『論理哲学論考』の量化表現の構成可能性について

若山和宏

2025 年 12 月 25 日

概要

『論理哲学論考』には, 5.32 という番号が付けられた記述がある. 過去の複数の研究によって, この記述 5.32 により,『論理哲学論考』では特定の論理式を構成することが不可能であると考えられた. 本稿の目的は, 構成不可能と考えられていた論理式の構成可能性を示し, その条件を明確にすることである. 本稿はその過程で,「操作の継続的な適用の結果」という概念について考察する.

1 準備

はじめに, 量化表現について簡単に説明する. 量化表現は,「すべての x について $P(x)$」や「少なくともひとつの x について $P(x)$」のような意味に解釈される文である.『論理哲学論考』では, 量化は論理演算の拡張として考えられた. 一般に, 量化の変数の値が有限であれば, 量化は特定の論理演算と等価な概念であり, どちらも有限の手順で記述することができる. たとえば, 変数の割り当て $[x \mapsto x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ によって, 全称量化と論理積は次のようにして同一視することができる.

$$\forall x P(x) \;\equiv\; P(x_1) \wedge \cdots \wedge P(x_n).$$

同様にして, 存在量化は論理和と同一視することができる.『論理哲学論考』では, 否定論理和を拡張させた真理操作 N が考えられた[*1].

$$\mathrm{N}xP(x) \;\equiv\; \mathrm{N}(P(x_1), \ldots, P(x_n)) \;\equiv\; \neg P(x_1) \wedge \cdots \wedge \neg P(x_n).$$

ここで, 述語論理式の構造から離れて, 単純な命題記号で表される論理式について考える.

$$\mathrm{N}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \;\equiv\; \neg\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \neg\varphi_n.$$

次に, 真理操作の項が有限でない論理式, すなわち, $\mathrm{N}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ のような論理式を考える. これを有限の手順で記述できるように, メタ言語で量化の概念を用いて次のように定義する.

[*1] 左辺の $\mathrm{N}xP(x)$ は『論理哲学論考』から引用されたものではない.

定義 1. Atom を要素命題[*2]と呼ばれる記号全体の集合とする．$n = 0, 1, \ldots$ について, 論理式の集合 Form_n を次のように帰納的に定義する．

$$\begin{aligned}\mathrm{Form}_0 &= \mathrm{Atom},\\ \mathrm{Form}_{n+1} &= \left\{ \acute{\wedge}(X), \acute{\vee}(X), \mathrm{N}(X) \;\middle|\; X \subseteq \bigcup\nolimits_{k \leq n} \mathrm{Form}_k,\ X \neq \emptyset \right\}.\end{aligned}$$

このとき,

$$\mathrm{Form} = \bigcup\nolimits_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Form}_n$$

と定める．このとき, Form の要素を量化表現といい, これも論理式として扱う[*3][*4]．

具体的には, $\mathrm{N}(\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\})$ のような論理式が Form の要素である．$F = \acute{\wedge}, \acute{\vee}, \mathrm{N}$ について, $F(\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\})$ を省略して $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ と書く．

定義 2. $\psi \in \mathrm{Form}$ の真理値 $v(\psi) \in \{0, 1\}$ を次のようにして定める．

$$v\left(\acute{\wedge}(X)\right) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \forall\varphi \in X\,[\,v(\varphi) = 1\,], \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$v\left(\acute{\vee}(X)\right) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \exists\varphi \in X\,[\,v(\varphi) = 1\,], \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$v\left(\mathrm{N}(X)\right) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \forall\varphi \in X\,[\,v(\varphi) = 0\,], \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

このとき, 真理値 1 は真, 0 は偽であることを表していると解釈する．

標準的な論理学では, 否定論理和を用いて他の論理演算を定義することができる．同様に, 真理操作 N 用いて $\acute{\wedge}, \acute{\vee}$ を定義することができる．たとえば, $\acute{\wedge}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ は次のようにして表すことができる．

$$\acute{\wedge}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots) \;\equiv\; \mathrm{N}(\mathrm{N}(\varphi_1), \mathrm{N}(\varphi_2), \ldots).$$

