

## 实验 4-测量金属丝的切变模量

### 实验目的

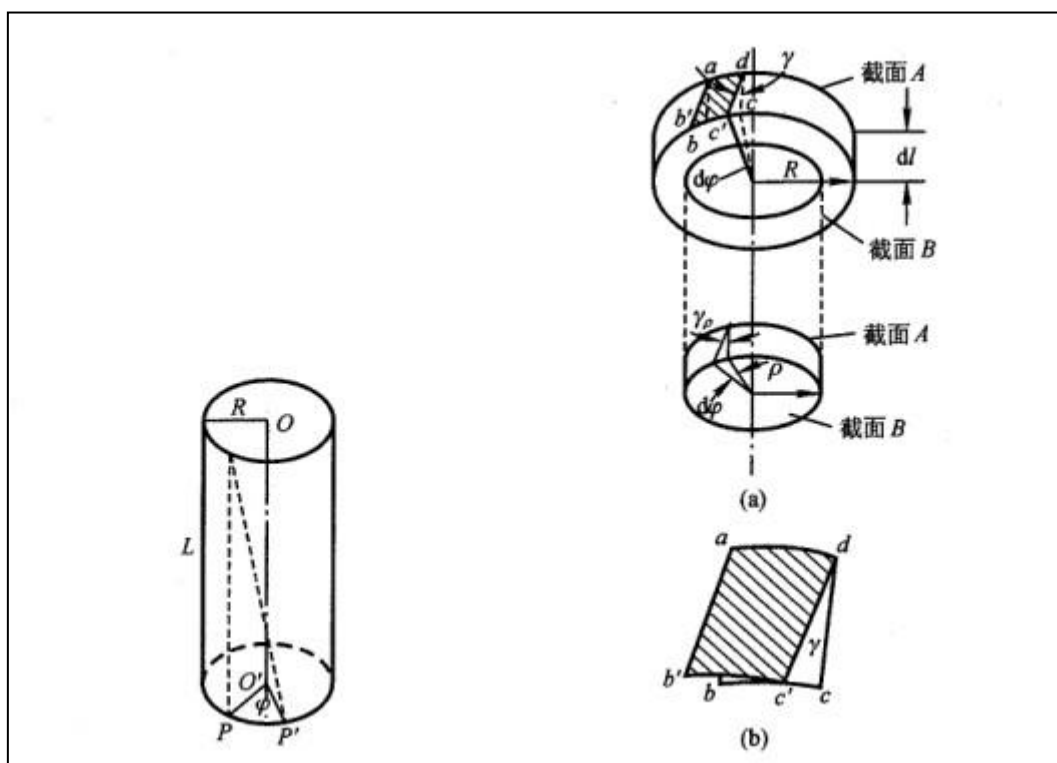
- 1.理解切变模量的物理意义及定义。
- 2.初步了解切变模量实验仪实验装置的工作原理。

### 实验原理

对于一根金属丝，其形状类似于一个圆柱体，长度为  $L$ 、半径为  $R$ 。固定一端，在材料弹性限度内，扭转另一端，则圆柱体各截面的体积元均发生切应变，其切应变  $\gamma$  与切应力  $\tau$  比值为常数：

$$\tau = G\gamma, \text{ 或 } G = \frac{\tau}{\gamma} \quad (1)$$

这个式子即为剪切胡克定律， $G$  即为材料的切变模量。



▲ 图 4.1 切变模量示意图

如图 4.1 所示，材料扭转时，材料底端的  $P$  点绕轴线旋转  $\varphi$  角至  $P'$  处；钢丝各处均发生转

# 实 验 报 告

评分:

少年班学院 系 20 级

学号 \*\*\*\*\*

姓名 \*\*\*\*\*

日期 2021-4-27

动, 单位长度的转角满足  $\frac{d\varphi}{dL} = \frac{\varphi}{L}$ . 分析这细圆柱中长为  $l$  的一小段, 其上截面为 A, 下截面为 B, 如图 4.1-(a) 所示. 发生切变时, 其下端 b 移动到 b', 其转角  $\gamma$  满足:

$$bb' = \gamma dl = R d\varphi \quad (2)$$

即切应变满足:

$$\gamma = R \frac{d\varphi}{dl} \quad (3)$$

这一小段钢丝内部离轴线距离为  $\rho$  的位置, 满足:

$$\gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dl} \quad (4)$$

此处的切应力为  $\tau_\rho \cdot \rho \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho = 2\pi G \rho^3 \frac{d\varphi}{dl} \cdot d\rho$ , 因此对其积分得到恢复力矩:

