

## chapter 2 problem 解答

2015 年 12 月 2 日

### 2.1) sasadhfdkjhka

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (1)$$

の様に書ける。x 成分だけ考えると

$$\frac{\partial(e^{i(kr-\omega t)})}{\partial x} = ik_x f \quad (2)$$

y 成分、z 成分も同様に考えれば、

$$\frac{\partial(e^{i(kr-\omega t)})}{\partial y} = ik_y f, \quad \frac{\partial(e^{i(kr-\omega t)})}{\partial z} = ik_z f \quad (3)$$

したがって、答えは

$$\nabla f = (k_x, k_y, k_z)if = if\mathbf{k} \quad (4)$$

### 2.2)

1m 離れたところの球面の表面に 100J のエネルギーが入ってくるので、球の表面積でその仕事量を割れば良くて、

$$\frac{100}{4\pi} \frac{J}{s \cdot m^2} \quad (5)$$

### 2.3)

照射強度は単位時間、単位面積あたりのエネルギーなので

$$I = \frac{100 \times 10^6}{\pi(5 \times 10^{-6})} = 1.273 \times 10^{18} \frac{J}{m^2 \cdot s} \quad (6)$$

振幅は以下のように与えられるので

$$|E_0|^2 = \frac{2Z_0}{n} = 2Z_0 I = 2\left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right)^{1/2} I = 3.096 \times 10^{10} \quad (7)$$

2.4)

2.5)

$$\mathbf{E} = E_0(1, be^{i\phi})e^{i(kz-\omega t)} \quad (8)$$

$$= E_0(e^{i(kz-\omega t)}, be^{i(kz-\omega t+\phi)}) \quad (9)$$

実数部分だけ見れば実数表示と一致する。

2.6)

(a)

$$\mathbf{E} = E_0(\cos(kz - \omega t), \cos(kz - \omega t)) \quad (10)$$

直線偏光になっている ( $y = x$ )。

(b)

$$\mathbf{E} = E_0(\cos(kz - \omega t), 2\cos(kz - \omega t)) \quad (11)$$

直線偏光 ( $y = 2x$ )

(c)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0(\cos(kz - \omega t), -\cos(kz - \omega t + \pi/2)) \\ &= E_0(\cos(kz - \omega t), \sin(kz - \omega t)) \end{aligned} \quad (12)$$

円偏光になっている。

(d)

$$\mathbf{E} = E_0(\cos(kz - \omega t), \cos(kz - \omega t + \pi/4)) \quad (13)$$

楕円偏光になります。(長軸が 45 度傾いている)

2.7)

(a)

$$(1, 1) \quad (14)$$

(b)

$$(1, 2) \quad (15)$$

(c) 複素表示で書けば、e の共通因子がでてきて、くくれます。

$$(1, -i) \quad (16)$$

(d)

$$(\sqrt{2}, 1 + i) \quad (17)$$

2.8)

○  $(1, \sqrt{3})$  のとき

直線偏向になる (x 軸から  $60^\circ$  の偏角を持つ)。このベクトルに直交するベクトルでは、

$$(\sqrt{3}, -1) \quad (18)$$

○  $(i, -1)$  のとき

円偏向になる。このベクトルに直行するベクトルは

$$(i, -1) \quad (19)$$

○  $(1 - i, 1 + i)$  のとき

$$\begin{pmatrix} 1 - i \\ 1 + i \end{pmatrix} = (1 + i) \begin{pmatrix} \frac{1-i}{1+i} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$= (1 + i) \begin{pmatrix} \frac{-2i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$= (1 + i) \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$= (i - 1) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (23)$$

$\sigma_+$  であることがわかる。つまり、円偏光である。これに直行するベクトルは逆向きの円偏光ベクトルなので、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (24)$$

2.9)

2.10)

入射光を  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  とする。fig2.7 の通りの偏光子を設置すると、透過した光はジョーンズ行列を用い書くと、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A+B \\ A+B \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A+B \\ (A+B)i \end{bmatrix} = \frac{A+B}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad (26)$$

となる。ここで、A と B は任意である。A と B の値にかかわらずこの偏光は円偏光になる。A、B は振幅の大きさを決めるパラメータになっている。

2.11)

この問題は固有ベクトルを求める問題になる。ある行列（偏光子）の固有ベクトルは、その固有ベクトルと一致する偏光状態の光を通すと、何も変化しない（振幅だけ変化するが）。なので、固有ベクトルを