同様にして, $\acute{\wedge}(\acute{\vee}(\varphi_{(1,1)}, \varphi_{(2,1)}, \ldots), \acute{\vee}(\varphi_{(1,2)}, \varphi_{(2,2)}, \ldots), \ldots)$ のような量化表現を含めて, Form で構成可能な量化表現と等価な論理式が真理操作 N で構成される[*5]．つまり,『論理哲学論考』の量化表現とは, 真理操作 N で構成される論理式である．

---

*2 真理操作を含まない論理式を要素命題という．命題論理では原子命題に相当する概念である．

*3 『論理哲学論考』では, 真理操作 N だけが用いられる．

*4 『論理哲学論考』では, 記述 5.501 の $\overline{\xi}$ の定義により, 真理操作 N の項 $\overline{\xi}$ の要素に順序が定められていない．本稿も同じようにしている．N 自身は論理演算の対称性を持つが, 非対称的な論理式 (e.g. $\varphi \to \psi$) は N で構成することはできない．

*5 第 7 節では, このような量化表現の構成について述べる．

2 研究対象と先行研究の紹介

本稿の研究対象は次の 3 つである．

- 『論理哲学論考』の記述 5.32 は何を意味しているのか．
- 「操作の継続的な適用の結果」とは，どのような概念であるのか．
- 『論理哲学論考』で構成可能な論理式はどのように定まるのか．

記述 5.32 は次のような文である．

> 5.32 Alle Wahrheitsfunktionen sind Resultate der successiven Anwendung einer endlichen Anzahl von Wahrheitsoperationen auf die Elementarsätze.

英語訳と日本語訳はそれぞれ次のとおりである[*6]．

> 5.32 All truth-functions are results of the successive application of a finite number of truth-operations to elementary propositions.

> 5.32 全ての真理関数は、要素命題に対する有限個の真理操作の継続的適用の結果である。

『論理哲学論考』で用いられるいくつかの概念 (e.g. 要素命題，真理操作，真理関数) は，名称は異なるが，現代の論理学でも同じようなものが用いられている．しかし，注意すべきこととして，『論理哲学論考』の「真理関数」は関数そのものを指す用語ではなく，論理式を指す用語である．現代の標準的な論理学では，「真理関数」は命題と真理値に関する関数自体のことを指す．本稿は判別のため，引用部分以外では，『論理哲学論考』の「真理関数」を「論理式」と表記する．記述 5.32 の用語について，訳語を整理すると次のようになる．

表 1　記述 5.32 の用語

ドイツ語原文	英語訳	日本語訳	本稿訳
Elementarsätze	elementary propositions	要素命題	要素命題
Wahrheitsoperationen	truth-operations	真理操作	真理操作
Wahrheitsfunktionen	truth-functions	真理関数	論理式
successiven Anwendung	succsessive application	継続的適用	継続的な適用

先行研究を時系列にまとめると次のようになる．まず，Fogelin (1976) [2] で，量化される変数が明記されない記号法では，量化子の順序を交換できない論理式を表すことができないことが言及された．次に，Geach (1981) [3], Soames (1983) [5] によって，量化される変数

*6 英語訳は Ramsey and Ogden (1922) [4] による．日本語訳は奥 (1975) [7] による．

が明記される記号法が用いられ, 量化表現の構成方法が述べられた. これに対して, Fogelin (1987) [2, pp. 78–82] によって次のような論述がされた. すなわち, 記述 5.32 によって真理操作を無限回適用することができないため, 真理操作の項に無限個の複合式*7を含む論理式は構成できないという論述がされた. その後, 飯田 (1989) [6, pp. 171–174], 野矢 (2006) [9, pp. 190–204] によって, この記述 5.32 による構成不可能性についておおよそ同意見が述べられた. また, 野矢 (2006) [9, pp. 190–204] では,『論理哲学論考』の要素命題の個数と真理操作の項の個数が有限であるという説が述べられ, それによって記述 5.32 の問題が解決するという論述がされた. Connelly (2017) [1] では,「有限」,「無限」という語の解釈の仕方によって, 記述 5.32 の問題が解決するという論述がされた.

ここで, Fogelin (1987) [2], 飯田 (1989) [6], 野矢 (2006) [9] による, 論理式の構成不可能性の議論について, 共通な部分をまとめると次のようになる.