$$M = \int_0^R 2\pi G \rho^3 d\rho \cdot \frac{d\varphi}{dl} = \frac{\pi}{2} G R^4 \frac{d\varphi}{dl} = \frac{\pi}{2} G R^4 \frac{\varphi}{l} \quad (5)$$

$$\text{因此有切变模量 } G = \frac{2DL}{\pi R^4} \quad (6)$$

设摆的转动惯量为  $I_0$ , 由转动定律  $M = I_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$  并带入公式⑤⑥得  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{D}{I_0} \varphi = 0$ , 因此其

$$\text{周期满足 } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{D}}$$

由于扭摆底盘形状不规则, 因此可以通过尝试增加一个形状规则的辅助物体来间接得出圆盘的转动惯量, 比如一个圆环。一个内外径分别为  $r_{\text{内}}$  和  $r_{\text{外}}$ 、两圆同心、质量为  $m$  且均匀分布的圆环柱体, 其转动惯量为  $I_1 = \frac{1}{2} m(r_{\text{内}}^2 + r_{\text{外}}^2)$ , 因此, 如果将该圆环中心与托盘中心对齐,

则其转动惯量之和为  $I_0 + I_1$ , 因此可以测出另一组周期  $T_1$ , 其满足  $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I_1}{D}}$ , 因此可以得到

$$D = \frac{4\pi^2}{T_0^2} I_0 = 4\pi^2 \frac{I_1}{T_1^2 - T_0^2} = \frac{2\pi^2 m(r_{\text{内}}^2 + r_{\text{外}}^2)}{T_1^2 - T_0^2} \quad (7)$$

$$G = \frac{4\pi L m(r_{\text{内}}^2 + r_{\text{外}}^2)}{R^4 (T_1^2 - T_0^2)} \quad (8)$$

从而得到实验结果。

## 实验器材

切变模量实验仪器一套 (铁架台, 固定装置, 金属丝, 托盘, 金属圆环), 电子秒表。

# 实 验 报 告

评分:

少年班学院 系 20 级

学号 \*\*\*\*\*

姓名 \*\*\*\*\*

日期 2021-4-27

## 实验设计

为使实验结果误差在本实验的精度要求内，需要对实验进行设计以减小误差。本实验中，由于时间的测量设计人的反应速度问题，将导致测量误差较大，具体应为 $\Delta_{\lambda}=0.2s$ ，为了减少时间误差，需要测量多个周期的时间。为了求得实验所需的周期数目，在正式实验开始前，进行实验设计如下：

1.对理论公式进行分析：

由  $G = \frac{4\pi Lm(r_{\text{内}}^2 + r_{\text{外}}^2)}{R^4(T_1^2 - T_0^2)}$  知，各测量项的误差导致的误差关系为：

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{4\Delta R}{R} + \frac{2(r_{\text{内}}\Delta r_{\text{内}} + r_{\text{外}}\Delta r_{\text{外}})}{r_{\text{内}}^2 + r_{\text{外}}^2} + \frac{2(T_0\Delta T_0 + T_1\Delta T_1)}{T_0^2 - T_1^2} \quad (9)$$

由于钢丝和金属环的半径  $R$  和  $r_{\text{内}}$ 、 $r_{\text{外}}$  难以直接测量，因此采取测量直径的方法，误差公式转化为

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{4\Delta D}{D} + \frac{2(d_{\text{内}}\Delta d_{\text{内}} + d_{\text{外}}\Delta d_{\text{外}})}{d_{\text{内}}^2 + d_{\text{外}}^2} + \frac{2(T_0\Delta T_0 + T_1\Delta T_1)}{T_0^2 - T_1^2} \quad (10)$$

因此，根据粗测计算出各项的误差，选取主要误差后，可以计算出 $\Delta T_0$ 和 $\Delta T_1$ 的最大值，再按照 $\Delta_{\lambda}=0.2s$  带入可以计算出所需要测量的最小周期数。

粗测的结果如下：

测量项目	测量工具	仪器误差	相对误差
D=0.78mm	螺旋测微器	$\Delta D=0.004\text{mm}$	$4\Delta D/D=2\times 10^{-2}$
m=564.5g	标签标注	$\Delta m=0.2\text{g}$	$\Delta m/m=3.5\times 10^{-4}$
L=40.5cm	1m 钢卷尺	$\Delta L=0.8\text{mm}$	$\Delta L/L=1.9\times 10^{-3}$
d 内=83mm	游标卡尺	$\Delta d=0.05\text{mm}$	$\frac{2(d_{\text{内}}\Delta d_{\text{内}} + d_{\text{外}}\Delta d_{\text{外}})}{d_{\text{内}}^2 + d_{\text{外}}^2} = 1.1\times 10^{-3}$
d 外=104mm			

