『論理哲学論考』の量化表現の構成可能性について
補遺

若山和宏

2025年12月30日

補遺の目的

- 本論文『『論理哲学論考』の量化表現の構成可能性について』の内容を簡単に説明する.

表記について

- 現代の標準的な論理学では, 「真理関数」は真理値の関数を指す.
- 『論理哲学論考』の「真理関数」は, 関数そのものではなく, 関数による式を指す.
- 本論文はこの「真理関数」という語を用いず, 「論理式」と表記する.
- **太字**の表記は, 奥 (1975) による『論理哲学論考』の日本語訳を引用して, 一部を改変したものである.

研究対象の経緯

- **5.32 全ての論理式は、要素命題に対する有限個の真理操作の継続的な適用の結果である。**

- 先行研究では, この記述によって, $\mathrm{N}(\mathrm{N}(\varphi_1), \mathrm{N}(\varphi_2), \ldots)$という論理式が構成できないと考えられた.

- その理由は「Nが無限回適用されているから」である.

操作の継続的な適用とは？ (1)

$$
\begin{array}{cccc}
p_1 & O(p_1) & O(O(p_1)) & \cdots \\
p_2 & O(p_2) & O(O(p_2)) & \cdots \\
p_3 & O(p_3) & O(O(p_3)) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

操作Oの継続的な適用

継続的な適用ではない

操作の継続的な適用とは？ (2)

- $s_{(O,n)}(a) = a \quad (n = 0)$,
- $s_{(O,n)}(a) = O(s_{(O,n-1)}(a)) \quad (n = 1,2,\ldots)$.
- このとき, $s_{(O,n)}(a) = \overbrace{O(\cdots O(O(a))\cdots)}^{n}$ は, aに対するOのn重の継続的な適用の結果である.

操作の継続的な適用とは？ (3)

- **5.2521 操作をそれ自身の結果に繰り返し適用することを, 操作の継続的な適用という. たとえば, $O(O(O(a)))$はaに対するOの3重の継続的適用の結果である. 同じような意味で, 複数の命題に対する複数の操作の継続的な適用について言及する.**

- **5.2522 そこで、$a, O(a), O(O(a)), \ldots$という形式的系列の一般項を、私は"$[a, x, O(x)]$"と書くことにする。この括弧づきの表現は変項である。括弧づきの表現の最初の項は形式的系列の初項であり、第二項は系列の任意の項xの形式であり、第三項はxに直接続く系列の項の形式である。**

形式列

- 操作の継続的な適用の結果を順番に並べた列を形式列という. (記述5.2522)
- $\left[a, x, O(x)\right] = (a, O(a), O(O(a)), \ldots) = (s_{(O,n)}(a))_{n\in\mathbb{N}}$.
- 「論理式の一般的な形式」$\left[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})\right]$は形式列の拡張概念である. (後述)

記述5.32の解釈

- 記述5.32は次のように言い換えられる.
- すべての論理式φについて, あるp, O, nがあって, $\varphi = s_{(O,n)}(p)$.
- すべての論理式φについて, あるkがあって, φはある形式列の第k項である.
- ただし, 記述5.2521, 5.2522, 5.32は1変数の論理式を前提にした説明である.

論理式の一般的な形式

- 論理式の一般的な形式$\left[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})\right]$は論理式の集合の列である.
- $\left[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})\right] = \left(W_0, W_1, W_2, \ldots\right)$.
- ある$n \in \mathbb{N}$があって, $\varphi \in W_n \iff$「φは要素命題に対するNの継続的な適用の結果である」$\iff \varphi$は『論理哲学論考』で構成可能である.

$\left[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})\right]$の構成要素

$$
\begin{array}{cccc}
p_1 & \mathrm{N}(p_1) & \mathrm{N}(\mathrm{N}(p_1)) & \cdots \\
p_2 & \mathrm{N}(p_2) & \mathrm{N}(p_1, \mathrm{N}(p_2)) & \cdots \\
p_3 & \mathrm{N}(p_1, p_2) & \mathrm{N}(\mathrm{N}(p_1), \mathrm{N}(p_2), \mathrm{N}(p_3), \dots) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
\cap & \cap & \cap & \\
W_0 & W_1 & W_2 & \cdots
\end{array}
$$

有限性とは？

- ある$n \in \mathbb{N}$があって, $\varphi \in W_n$
- $\iff$「φは要素命題に対するNの継続的な適用の結果である」
- $\iff$「φは要素命題に対する有限個のNの継続的な適用の結果である」
- W_nは$\left[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})\right] = \left(W_0, W_1, W_2, \ldots\right)$の$n+1$番目の項である.