(I) 記述 5.32 によって, 真理操作を継続的に無限回適用することはできない.
(II) 無限個の複合式を構成するとき, 真理操作を継続的に無限回適用する必要がある.
(III) (I), (II) により,『論理哲学論考』では, 真理操作の項に無限個の複合式を持つ論理式 (e.g. $\mathrm{N}(\mathrm{N}(\varphi_1), \mathrm{N}(\varphi_2), \ldots)$) を構成することは不可能である.

これについて, 本稿の主張は次のようになる.

(i) (I), (II) は「操作の継続的な適用の結果」という概念の誤用である.
(ii) 真理操作の項に無限個の複合式を持つ論理式 (e.g. $\mathrm{N}(\mathrm{N}(\varphi_1), \mathrm{N}(\varphi_2), \ldots)$) は構成可能である.
(iii) 定義 1 の Form のすべての量化表現は真理操作 N による論理式で表すことができる.

本稿の主張として, 記述 5.32 について言及している先行研究 (i.e. Fogelin (1987) [2], 飯田 (1989) [6], 野矢 (2006) [9], Connelly (2017) [1]) はいずれも, 記述 5.32 の主張に誤った解釈を与えている. Connelly (2017) [1] によって問題の解決案として出された「有限」,「無限」の多様な解釈は, 記述 5.32 の誤った解釈によって与えられたものであり, 十分な説明にはならない. また, 野矢 (2006) [9] による, 要素命題の個数が有限であるという説は不要であり, むしろ, この説は別の疑問をもたらす.

本稿は第 3 節で, 操作の継続的な適用の結果という概念について考察し, 記述 5.32 の主張に明確な解釈を与える試みを行う. 第 4 節では, いくつかの曖昧な問題について述べ, 本稿の主張 (i) について説明する. また, 同節では, 要素命題の個数が有限であるという説に疑問を与える. 第 5, 6 節では, 論理式の継続的な長さという概念を導入して, 論理式の構成可能性について述べる. 第 7 節では, 量化表現の構成方法について述べる. 第 8 節では,『論理哲学論考』で構成不可能な論理式について述べる.

*7 本稿では, 真理操作を含む論理式のことを複合式という.

3　操作の継続的な適用の結果という概念について

本節の目的は,「操作の継続的な適用の結果」という概念を明確に定義し, この用語が用いられる主張の真意を明らかにすることである. その方法として,『論理哲学論考』の記述の中からこの用語について説明されている部分を見つけ出し, その記述に従ってこの概念を再定義するという作業を行う. 記述 5.32 について, 操作の継続的な適用の結果という概念は, 記述 5.2521, 5.2522, 5.2523 で説明されている. それらは次のようなものである[*8][*9].

> 5.2521　Die fortgesetzte Anwendung einer Operation auf ihr eigenes Resultat nenne ich ihre successive Anwendung („ $O'O'O'a$ “ ist das Resultat der dreimaligen successiven Anwendung von „ $O'\xi$ “ auf „ a “). In einem ähnlichen Sinne rede ich von der successiven Anwendung m e h r e r e r Operationen auf eine Anzahl von Sätzen.
>
> 5.2522　Das allgemeine Glied einer Formenreihe $a, O'a, O'O'a, \ldots$ schreibe ich daher so: „ $[a, x, O'x]$ “. Dieser Klammerausdruck ist eine Variable. Das erste Glied des Klammerausdruckes ist der Anfang der Formenreihe, das zweite die Form eines beliebigen Gliedes x der Reihe und das dritte die Form desjenigen Gliedes der Reihe, welches auf x unmittelbar folgt.
>
> 5.2523　Der Begriff der successiven Anwendung der Operation ist äquivalent mit dem Begriff „ und so weiter “.

英語訳は次のとおりである[*10].

> 5.2521　The repeated application of an operation to its own result I call its successive application (“$O'O'O'a$” is the result of the threefold successive application of “$O'\xi$” to “a”). In a similar sense I speak of the successive application of *several* operations to a number of propositions.
>
> 5.2522　The general term of the formal series $a, O'a, O'O'a, \ldots.$ I write thus: “$[a, x, O'x]$”. This expression in brackets is a variable. The first term of the expression is the beginning of the formal series, the second the form of an arbitrary term x of the series, and the third the form of that term of the series which

---

*8 $O'a$ は現代の表記で $O(a)$ と表される. ξ は任意の論理式を表す. $O'\xi$ (i.e. $O(\xi)$) は論理式のような見た目をしているが, これは操作を表している. このような表記は記述 5.502 でも見られる.