显然，主要误差为  $4\Delta D/D$ ，根据实验要求有

$$\frac{2T_0\Delta T_0}{T_0^2 - T_1^2} \leq \frac{1}{5} \cdot \frac{4\Delta D}{D} = 4\times 10^{-3}, \quad \frac{2T_1\Delta T_1}{T_0^2 - T_1^2} \leq \frac{1}{5} \cdot \frac{4\Delta D}{D} = 4\times 10^{-3} \quad (11)$$

粗略测量其转动周期为  $T_0=2.2s$ ， $T_1=3.8s$ ，因此得最小测量周期数

$$n_1 \geq \frac{\Delta t}{\Delta T_1} = 24, \quad n_2 \geq \frac{\Delta t}{\Delta T_2} = 40$$

# 实 验 报 告

评分:

少年班学院 系 20 级

学号 \*\*\*\*\*

姓名 \*\*\*\*\*

日期 2021-4-27

因此，对于每一组时间  $t$ ，测量 50 次即可达到精度要求。

## 实验步骤

### 一、调节仪器

调节仪器至平衡，使得其可以平稳地转动，产生回复力矩。

### 二、测量

1. 测量实验器材的基本属性。使用螺旋测微器测量金属丝直径，使用游标卡尺测量金属环的内外直径，使用钢卷尺测量金属丝的长度。由于金属丝直径为主要误差，因此应该测量 10 组数据；对区域金属环内外直径和金属丝长度，可以测量 6 组数据。对于圆环的质量，通过标签直接读数可以得出。

2. 对于时间的测量。首先在底盘上用粉笔进行标记，释放底盘至其平衡，用标志物对齐标记，那么转动后，当标记与标志物对齐时，体系到达平衡状态。测量时，首先不在底盘上放置圆环，转动一个合适的角度，松手后保持其无左右上下摆动、只有转动，测量其转动 50 周期所用的时间，测量 4 次；放置圆环，将圆环中心与底盘中心对齐，同样方法再次测量 4 次，得到需要测量的时间。

### 三、整理器材，结束实验。

## 数据记录

原始数据记录在数据记录纸上。以下为实验数据：

1. 金属丝的直径测量。螺旋测微器初始读数为  $x_0 = -0.005\text{mm}$ ；每次读数记录如下：

次数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
读数	0.760	0.761	0.760	0.764	0.766	0.766	0.767	0.765	0.762	0.766
D/mm	0.765	0.766	0.765	0.769	0.771	0.771	0.772	0.770	0.767	0.771

2. 金属丝的长度  $L$ ，使用量程为 1m 的钢卷尺的测量结果如下：

次数	1	2	3	4	5	6
L/cm	40.50	40.48	40.49	40.47	40.49	40.47

3. 圆环的质量  $m$ ，通过标签知其质量为 564.5g（3 号盘，与桌子上的序号（4）、组内编号（4）不一致），且误差  $\Delta m = 0.2\text{g}$ ；

# 实 验 报 告

评分:

少年班学院 系 20 级

学号 \*\*\*\*\*

姓名 \*\*\*\*\*

日期 2021-4-27

4.圆环内外径的测量，使用游标卡尺，初始读数为 0.000cm:

次数	1	2	3	4	5	6
$r_{\text{内}}/\text{cm}$	8.400	8.378	8.370	8.392	8.402	8.388
$r_{\text{外}}/\text{cm}$	10.400	10.402	10.402	10.398	10.396	10.400

5.两种不同转动情况的 50 次周期用时测量

次数	1	2	3	4
$t_0/\text{s}$	107.54	107.71	107.67	107.60
$t_1/\text{s}$	179.59	179.75	179.74	179.70

## 数据处理

1.金属丝的直径 D 与半径 R

$$\text{平均值: } \bar{D} = \frac{\sum D_i}{10} = 0.7687\text{mm}$$

$$\text{标准差: } \sigma = \sqrt{\frac{\sum (D_i - \bar{D})^2}{10-1}} = 0.0027\text{mm}$$

$$\text{A 类不确定度: } u_A = \frac{\sigma}{\sqrt{10}} = 0.0009\text{cm}$$

$$\text{B 类不确定度: } u_B = \Delta_B / C = 0.0013\text{mm}$$

$$\text{合成展伸不确定度为 } U_{0.997} = \sqrt{(t_p u_A)^2 + u_B^2} = 0.0044\text{mm}$$

$$\text{即 } D = (0.7687 \pm 0.0044)\text{mm} (P = 0.997)$$

$$\text{也即 } R = (0.3844 \pm 0.0022)\text{mm} (P = 0.997)$$

2.金属丝的初始长度 L

$$\text{平均值: } \bar{L} = \frac{\sum L_i}{6} = 40.48\text{cm}$$

$$\text{标准差: } \sigma = \sqrt{\frac{\sum (L_i - \bar{L})^2}{6-1}} = 0.012\text{cm}$$

$$\text{A 类不确定度: } u_A = \frac{\sigma}{\sqrt{6}} = 0.005\text{cm}$$

# 实 验 报 告

评分:

