chapeter 2 problem 解答

2015 年 12 月 2 日

2.1)

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) \tag{1}$$

の様に書ける。x 成分だけ考えると

$$\frac{\partial (e^{i(kr-\omega t)})}{\partial x} = ik_x f \tag{2}$$

y 成分、z 成分も同様に考えれば、

$$\frac{\partial (e^{i(kr-\omega t)})}{\partial y} = ik_y f \ , \frac{\partial (e^{i(kr-\omega t)})}{\partial z} = ik_z f \tag{3}$$

したがって、答えは

$$\nabla f = (k_x, k_y, k_z) if = if\mathbf{k} \tag{4}$$

2.2)

1m 離れたところの球面の表面に 100J のエネルギーが入ってくるので、球の表面積でその仕事量を割れば良くて、

$$\frac{100}{4\pi} \ \frac{J}{s \cdot m^2} \tag{5}$$

2.3)

照射強度は単位時間、単位面積あたりのエネルギーなので

$$I = \frac{100 \times 10^6}{\pi(5 \times 10^{-6})} = 1.273 \times 10^{18} \ \frac{J}{m^2 \cdot s} \tag{6}$$

振幅は以下のように与えられるので

$$|E_0|^2 = \frac{2Z_0}{n} = 2Z_0 I = 2(\frac{\mu_0}{\epsilon_0})^{1/2} I = 3.096 \times 10^{10} \tag{7}$$

2.4)

2.5)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= E_0(1, be^{i\phi})e^{i(kz-\omega t)} \qquad (8)\\
&= E_0(e^{i(kz-\omega t)}, be^{i(kz-\omega t+\phi)}) \qquad (9)
\end{aligned}
$$

実数部分だけ見れば実数表示と一致する。

2.6)

(a)

$$
\boldsymbol{E} = E_0(\cos(kz-\omega t), \cos(kz-\omega t)) \qquad (10)
$$

直線偏向になっている $(y=x)$ 。

（b）

$$
\boldsymbol{E} = E_0(\cos(kz-\omega t), 2\cos(kz-\omega t)) \qquad (11)
$$

直線偏向（$y=2x$）

（c）

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= E_0(\cos(kz-\omega t), -\cos(kz-\omega t+\pi/2))\\
&= E_0(\cos(kz-\omega t), \sin(kz-\omega t) \qquad (12)
\end{aligned}
$$

円偏光になっている。

(d)

$$
\boldsymbol{E} = E_0(\cos(kz-\omega t), \cos(kz-\omega t+\pi/4)) \qquad (13)
$$

楕円偏光になります。（長軸が 45 度傾いている）

2.7)

(a)

$$
(1, 1) \qquad (14)
$$

(b)

$$
(1, 2) \qquad (15)
$$

(c) 複素表示で書けば、e の共通因子がでてきて、くくれます。

$$
(1, -i) \qquad (16)
$$

(d)

$$
(\sqrt{2}, 1+i) \qquad (17)
$$

2.8)

○ $(1,\sqrt{3})$ のとき

直線偏向になる（x 軸から 60°の偏角を持つ)。このベクトルに直交するベクトルでは、

$$(\sqrt{3},-1) \tag{18}$$

○ $(i,-1)$ のとき

円偏向になる。このベクトルに直行するベクトルは

$$(i,-1) \tag{19}$$

○ $(1-i,1+i)$ のとき

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix} &= (1+i)\begin{pmatrix} \frac{1-i}{1+i} \\ 1 \end{pmatrix} &(20)\\
&= (1+i)\begin{pmatrix} \frac{-2i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} &(21)\\
&= (1+i)\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} &(22)\\
&= (i-1)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} &(23)
\end{aligned}$$

σ_+ であることがわかる。つまり、円偏光である。これに直行するベクトルは逆向きの円偏光ベクトルなので,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \tag{24}$$

2.9)

2.10)

入射光を $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ とする。fig2.7 の通りの偏光子を設置すると、透過した光はジョーンズ行列を用い書くと、

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A+B \\ A+B \end{bmatrix} &(25)\\
&= \frac{1}{2} \quad \begin{bmatrix} A+B \\ (A+B)i \end{bmatrix} = \frac{A+B}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} &(26)
\end{aligned}$$

となる。ここで、A と B は任意である。A と B の値にかかわらずこの偏光は円偏光になる。A、B は振幅の大きさを決めるパラメータになっている。

2.11)

この問題は固有ベクトルを求める問題になる。ある行列（偏光子）の固有ベクトルは、その固有ベクトルと一致する偏光状態の光を通すと、何も変化しない（振幅だけ変化するが)。なので、固有ベクトルを

探すことから始める。

$$\begin{bmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} \tag{27}$$

$$=\begin{bmatrix}1-\lambda & i\\ -i & 1-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=0 \tag{28}$$