*9 記述 5.2521 では, 同一の操作を重複して数えるとき, 数を表す語が強調されている. これは記述 5.3 でも同様である.

*10 英語訳は Ramsey and Ogden (1922) [4] による.

immediately follows x.

5.2523　The concept of the successive application of an operation is equivalent to the concept “and so on”.

日本語訳は次のとおりである[*11].

5.2521　操作自身の結果に、さらに操作を適用し続けることを、私は操作の継続的適用と名付ける。(“$O'O'O'a$” は “a” に対する “$O'\xi$” の三回の継続的適用の結果である。）類似した意味で私は何個かの命題への 複数 の操作の継続的適用についても話をする。

5.2522　そこで、$a, O'a, O'O'a, \ldots$ という形式的系列の一般項を、私は “$[a, x, O'x]$” と書くことにする。この括弧づきの表現は変項である。括弧づきの表現の最初の項は形式的系列の初項であり、第二項は系列の任意の項 x の形式であり、第三項は x に直接続く系列の項の形式である。

5.2523　操作の継続的適用という概念は「そして次々に」という概念と同値である。

ここで, 以降の論述で曖昧な表記が現れないように, 本稿は記述 5.2521 を次のように翻訳する[*12].

5.2521　1 個の操作をそれ自身の結果に繰り返し適用することを, 操作の継続的な適用という. たとえば, $O(O(O(a)))$ は a に対する O の 3 重の継続的適用の結果である. 同じような意味で, 複数の命題に対する**複数**の操作の継続的な適用について言及する.

3.1　1 変数真理操作の継続的な適用

操作の継続的な適用という概念について, 記述 5.2521 をそのまま定義として使うためには説明が不十分である. 明らかに分かることは, 具体的に書かれているとおり,

$$O(O(O(a))) \text{ は } a \text{ に対する } O \text{ の 3 重の継続的な適用の結果である}$$

ということである. さらに, 同様にして,

$$\overbrace{O(\cdots(O(a))\cdots)}^{n} \text{ は } a \text{ に対する } O \text{ の } n \text{ 重の継続的な適用の結果である}$$

ということを読み取ることができるだろう. これを次のようにして帰納的に定義する.

---

*11 日本語訳は奥 (1975) [7] による.

*12 既存の翻訳では「3 回の継続的な適用」と翻訳されている部分を本稿は「3 重の継続的な適用」と翻訳している. このような翻訳をする理由は第 4.1 節で説明している. また, 操作 $O(\xi)$ は O と表記した.

定義 3. a を論理式, O を 1 変数の真理操作とする．$n = 0, 1, \ldots$ について, 関数 $s_{(O,n)}$ を次のようにして定める．

$$s_{(O,n)}(a) = \begin{cases} a & (n = 0), \\ O(s_{(O,n-1)}(a)) & (n = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

このとき, $s_{(O,n)}(a)$ は a に対する O の n 重の継続的な適用の結果であるという．

たとえば, a, $O(a)$, $O(O(a))$ はそれぞれ a に対する O の 0 重, 1 重, 2 重の継続的な適用の結果である．

次に, 記述 5.2522 で述べられているように, $s_{(O,n)}(a)$ (i.e. a に対する O の n 重の継続的な適用の結果) を $n = 0, 1, \ldots$ の順序に並べた列 $(s_{(O,n)}(a))_{n \in \mathbb{N}} = (a, O(a), O(O(a)), \ldots)$ のことを形式列という[*13]．この列の一般項は $[a, x, O(x)]$ と表記される．この表記の各項はその形式列の初項, 第 n 項, 第 $n+1$ 項を表している．定義 3 により, この表記の一般項は $[s_{(O,0)}(a), s_{(O,n-1)}(a), s_{(O,n)}(a)]$ である．$n = 0, 1, \ldots$ について, 第 $n+1$ 項が $s_{(O,n)}(a)$ であることから, この形式列の一般項 (i.e. 第 n 項) は単純に $s_{(O,n-1)}(a)$ と表すことができる．ここで, 次のような定義を与える．

定義 4. a を論理式, O を 1 変数真理操作とする．このとき, 論理式列 $(s_{(O,n)}(a))_{n \in \mathbb{N}}$ のことを a, O についての形式列という．

