ意味.

$$\forall \varepsilon > 0, 1/\varepsilon > 0.$$

■ 「全ての自然数 a, b, c に対して, $a^3 + b^3 \neq c^3$ が成り立つ。」と以下の文は同じ意味.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}, a^3 + b^3 \neq c^3.$$

- 以下の記号も現代の数学において必要不可欠である.
- しかし, 表記や解釈が少しややこしいので, たくさん演習をして慣れること.
- ☐ 「ある～が存在して」という意味. `there Exists ...` における E を反転した記号.

例

「ある複素数 z が存在して, $z^2 = -1$ が成り立つ。」と以下の文は同じ意味.

$$\exists z \in \mathbb{C} \text{ s.t. } z^2 = -1.$$

「 $z^2 = -1$ を満たす複素数 z が存在する」と読み替えてもよい.

- s.t. は `such that` の略. 「 $\exists A \text{ s.t. } B$ 」は, 「ある A が存在して B を満たす。」とか「 B を満たすような A が存在する」のような意味.

- 一つの文に、「 \forall 」と「 \exists 」が両方現れる場合もある.
- その説明のために, ここでは自然数の 1 がどのような数か考えてみよう.
- この 1 という数は, $2 \times 1 = 1 \times 2 = 2$, $48 \times 1 = 1 \times 48 = 48$ のように, どのような整数 n に対しても $n \times 1 = 1 \times n = n$ を満たす.
- ここで, 逆転の発想を試みる. つまりある自然数 e が, 全ての整数 n に対して

$$n \times e = e \times n = n$$

を満たすとき, その e という値を我々は 1 と書いている.

- この事実を論理記号を用いて表現すると以下のように書ける (\forall と \exists の順番に注意).

$$\exists e \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{Z}, n \times e = e \times n = n.$$

演習の時間