類別された論理式の一般的な形式

- $\left[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})\right] = \left(W_0, W_1, W_2, \ldots\right)$.
- このとき, $W_1 \subset W_2 \subset W_3 \subset \cdots$.
- W_nから重複を取り除いた類別版$\left(L_0, L_1, L_2, \ldots\right)$を作る.

論理式の継続的な長さ

- $\varphi \in L_n \iff$「論理式φが継続的な長さnを持つ」$\iff$「φは要素命題に対する真理操作のn重の継続的な適用の結果である」

- ある$n \in \mathbb{N}$があって, $\varphi \in L_n \iff$ ある$n \in \mathbb{N}$があって, $\varphi \in W_n$.

操作の適用回数とは？

- 「論理式φはNを有限回適用することで得られる」$\iff$「φは有限個の複合式によって構成される」
- 「論理式φは有限個のNの継続的な適用の結果である」$\iff$「ある$n \in \mathbb{N}$があって, $\varphi \in W_n$」
- これらは等しい主張ではない.

真理操作Nによる量化表現 (1)

- Xを論理式の集合とする. ψの真理値$v(\psi) \in \{0,1\}$を次のように定める.
- $v(\acute{\bigwedge}(X)) = 1 \overset{def}{\iff} \forall \varphi \in X \left[v(\varphi) = 1 \right].$
- $v(\acute{\bigvee}(X)) = 1 \overset{def}{\iff} \exists \varphi \in X \left[v(\varphi) = 1 \right].$
- $v(\mathrm{N}(X)) = 1 \overset{def}{\iff} \forall \varphi \in X \left[v(\varphi) = 0 \right].$

真理操作Nによる量化表現 (2)

- $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \acute{\wedge} \, (\acute{\wedge} \, (P(x_1, y_1), P(x_1, y_2), \ldots), \acute{\wedge} \, (P(x_2, y_1), P(x_2, y_2), \ldots), \ldots)$
- $\forall x \exists y P(x, y) \equiv \acute{\wedge} \, (\acute{\vee} \, (P(x_1, y_1), P(x_1, y_2), \ldots), \acute{\vee} \, (P(x_2, y_1), P(x_2, y_2), \ldots), \ldots)$
- $\exists x \forall y P(x, y) \equiv \acute{\vee} \, (\acute{\wedge} \, (P(x_1, y_1), P(x_1, y_2), \ldots), \acute{\wedge} \, (P(x_2, y_1), P(x_2, y_2), \ldots), \ldots)$
- $\exists x \exists y P(x, y) \equiv \acute{\vee} \, (\acute{\vee} \, (P(x_1, y_1), P(x_1, y_2), \ldots), \acute{\vee} \, (P(x_2, y_1), P(x_2, y_2), \ldots), \ldots)$

真理操作Nによる量化表現 (3)

- $\cdots \equiv \mathrm{N}(\mathrm{N}(\mathrm{N}(\mathrm{N}(P(x_1, y_1)), \mathrm{N}(P(x_1, y_2)), \ldots)), \mathrm{N}(\mathrm{N}(\mathrm{N}(P(x_2, y_1)), \mathrm{N}(P(x_2, y_2)), \ldots)), \ldots)\,.$
- $\cdots \equiv \mathrm{N}(\mathrm{N}(\mathrm{N}(\mathrm{N}(P(x_1, y_1), P(x_1, y_2), \ldots))), \mathrm{N}(\mathrm{N}(\mathrm{N}(P(x_2, y_1), P(x_2, y_2), \ldots))), \ldots)$
- $\equiv \mathrm{N}(\mathrm{N}(P(x_1, y_1), P(x_1, y_2), \ldots), \mathrm{N}(P(x_2, y_1), P(x_2, y_2), \ldots), \ldots)\,.$
- $\cdots \equiv \mathrm{N}(\mathrm{N}(\mathrm{N}(\mathrm{N}(P(x_1, y_1)), \mathrm{N}(P(x_1, y_2)), \ldots), \mathrm{N}(\mathrm{N}(P(x_2, y_1)), \mathrm{N}(P(x_2, y_2)), \ldots), \ldots))\,.$
- $\cdots \equiv \mathrm{N}(\mathrm{N}(\mathrm{N}(\mathrm{N}(P(x_1, y_1), P(x_1, y_2), \ldots)), \mathrm{N}(\mathrm{N}(P(x_2, y_1), P(x_2, y_2), \ldots)), \ldots))\,.$

双方向の量化表現

- 真理操作Nで量化を表現できるのなら, 量化で真理操作Nを表現できるのでは？
- 新しい量化子Nを作る.