すなわち, 論理式 x が形式列 $(s_{(O,n)}(a))_{n \in \mathbb{N}}$ の第 $n+1$ 項であることは, 論理式 x が a に対する O の n 重の継続的な適用の結果であることと同値である (i.e. $x = s_{(O,n)}(a)$)．ここで, 次のような関数を定義する．

定義 5. p を要素命題, O を 1 変数の真理操作とする．$n = 0, 1, \ldots$ について, 関数 $\sigma_{(O,n)}$ を次のように帰納的に定める．

$$\sigma_{(O,n)}(p) = \begin{cases} p & (n = 0), \\ O(\sigma_{(O,n-1)}(p)) & (n = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

定義 5 の関数 $\sigma_{(O,n)}$ は, 定義 3 の $s_{(O,0)}(a)$ が要素命題である場合の関数 $s_{(O,n)}$ に等しい．すなわち, 論理式 $\sigma_{(O,n)}(p)$ は要素命題 p に対する真理操作 O の n 重の継続的な適用の結果である．ここで, 次のような概念を定義する[*14]．

定義 6. p を要素命題, O を 1 変数真理操作とする．このとき, p, O についての命題形式 $\mathrm{PF}(p, O)$ とは, 論理式列 $(\sigma_{(O,n)}(p))_{n \in \mathbb{N}}$ のことである．

[*13] 「形式列」は原文の “Formenreihe” に対する訳語である．野矢 (2003) [8] による翻訳でこの訳語が使われている．奥 (1975) [7] による翻訳では「形式的系列」という訳語が使われている．

[*14] ここで定義された命題形式という概念は『論理哲学論考』から引用されたものではない．これは第 3.3 節の「論理式の一般的な形式」と呼ばれる概念の特殊な場合に相当する概念である．

命題形式は初項が要素命題であるような形式列である．すなわち, 要素命題 p, 真理操作 O についての命題形式 $\mathrm{PF}(p,O)$ は, その第 $n+1$ 項が初項 p に対する O の n 重の継続的な適用の結果 (i.e. $\sigma_{(O,n)}(p)$) であるような論理式列 $(p, O(p), O(O(p)), \dots)$ のことである．この命題形式の一般項は $[p, x, O(x)]$ である．ここで, 定義 5 により, この表記の一般項は $[\sigma_{(O,0)}(p), \sigma_{(O,n-1)}(p), \sigma_{(O,n)}(p)]$ である．$n = 0, 1, \dots$ について, 第 $n+1$ 項が $\sigma_{(O,n)}(p)$ であることから, この命題形式の一般項 (i.e. 第 n 項) は単純に $\sigma_{(O,n-1)}(p)$ と表すことができる．

例 7. ただ 1 個の要素命題 p と, ただ 1 個の 1 変数真理操作 O によって構成可能な論理式全体の集合 X を考える．すなわち, $X = \{p, O(p), O(O(p)), \dots\}$ を考える．このとき, 命題形式 $\mathrm{PF}(p,O)$ が得られ, $x \in X \iff x \in \mathrm{PF}(p,O)$ である．ここで, $n = 0, 1, \dots$ について, $\sigma_{(O,n)}(p) \in X$ は p に対する O の n 重の継続的な適用の結果である．よって, すべての $x \in X$ について, ある $n \in \mathbb{N}$ があって, x は p に対する O の n 重の継続的な適用の結果である．

ある論理式列 X が与えられたとき, X の第 $n+1$ 項が初項の要素命題 p に対する真理操作 O の n 重の継続的な適用であることは, その論理式列 X が p, O についての命題形式 $\mathrm{PF}(p,O)$ であることと同値である．したがって, 論理式列 X が命題形式でなければ,「X の第 $n+1$ 項は初項 p に対する O の n 重の継続的な適用の結果である」という主張は成り立たない．

ここで, 複数の要素命題 p, q が与えられたとき, どのような命題形式が得られるのかを考える．たとえば, $(p, q, O(p), O(q), O(O(p)), \dots)$ のような論理式列は命題形式ではない．たとえば, $O(q)$ は p に対する O の継続的な適用の結果ではない．

