Лабораторная работа №3. Моделирование марковских процессов

Задание

В соответствии с вариантом разработать приложение для моделирования марковских процессов.

Среда реализации

Любая среда программирования.

Вариант задания соответствует номеру бригады.

Максимальное допустимое количество человек в бригаде – 3.

Отчет оформлять необязательно.

Защита лабораторной работы – по соответствующим разделам: марковские процессы, марковские цепи, переходные вероятности, предельные вероятности; практические задания: поиск вектора распределения вероятностей через n шагов; поиск предельных вероятностей для марковской цепи; поиск финальных вероятностей для марковского процесса с заданной интенсивностью переходов.

Варианты

1. Моделирование марковского процесса с дискретным временем.

Имитация стрельбы из пушки. Выходные данные: временная диаграмма переходов в марковском графе; среднее число снарядов. Входные - матрица начальных вероятностей переходов (вектор начальных вероятностей для трех состояний: начальное состояние S_0 — цель не повреждена; S_1 — цель повреждена; S_2 — цель разрушена).

2. Марковские случайные процессы с непрерывным временем.

Моделирование работы станка. Станок может находиться в следующих состояниях: S_0 — станок исправен, свободен (простой); S_1 — станок исправен, занят (обработка); S_2 — станок исправен, замена инструмента (переналадка); интенсивность перехода $\lambda_{02} < \lambda_{21}$; S_3 — станок неисправен, идет ремонт $\lambda_{13} < \lambda_{30}$. Значения параметров λ (λ_{01} — поток на обработку (без переналадки); λ_{10} — поток обслуживания; λ_{13} — поток отказов оборудования; λ_{30} — поток восстановлений) определяются пользователем.

Выходные данные: диаграмма переходов. Входные – интенсивность переходов.

3. Марковские цепи.

Рассматривается система с дискретными состояниями и дискретным временем (цепь Маркова). Задана матрица вероятностей перехода за один шаг. Необходимо построить размеченный граф состояний; найти распределение вероятностей для первых n шагов, если известно, что в начальный момент времени (t_0 = 0) система находилась в j-ом состоянии с вероятностью $p_j(0)$. В приложении желательно предусмотреть ввод исходных данных (матрица переходных вероятностей, вектор распределения вероятностей начального состояния), осуществлять проверку вводимых данных. Представленные ниже значения использовать как тестовые данные.

1	$\begin{bmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0,7 \end{bmatrix}$	$p_1(0) = 0,8; \quad p_2(0) = 0,2$
2	$\begin{bmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,7 & 0 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,5 & 0,3 \\ 0,5 & 0 & 0,1 & 0,4 \end{bmatrix}$	$p_2(0) = 0,8; \quad p_3(0) = 0,2$
3	$\begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,5 & 0,2 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$	$p_2(0) = 0,4; \quad p_3(0) = 0,6$

4. Устройство может находиться в одном из четырех состояний: S={s1, s2, s3, s4}, где s1 - рабочее состояние системы, s2 - состояние текущего ремонта, s3 - состояние внепланового (аварийного) ремонта, s4 - состояние модернизации рабочих элементов системы. Переходная матрица рассматриваемой системы S имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 & 0,03 & 0,02 \\ 0,98 & 0 & 0,01 & 0,01 \\ 0,93 & 0,02 & 0,03 & 0,02 \\ 0,94 & 0,03 & 0 & 0,03 \end{pmatrix}$$

Вектор начального состояния системы: {1, 0, 0, 0}. Определить вектор состояния системы спустя m циклов. В приложении желательно предусмотреть ввод исходных данных (матрица переходных вероятностей, вектор распределения вероятностей начального состояния), осуществлять проверку вводимых данных. Указанные значения использовать как тестовые данные.

5. В любой данный день человек здоров или болен. Если чело век здоров сегодня, то вероятность того, что он будет здоров и завтра оценивается в 98%. Если человек сегодня болен, то завтра он будет здоров лишь в 30% случаев. Описать последовательность состояний здоровья как марковскую цепь. Определить вероятность того, что человек выздоровеет завтра, послезавтра и на третий день, если сегодня он болен; ожидаемое число дней, в течение которых больной на сегодняшний день человек