少年班学院 系 20 级

学号 \*\*\*\*\*

姓名 \*\*\*\*\*

日期 2021-4-27

B 类不确定度:  $u_B = \Delta_B / C = 0.027cm$

合成展伸不确定度为  $U_{0.997} = \sqrt{(t_p u_A)^2 + u_B^2} = 0.033cm$

即  $L = (40.48 \pm 0.07)cm (P = 0.997)$

3.金属环的内外径  $r_{内}$  与  $r_{外}$

平均值:  $\bar{D}_{内} = \frac{\sum D_{内i}}{6} = 8.388cm$ ,  $\bar{D}_{外} = \frac{\sum D_{外i}}{6} = 10.400cm$

标准差:  $\sigma_{内} = \sqrt{\frac{\sum (D_{内i} - \bar{D}_{内})^2}{6-1}} = 0.012cm$ ,  $\sigma_{外} = \sqrt{\frac{\sum (D_{外i} - \bar{D}_{外})^2}{6-1}} = 0.002cm$

A 类不确定度:  $u_{内A} = \frac{\sigma_{内}}{\sqrt{6}} = 0.005cm$ ,  $u_{外A} = \frac{\sigma_{外}}{\sqrt{6}} = 0.001cm$

B 类不确定度:  $u_{内B} = u_{外B} = \Delta_B / C = 0.0028cm$

合成展伸不确定度为  $U_{内0.997} = \sqrt{(t_p u_{内A})^2 + u_{内B}^2} = 0.021cm$ ,

$U_{外0.997} = \sqrt{(t_p u_{外A})^2 + u_{外B}^2} = 0.008cm$

即  $D_{内} = (8.388 \pm 0.021)cm (P = 0.997)$ ,  $D_{外} = (10.400 \pm 0.008)cm (P = 0.997)$

也即  $r_{内} = (4.199 \pm 0.011)cm (P = 0.997)$ ,  $r_{外} = (5.200 \pm 0.004)cm (P = 0.997)$

4.转动的周期  $T_0$  和  $T_1$

首先计算转动 50 个周期的用时:

平均值:  $\bar{t}_0 = \frac{\sum t_{0i}}{4} = 107.63s$ ,  $\bar{t}_1 = \frac{\sum t_{1i}}{4} = 179.695s$

标准差:  $\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum (t_{0i} - \bar{t}_0)^2}{4-1}} = 0.075s$ ,  $\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum (t_{1i} - \bar{t}_1)^2}{4-1}} = 0.073s$

A 类不确定度:  $u_{0A} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{4}} = 0.038s$ ,  $u_{1A} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{4}} = 0.037s$

B 类不确定度:  $u_{B0} = u_{B1} = \Delta_B / C = 0.067s$

合成展伸不确定度为  $U_{0-0.997} = \sqrt{(t_p u_{0A})^2 + u_{B0}^2} = 0.279s$ ,  $U_{1-0.997} = \sqrt{(t_p u_{1A})^2 + u_{B1}^2} = 0.274s$

即  $t_0 = (107.63 \pm 0.279)s (P = 0.997)$ ,  $t_1 = (179.695 \pm 0.274)s (P = 0.997)$

也即  $T_0 = (2.1526 \pm 0.0056)s (P = 0.997)$ ,  $T_1 = (3.5939 \pm 0.0055)s (P = 0.997)$

# 实 验 报 告

评分:

少年班学院 系 20 级

学号 \*\*\*\*\*

姓名 \*\*\*\*\*

日期 2021-4-27

## 5.结果的计算

上述计算得到各物理量大小为

$$R = (0.3844 \pm 0.0022)mm(P = 0.997)$$

$$L = (40.48 \pm 0.07)cm(P = 0.997)$$

$m = (564.5 \pm 0.2)g$ ，由测量仪器误差，可与  $P=0.997$  各组数据一同计算。

$$r_{\text{内}} = (4.199 \pm 0.011)cm(P = 0.997), \quad r_{\text{外}} = (5.200 \pm 0.004)cm(P = 0.997)$$