探すことから始める。

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{なので}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (29)$$

$$\lambda = 0, 2 \quad (30)$$

○  $\lambda = 0$  のとき

$a = -ib$  なので固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \quad (31)$$

このとき、 $\lambda = 0$  なので光を通さない。

○  $\lambda = 2$  のとき

$a = ib$  なので固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad (32)$$

このとき、偏光状態を変えずに光を透過する。

2.12)

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  の光を問題に与えられた順 ( $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ) に置いた偏光子におくと、

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

この操作で  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  が  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  に変わったことがわかる。そして、それは偏光面が  $90^\circ$  変わったことを意味している。

2.13)

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  に対する固有ベクトルと固有値を求める。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \quad (36)$$

行列式が 0 になることを使えば、 $\lambda = 0, 2$  がわかる。

○  $\lambda = 0$  のとき

$A = -B$  なので固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (37)$$

○  $\lambda = 2$  のとき

$A = B$  なので固有ベクトル

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

2.14)

○水の場合 ( $n = 1.33$ )

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \frac{180}{\pi} = 48.75 \text{ (degree)} \quad (39)$$

○ダイヤモンド ( $n = 2.42$ )

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \frac{180}{\pi} = 24.40 \text{ (degree)} \quad (40)$$

2.15)

○水の場合 ( $n = 1.33$ )

$$\theta_{\text{Brewster}} = \tan^{-1} 1.33 = 53.06 \text{ (degree)} \quad (41)$$

○ダイヤモンドの場合 ( $n = 2.42$ )

$$\theta_{\text{Brewster}} = \tan^{-1} 2.42 = 67.54 \text{ (degree)} \quad (42)$$

2.16)

P 偏光、S 偏光の反射率は式 (2.58),(2.59),(2.60) でわかる様に

$$R_s = |r_s|^2 = \left| \frac{\cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \right|^2 \quad (43)$$

$$R_p = |r_p|^2 = \left| \frac{-n^2 \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{n^2 \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \right|^2 \quad (44)$$

と書ける。 $\theta = \pi/4$  の時考える。

○水の場合 ( $n = 1.33$ )

$$R_s = 0.0523067 \quad (45)$$

$$R_p = 0.0027359 \quad (46)$$

○ダイヤの場合 ( $n = 2.42$ )

$$R_s = 0.2829700 \quad (47)$$

$$R_p = 0.0800720 \quad (48)$$

一応 python のソースコードを貼っておく

\*\*\*\*\*

```
import numpy as np
a = np.pi/4
n =
rs = np.cos(a)-np.sqrt(n**2-(np.sin(a))**2)
rs = rs/(np.cos(a)+np.sqrt(n**2-(np.sin(a))**2))
rp = -n**(2) * np.cos(a)+np.sqrt(n**2-(np.sin(a))**2)
rp = rp / ( n**(2) * np.cos(a)+np.sqrt(n**2-(np.sin(a))**2))
Rs = rs**2 Rp = rp**2
print (Rs,Rp)
*****
```

## 2.17)

内部反射における臨界角が  $45^\circ$  ということがわかるので、そこから以下のことがわかる。

$$\pi/4 = \sin^{-1} 1/n \quad \therefore \frac{1}{n} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (49)$$

従って

$$\theta_{\text{Brewster}} = \tan^{-1} n = \tan^{-1}(\sqrt{2}) = 54.73 \text{ (degree)} \quad (50)$$

## 2.18)

円偏光を作るためには、1回の反射で S 偏光と P 偏光の位相差が  $\pi/4$  であればいい (2回反射するので計  $\pi/2$  の位相がずれる)。したがって、式 (2.27) の  $\Delta = \pi/4$  を満たすような  $\theta$  を考えればよい。求める  $\theta$  に関する方程式は式 (2.27) を用いて以下の様にかける。

$$\tan \pi/8 = \frac{\cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta - 1/1.65^2}}{\sin^2 \theta} \quad (51)$$

$\theta = 60^\circ$  の時、この式の両辺がだいたい一致していることを示せばいい (解く必要があるとは思わなかったのだ)。

$$(\text{左辺}) = \tan \pi/8 = 0.4142 \quad (52)$$

$$(\text{右辺}) = \frac{\cos \pi/3 \sqrt{\sin^2 \pi/3 - 1/1.65^2}}{\sin^2 \pi/3} = 0.4124 \quad (53)$$

両辺がだいたい一致するので  $\theta = 60^\circ$  の時、すなわち、 $A = 60^\circ$  の時円偏光になることがわかる。

## 2.19)