1. 以下の主張における括弧「」で囲まれた箇所を論理記号を用いて表現せよ．ただし，全ての主張が正しいとは限らない．
   (a)「任意の実数 x に対して，$x^2 \geq 0$ である.」
   (解答例)
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0.$$
   (b)「ある有理数 q が存在して，$q^2 = 2$ が成り立つ.」
   (解答例)
   $$\exists q \in \mathbb{Q} \text{ s.t. } q^2 = 2.$$
   (c)「ある整数 a と b が存在して，$a^2 + b^2 = 3$ が成り立つ.」
   (解答例)
   $$\exists a, b \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } a^2 + b^2 = 3.$$
   (d) $f(x) = x^2 + 1$ とする．このとき「任意の実数 y に対して，ある実数 x が存在して，$y = f(x)$ が成り立つ.」
   (解答例)
   $$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R} \text{ s.t. } y = f(x).$$

2. 以下の主張を，論理記号を用いず日本語で表現せよ．
   (a) $\forall a \in \mathbb{Q}, a + 1 \in \mathbb{R}$.
   (解答例)
   - 任意の有理数 a に対して，$a + 1$ は実数である．
   - 全ての有理数 a に対して，$a + 1$ は実数である．

   等々．
   (b) $\exists z \in \mathbb{C}$ s.t. $z^2 = 1 + i$.
   (解答例)
   - ある複素数 z が存在して．$z^2 = 1 + i$ が成り立つ．
   - $z^2 = 1 + i$ を満たす複素数 z が存在する．

   等々．
   (c) $\forall s \in \mathbb{Z}, \exists t \in \mathbb{Z}$ s.t. $s + t = t + s = 0$.
   (解答例)
   - 任意の整数 s に対して，ある整数 t が存在して，$s + t = t + s = 0$ を満たす．
   - 全ての整数 s に対して，$s + t = t + s = 0$ となる整数 t が存在する．

   等々．

(発展) 以下の主張における括弧「」で囲まれた箇所を論理記号を用いて表現せよ.

(a) (フェルマーの最終定理) $n \geq 3$ とする. このとき「ある自然数 X, Y, Z が存在して $X^n + Y^n = Z^n$ が成り立つ」は偽である.

(解答例)

$$\exists\, X, Y, Z \in \mathbb{N} \text{ s.t. } X^n + Y^n = Z^n.$$

(b) (素数定理) $\pi(x)$ で, x 以下の素数の個数を表すとする. このとき「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $x_0 > 0$ が存在して, 任意の実数 x に対して $[x_0 < x \Longrightarrow |\pi(x)/(x/\log x) - 1| < \varepsilon]$ が成り立つ.」

(解答例)

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, x_0 > 0 \text{ s.t. } \forall\, x \in \mathbb{R}, [x_0 < x \Longrightarrow |\pi(x)/(x/\log x) - 1| < \varepsilon].$$

(c) (ε-N 論法) $\{a_n\}_n$ を実数列, α を実数とする.「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の自然数 n に対して $[N \leq n \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon]$ が成り立つ.」

(解答例)

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall\, n \in \mathbb{N}, [N \leq n \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon].$$