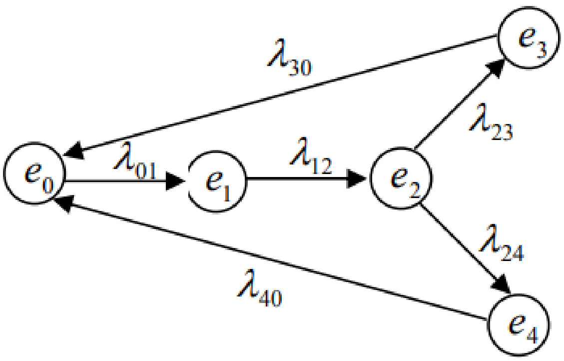
остается больным. В приложении желательно предусмотреть ввод исходных данных (матрица переходных вероятностей, вектор распределения вероятностей начального состояния), осуществлять проверку вводимых данных. Указанные значения использовать как тестовые данные.

6. В некотором городе никогда не бывает двух солнечных дней подряд. Если сегодня ясно, то завтра будет плохая погода – снег или дождь с равной вероятностью. Если сегодня дождь, то завтра погода изменится с вероятностью 0,5. Если она изменится, то в половине случаев будет ясно. Составить матрицу переходов за один шаг. Найти вероятность того, что послезавтра будет ясно, если сегодня ясно. Спрогнозировать погоду на две недели. В приложении желательно предусмотреть ввод исходных данных (матрица переходных вероятностей, вектор распределения вероятностей начального состояния), осуществлять проверку вводимых данных. Указанные значения использовать как тестовые данные.

7. Марковские случайные процессы с непрерывным временем.

Марковский процесс описывается графом, представленным на рисунке. Значения параметров λ_{ij} определяются пользователем. Найти распределение вероятностей состояний для любого момента времени и финальные вероятности состояний.

Выходные данные: система уравнений Колмогорова, распределение вероятностей состояний в момент времени t, финальные вероятности состояний. Входные данные – интенсивность переходов, вектор начальных вероятностей.



8. Рассматривается некоторое техническое устройство, которое может находиться в одном из трех состояний: работает, ожидает ремонта (не работает), ремонтируется. Процесс, описывающий состояние устройства, определяется как цепь Маркова. Известна матрица переходных вероятностей (задается пользователем). Задав точность ε, определить шаг, на котором вероятности состояний перестают изменяться (с точностью ε). Сравнить вероятности состояний на этом шаге с теоретическими предельными вероятностями. Входные данные: вектор

начальных вероятностей, матрица переходных вероятностей, ε. Выходные данные: предельные вероятности состояний; экспериментально найденные вероятности состояний в установившемся режиме; шаг, на котором вероятности состояний перестали изменяться.

9. Банк распределяет выдаваемые кредиты по четырем категориям: выплаченные (В), невыплаченные (Б), рискованные (Р), кредиты с благоприятным прогнозом (Х), у которых высока вероятность погашения. Известна матрица переходных вероятностей для квартала (считается, что за рассматриваемый цикл переходные вероятности не изменяются). Определить долю выплаченных и невыплаченных кредитов через n кварталов. Определить количество периодов, через которое не менее l (%) кредитов будет выплачено. Найти начальное распределение типов кредитов, при котором через k периодов не менее l (%) кредитов будет выплачено. Входные данные: матрица переходных вероятностей, вектор начальных вероятностей, количество рассматриваемых периодов (кварталов) n, количество периодов k, доля выплаченных кредитов l. Выходные данные: вероятности состояний через n шагов; количество периодов, через которое не менее l (%) кредитов будет выплачено; распределение кредитов для условия выплаты не менее l (%) кредитов через k периодов. Обязательна проверка вводимых данных.

Тестовые данные

Вектор распределения начальных вероятностей

$$\begin{array}{cccc} \text{Х} & \text{Р} & \text{В} & \text{Б} \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица переходных вероятностей

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} \text{Х} & \text{Р} & \text{В} & \text{Б} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Х} \\ \text{Р} \\ \text{В} \\ \text{Б} \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

10. Банк распределяет выдаваемые кредиты по четырем категориям: выплаченные (В), невыплаченные (Б), рискованные (Р), кредиты с благоприятным прогнозом (Х), у которых высока вероятность погашения. Матрица переходных вероятностей задается для квартала и может измениться в следующий период. Определить долю выплаченных и невыплаченных кредитов через n кварталов. Входные данные: матрица переходных вероятностей для каждого из рассматриваемых n кварталов, вектор начальных вероятностей, количество рассматриваемых периодов (кварталов) n. Выходные данные: вероятности состояний через n шагов при условии, что матрица переходных вероятностей будет неизменна в течение всего интервала моделирования; вероятности состояний через n

шагов при измененных матрицах переходных вероятностей. Обязательна проверка вводимых данных.