$\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ なので

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & i\\ -i & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{29}$$

$$\lambda=0,2 \tag{30}$$

○ $\lambda=0$ のとき

$a=-ib$ なので固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix} \tag{31}$$

このとき、$\lambda=0$ なので光を通さない。

○ $\lambda=2$ のとき

$a=ib$ なので固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix} \tag{32}$$

このとき、偏光状態を変えずに光を透過する。

2.12)

$\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ の光を問題に与えられた順 ($\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$) に置いた偏光子におくと、

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \tag{33}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \tag{34}$$

この操作で $\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$ が $\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ に変わったことがわかる。そして、それは偏光面が 90° 変わったことを意味している。

2.13)

$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ に対する固有ベクトルと固有値を求める。

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \tag{35}$$

$$\begin{bmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=0 \tag{36}$$

行列式が 0 になることを使えば、$\lambda = 0, 2$ がわかる。
〇 $\lambda = 0$ のとき
$A = -B$ なので固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{37}$$

〇 $\lambda = 2$ のとき
$A = B$ なので固有ベクトル

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{38}$$

2.14)

〇水の場合（$n = 1.33$）

$$\sin^{-1}(\frac{1}{n})\ \frac{180}{\pi} = 48.75\ (degree) \tag{39}$$

〇ダイヤ（$n = 2.42$）

$$\sin^{-1}(\frac{1}{n})\ \frac{180}{\pi} = 24.40\ (degree) \tag{40}$$

2.15)

〇水の場合（$n = 1.33$）

$$\theta_{\text{Brewater}} = \tan 1.33^{-1} = 53.06\ (degree) \tag{41}$$

〇ダイヤの場合（$n = 2.42$）

$$\theta_{\text{Brewater}} = \tan 2.42^{-1} = 67.54\ (degree) \tag{42}$$

2.16)

P 偏光、S 偏光の反射率は式 (2.58),(2.59),(2.60) でわかる様に

$$R_s = |r_s|^2 = \left| \frac{\cos\theta - \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}{\cos\theta + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}} \right|^2 \tag{43}$$

$$R_p = |r_p|^2 = \left| \frac{-n^2\cos\theta + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}{n^2\cos\theta + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}} \right|^2 \tag{44}$$

と書ける。$\theta = \pi/4$ の時考える。
〇水の場合（$n = 1.33$）

$$R_s = 0.0523067 \tag{45}$$

$$R_p = 0.0027359 \tag{46}$$

○ダイヤの場合（$n = 2.42$）

$$R_s = 0.2829700 \tag{47}$$
$$R_p = 0.0800720 \tag{48}$$

一応 python のソースコードを貼っておく

```
*************************************
import numpy as np
a = np.pi/4
n =
rs = np.cos(a)-np.sqrt(n**2-(np.sin(a))**2)
rs = rs/(np.cos(a)+np.sqrt(n**2-(np.sin(a))**2))
rp = -n**(2) * np.cos(a)+np.sqrt(n**2-(np.sin(a))**2)
rp = rp / ( n**(2) * np.cos(a)+np.sqrt(n**2-(np.sin(a))**2))
Rs = rs**2 Rp = rp**2
print (Rs,Rp)
**************************************
```

2.17)

内部反射における臨界角が４５°とうことがわかるので、そこから以下のことがわかる。

$$\pi/4 = \sin^{-1} 1/n \quad \therefore \ \frac{1}{n} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{49}$$

従って

$$\theta_{\text{Brewater}} = \tan^{-1} n = \tan^{-1}(\sqrt{2}) = 54.73\ (degree) \tag{50}$$

2.18)

円偏光を作るためには、1 回の反射で S 偏光と P 偏光の位相差が $\pi/4$ であればいい（2 回反射するので計 $\pi/2$ の位相がずれる）。したがって、式 (2.27) の $\Delta = \pi/4$ を満たすような θ を考えればよい。求める θ に関する方程式は式（2.27）を用いて以下の様にかける。

$$\tan\pi/8 = \frac{\cos\theta\sqrt{\sin^2\theta - 1/1.65^2}}{\sin^2\theta} \tag{51}$$

$\theta = 60^\circ$ の時、この式の両辺がだいたい一致していることを示せばいい（解く必要があるとは思わなかったので）。

$$(\text{左辺}) = \tan\pi/8 = 0.4142 \tag{52}$$
$$(\text{右辺}) = \frac{\cos\pi/3\sqrt{\sin^2\pi/3 - 1/1.65^2}}{\sin^2\pi/3} = 0.4124 \tag{53}$$

両辺がだいたい一致するので $\theta = 60^\circ$ の時、すなわち、 $A = 60^\circ$ の時円偏光になることがわかる。

2.19)