量化子Nによる量化表現 (1)

- 一階述語論理のモデル$\mathscr{M}$, 変数の割り当てgが与えられたとする.
- 量化子Nの解釈は, $[\mathrm{N}x\varphi]_{\mathscr{M},g} = 1 \overset{\text{def}}{\iff} \forall d \in D_{\mathscr{M}} \left[[\varphi]_{\mathscr{M},g[x \mapsto d]} = 0 \right]$.
- すなわち, $[\mathrm{N}x\varphi]_{\mathscr{M},g} = [\forall x \neg \varphi]_{\mathscr{M},g}$.
- 言い換えれば, $\mathscr{M}, g \vDash \mathrm{N}x\varphi \overset{\text{def}}{\iff} \forall d \in D_{\mathscr{M}} \left[\mathscr{M}, g\left[x \mapsto d\right] \nvDash \varphi \right]$.

量化子Nによる量化表現 (2)

- FV(φ)をφの自由変数全体の集合とする. $\delta \notin$ FV(φ)のとき, $\mathrm{N}\delta\varphi \equiv \neg\varphi$.
- $\forall x \forall y \varphi \equiv \mathrm{N}x\mathrm{N}\delta\mathrm{N}y\mathrm{N}\delta\varphi$
- $\forall x \exists y \varphi \equiv \mathrm{N}x\mathrm{N}\delta\mathrm{N}\delta\mathrm{N}y\varphi \equiv \mathrm{N}x\mathrm{N}y\varphi$
- $\exists x \forall y \varphi \equiv \mathrm{N}\delta\mathrm{N}x\mathrm{N}y\mathrm{N}\delta\varphi$
- $\exists x \exists y \varphi \equiv \mathrm{N}\delta\mathrm{N}x\mathrm{N}\delta\mathrm{N}y\varphi$

$\mathrm{N}(\overline{\xi})$で構成不可能な論理式

- 継続的な長さ$n \in \mathbb{N}$を持たない論理式
- (e.g.) $\cdots\neg\neg\neg p,\ \cdots\mathrm{N}(\mathrm{N}(\mathrm{N}(X))),\ \mathrm{N}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n)$
- 対称式でない論理式
- (e.g.) $\varphi \to \psi$

論文のトピック (1)

- 『論理哲学論考』の記述5.32を厳密に読み解く. (第3節)
- 「操作の継続的な適用の結果」という概念に厳密な定義を与える. (第3節)
- 「$\mathrm{N}(\mathrm{N}(\varphi_1), \mathrm{N}(\varphi_2), \ldots)$という形の論理式が記述5.32によって構成不可能である」という先行研究の主張に反論を与える. (第3, 4節)
- 論理式の一般的な形式$\left[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})\right]$を厳密に再定義する. (第3, 6節)

論文のトピック (2)

- 「論理式の継続的な長さ」という概念を用いて論理式の構成可能性の条件を与える. (第5, 6節)
- 真理操作Nを用いて量化表現を構成する. (第7節)
- 「真理操作Nで量化を表現する」の逆方向「量化子Nで真理操作Nを表現する」を行う. (第7節)
- 『論理哲学論考』で構成不可能な論理式を作る. (第8節)

論文のトピック (3)

- 「操作の適用回数」という概念の曖昧さを指摘する. (第4節)
- 「真理操作Nの項の個数は有限である」, 「要素命題の個数は有限である」という主張に反論を与える. (第4節)

読書案内

- 本論文は, ルートヴィヒ・ウィトゲンシュタイン著の『論理哲学論考』に関する研究である. はじめて『論理哲学論考』を読む方には, 野矢茂樹氏による『ウィトゲンシュタイン『論理哲学論考』を読む』が参考になるだろう. また, 同著の第9章「命題の構成可能性と無限」では, 本論文が扱う問題について述べられている.

参考文献

- 奥雅博『ウィトゲンシュタイン全集１』. 大修館書店. 1975.
- 野矢茂樹『ウィトゲンシュタイン『論理哲学論考』を読む』. 筑摩書房. 2006.
- 若山和宏『『論理哲学論考』の量化表現の構成可能性について』. 2025. (Available at: https://k-wakayama-gh.github.io/research/)