Тестовые данные

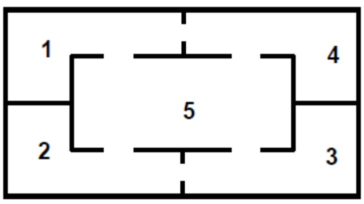
Вектор распределения начальных вероятностей

$$\begin{array}{cccc} X & Р & В & Б \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица переходных вероятностей для 1-го квартала

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} X & Р & В & Б \end{array} \\ \begin{array}{c} X \\ Р \\ В \\ Б \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

11. В лаборатории проводится эксперимент с мышами, которые перемещаются между отсеками контейнера (на рис.). Выбор любого отсека для выхода из текущего равновероятен. Перед началом эксперимента мышь может находиться в любом из отсеков с заданной вероятностью. Описать эксперимент как марковскую цепь. Нарисовать граф, сформировать матрицу переходных вероятностей. Найти вероятность того, что мышь, изначально находящаяся в первом отсеке, через два шага вернется в него же. Определить, на каком шаге вероятность обнаружить мышь в пятом отсеке станет больше заданного порогового значения. Входные данные: вектор распределения вероятностей начального состояния; пороговое значение для определения вероятности обнаружения мыши в пятом отсеке. Выходные данные: граф, матрица переходных состояний, вероятность возврата в начальное состояние (первый отсек)через два шага; шаг, на котором вероятность перехода в пятое состояние (отсек), больше заданной.



12. Устройство после года эксплуатации может находиться в одном из четырех состояний: в рабочем состоянии простаивает («П»); работает (лизинг – «Л»); ремонтируется («Р»); списано («С»). Процесс изменения состояний описан как цепь Маркова. Определить среднее количество лет использования оборудования (т.е. до момента перехода в состояние «списано»), если в начальный момент устройство работало исправно, ожидало заказов. Определить вероятность того, что в течение k лет подряд

оборудование будет в лизинге. Входные данные: вектор начальных вероятностей; матрица переходных вероятностей; параметр k; пороговое значение вероятности для состояния С (при необходимости). Выходные данные: срок использования устройства; вероятность непрерывного использования оборудования в течение k лет; граф. Пример матрицы переходных вероятностей:

$$\begin{array}{c} \\ \text{П} \\ \text{Л} \\ \text{Р} \\ \text{С} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{П} & \text{Л} & \text{Р} & \text{С} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

13. Два фехтовальщика обмениваются ударами. Первый попадает с вероятностью p_1, а пропускает удар – с вероятностью p_2. Рассматриваются следующие состояния цепи, описывающей процесс игры: оба участника не получили ранение; ранен первый спортсмен; ранен второй спортсмен; ранены оба фехтовальщика (ранение ведет к прекращению игры). Построить (рассчитать значения) матрицы переходных вероятностей, построить граф системы. Определить среднее количество раундов (обменов ударами), если первоначально оба участника без ранений. Входные данные: вектор начальных вероятностей; p_1, p_2. Выходные данные: количество раундов; матрица переходных вероятностей; граф.

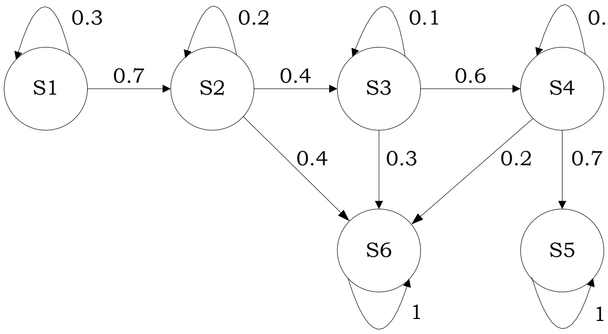
14. Студент выполняет задания, каждое из которых оценивается в k баллов. Вероятность успешного выполнения задания (получения k баллов) равна p. Студент сдает работы до тех пор, пока не наберет N баллов. Описать процесс как марковскую цепь с поглощающим состоянием. Построить матрицу переходных вероятностей. Определить среднее число работ, которые придется сдать студенту, чтобы получить N баллов. Определить, какое количество баллов будет набрано с d попыток. Входные данные: k, p, N, d. Выходные данные: матрица переходных вероятностей, граф, количество заданий для получения N баллов, количество баллов за d заданий. Тестовые данные: k=10, p=0.7, N=30, d=4.