$$T_0 = (2.1526 \pm 0.0056)s(P = 0.997), \quad T_1 = (3.5939 \pm 0.0055)s(P = 0.997)$$

$$\text{代入等式⑦⑧: } G = \frac{4\pi Lm(r_{\text{内}}^2 + r_{\text{外}}^2)}{R^4(T_1^2 - T_0^2)}, \quad D = \frac{2\pi^2 m(r_{\text{内}}^2 + r_{\text{外}}^2)}{T_1^2 - T_0^2}$$

$$\text{及 } \frac{\Delta G}{G} = \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{4\Delta R}{R}\right)^2 + \frac{(2r_{\text{内}}\Delta r_{\text{内}})^2 + (2r_{\text{外}}\Delta r_{\text{外}})^2}{(r_{\text{内}}^2 + r_{\text{外}}^2)^2} + \frac{(2T_0\Delta T_0)^2 + (2T_1\Delta T_1)^2}{(T_0^2 - T_1^2)^2}}$$

$$\text{和 } \frac{\Delta D}{D} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \frac{(2r_{\text{内}}\Delta r_{\text{内}})^2 + (2r_{\text{外}}\Delta r_{\text{外}})^2}{(r_{\text{内}}^2 + r_{\text{外}}^2)^2} + \frac{(2T_0\Delta T_0)^2 + (2T_1\Delta T_1)^2}{(T_0^2 - T_1^2)^2}}$$

得到  $G=7.093 \times 10^{10}Pa$ ,  $D=6.010 \times 10^{-3}N \cdot m$

带入数值后，得到  $\frac{\Delta G}{G} = 0.028$ ,  $\frac{\Delta D}{D} = 0.006$

因此  $\Delta G=0.2 \times 10^{10}Pa$ ,  $\Delta D=0.04 \times 10^{-3}N \cdot m$

综上，金属丝切变模量的实验测量结果为

$$\text{切变模量: } G = (7.1 \pm 0.2) \times 10^{10} Pa(P = 0.997) \quad ⑫$$

$$\text{扭转模量: } D = (6.01 \pm 0.04) \times 10^{-3} N \cdot m(P = 0.997) \quad ⑬$$

**误差分析:** 测量时会有误差，尤其是测量金属丝直径引发的主要误差；由于圆盘上有夹具，导致难以对金属丝长度进行较为精确的测量，对读数带来困难；扭动时底盘可能不水平，都会导致实验时扭摆无法只在水平平面摆动；扭摆的扭动角较难把握使其 $\gamma < 1$ ，都会导致实验误差。

## 思考题

1. 本实验是否满足  $\gamma < 1$  的条件？

答：根据讲义，由剪切胡克定律  $\tau = G\gamma$ ，要求在弹性限度内可以取得较好的实验结果。

因此，需要满足  $\gamma < 1$ ，方可使误差较小，从而在这一步不使实验失败。 $\gamma$  的计算公式为：

# 实 验 报 告

评分:

少年班学院 系 20 级

学号 \*\*\*\*\*

姓名 \*\*\*\*\*

日期 2021-4-27

$$\gamma = R \frac{d\varphi}{dL} \quad (14)$$

由于其均匀形变，因此

$$\gamma = R \frac{\varphi}{L} \quad (15)$$

在实际实验中，转动的角度  $\varphi < \pi$ ，带入 R 和 L 的数据，得  $\gamma < 2.98 \times 10^{-3}$

实际操作中，转角更小，因此我觉得可以满足  $\gamma \ll 1$  的条件。

2. 为提高测量精度，本实验在设计上作了哪些安排？在具体测量时又要注意什么？

答：为提高实验精度，首要的就是减小主要误差。本实验通过仪器的最大允差，结合粗测数据，从而选择了合适的仪器，并确定了金属丝的半（直）径的误差为实验的主要误差。因此，对于其他物理量，测量 4~6 组即可；对于金属丝的直径则测量了十组以减小误差。考虑到时间测量问题，需要根据要求，测量多个周期的总用时，从而减小这一项的实验误差。合成以后，本实验的实验误差就可以降低，实际在  $P=0.997$  的置信概率下， $\Delta G/G$  为 2.8%，在一定程度上符合实验精度要求。具体测量时，要注意选择合适的仪器和测量方法，比如金属丝的长度难以测量；同时，扭摆在转动的时候要选择合适的角度、合适的标记以减小误差；减小摆的左右摇晃、上下翻动等方式，保证摆位置不变，且只发生转动，同样可以提高测量精度。

## 实验小结

这个实验的实验过程不难，但是实验数据的处理比较麻烦。从结果来看，实验比较成功，在一定精度上测量了金属的切变模量。