15. Клиент отслеживает движение оформленного заказа. Возможные состояния: подготовлен к отгрузке продавцом (S1); находится в распределительном центре (S2); находится в сортировочном центре (S3); доставлен в пункт выдачи (S4). Ежедневный процесс движения заказа описан цепью Маркова. Пункт выдачи считается конечным состоянием. Известна матрица переходных вероятностей и вектор начальных вероятностей. Определить среднее количество дней до доставки заказа в пункт выдачи в зависимости от исходного состояния заказа (места нахождения). Найти вероятность того, что спустя k дней заказ все еще будет находиться у продавца.

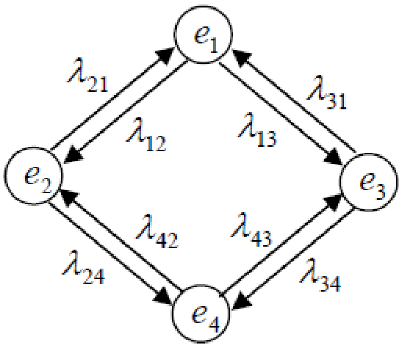
Пример матрицы переходных вероятностей

$$
\begin{array}{c}
\\
S1 \\
S2 \\
S3 \\
S4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} S1 & S2 & S3 & S4 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0,2 & 0,5 & 0,2 & 0,1 \\
0 & 0,5 & 0,3 & 0,2 \\
0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

16. Клиент банка подает заявку на получение кредита. Процесс оформления документов и проверок описывается как марковский процесс со следующими состояниями: S1 - оформление документов; S2 - анализ кредитной истории; S3 – оценка риска невозврата; S4 – оценка платежеспособности; По результатам проверки возможны два исхода: отказ в выдаче кредита (S6) и одобрение заявки (S5). Определить среднее время получения одобрения и отклонения заявки. Пример графа представлен на рисунке. Процесс всегда начинается со стадии оформления заявки. Входные данные: матрица переходных вероятностей. Выходные данные: среднее время получения одобрения заявки; среднее время отклонения заявки.



17. Рассматриваются два кофейных автомата, каждый из которых в любой момент может выйти из строя или потребовать загрузки продуктов. Время восстановления автомата – неизвестная случайная величина. Система может находиться в одном из четырех состояний: оба автомата работают (e_1); первый автомат работает, второй – не работает (e_3); первый автомат не работает, второй работает (e_2); оба автомата не работают (e_4). Известны интенсивности переходов. Выручка первого автомата в рабочем состоянии составляет a_1 руб. в единицу времени, выручка второго – a_2 руб.. Ремонт или обслуживание автомата требует затрат в размере r_1 и r_2 руб. соответственно. Найти предельные вероятности состояний. Рассчитать средний доход от работы каждого из автоматов в стационарном режиме. Пример графа представлен на рисунке. Входные данные: интенсивности переходов, выручка автоматов в единицу времени, затраты на обслуживание автоматов. Выходные данные: предельные вероятности состояний; доход от работы автоматов.



18. Курьер доставляет заказы в три района города: Центральный (Ц), Заельцовский (З) и Октябрьский (О). Маршрут формируется по ближайшему на текущий момент адресу. На основе анализа данных получены следующие соотношения: из Центрального района курьер с вероятностью 0,3 поедет в Заельцовский район и с вероятностью 0,5 останется в Центральном; после доставки в Октябрьский районе с вероятностью 0,6 курьер отправится в Центральный район, с вероятностью 0,2 – в Заельцовский; в 6 случаях из 10 курьер повторно отправится с заказом в Заельцовский районе, в двух случаях – поедет в Октябрьский. Определить вероятность того, что начав рабочий день в Центральном районе, курьер, спустя три заказа, в него вернется. Для каждого района в качестве начального определить вероятность возврата через k заказов. Входные данные: матрица переходных вероятностей; вектор начальных вероятностей; количество итераций (заказов) k. Выходные данные: вероятности состояний через k шагов.

Справочные материалы

Моделирование марковских случайных процессов.

http://stratum.ac.ru/education/textbooks/modelir/lection33.html

https://dep_vipm.pnzgu.ru/files/dep_vipm.pnzgu.ru/books/cherusheva_2021_teoria_masobsl.pdf