複数の要素命題 p_m $(m = 1, 2, \dots)$ と, ただ 1 個の 1 変数真理操作 O が与えられたとき, それぞれの p_m についての命題形式 $\mathrm{PF}(p_m, O) = (p_m, O(p_m), O(O(p_m)), \dots)$ が得られる．命題形式 $\mathrm{PF}(p_m, O)$ の一般項 (i.e. 第 n 項) は $\sigma_{(O,n-1)}(p_m)$ である．すなわち, 無限個の複合式 $O(p_1), O(p_2), \dots$ は, それぞれ, 要素命題 p_m に対する O の 1 重の継続的な適用の結果である．

したがって, p, q が要素命題であるときに,「$O(p), O(q)$ は操作 O の 2 重の継続的な適用の結果である」というような主張は「操作の継続的な適用の結果」の概念の誤用である．同様にして,「無限個の複合式 $O(p_1), O(p_2), \dots$ は操作の無限重の継続的な適用の結果である」というような主張も誤りである．

記述 5.2521 では, 同じことを言い表すための別の言い回しが用意されている[*15]．つまり, 記述 5.2521 の 2 つ目の文から,「$O(O(O(a)))$ が a に対する O の 3 重の継続的な適用の結果であること」と,「$O(O(O(a)))$ が複数の論理式 $a, O(a), O(O(a))$ に対する 3 **個**の O の継続

[*15] 仮に, 記述 5.2521 の 1 文目と 2 文目が同様の意味を持たないと仮定すると, 記述 5.2521 で定義された言い回しが一度も使われずに, 記述 5.32 で無定義な言い回しが急に使われることになる．

的な適用の結果であること」が同じことを意味することを読み取ることができる．記述 5.32 で用いられるのはこの 2 つ目の言い回しである．ここで, 次のような定義を与える．

定義 8. 論理式 x が $k+1 \geq 1$ 個の論理式 $\sigma_{(O,0)}(p), \ldots, \sigma_{(O,k)}(p)$ に対する n 個の真理操作 O の継続的な適用の結果であるとは, 論理式 x が要素命題 $p = \sigma_{(O,0)}(p)$ に対する真理操作 O の $n = k+1$ 重の継続的な適用の結果であることである (i.e. $x = \sigma_{(O,n=k+1)}(p)$).

定義 9. 論理式 x が複数の論理式 $\sigma_{(O,i\leq k)}(p)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ に対する有限個の真理操作 O の継続的な適用の結果であるとは, ある $n \in \mathbb{N}$ があって, 論理式 x が要素命題 $p = \sigma_{(O,0)}(p)$ に対する真理操作 O の n 重の継続的な適用の結果であることである (i.e. $\exists n \in \mathbb{N}\left[x = \sigma_{(O,n)}(p)\right]$).

すなわち, 1 変数論理式について, 記述 5.32 の「すべての論理式は要素命題に対する有限個の真理操作の継続的な継続的な適用の結果である」という主張は, 厳密に言えば,「すべての論理式 x について, ある $n \in \mathbb{N}$, p, O があって, x は要素命題 p に対する O の n 重の継続的な継続的な適用の結果である」という主張である．論理式 x が要素命題 p に対する真理操作 O の n 重の継続的な適用の結果であるということは, すなわち, x が命題形式 $\mathrm{PF}(p, O)$ の第 $n+1$ 項であるということである．すなわち, 1 変数論理式について, 記述 5.32 の主張は「すべての論理式 x について, ある $n \geq 1$, p, O があって, x は命題形式 $\mathrm{PF}(p, O)$ の第 n 項である」という主張に等しい．

記述 5.2521 による「操作の継続的な適用の結果」の説明と, 記述 5.2522 による形式列の概念は, 1 変数の真理操作を前提にしたものである．量化表現は項の集合の取り方によって論理式の構造が複雑になるため, 項が 1 点集合の場合を除いて, 量化表現に対してこのような定義はうまくいかない．記述 5.32 はこのような文脈で述べられており, 1 変数の真理操作を前提とした論述であることは考慮されるべきである．実際, 真理操作 N と量化表現 $\mathrm{N}(\bar{\xi})$ の導入は記述 5.32 の後に行われている．

しかし, 操作の継続的な適用の結果という概念は, 量化表現を含めて,『論理哲学論考』のすべての論理式に関わる概念である．少なくとも, N の項を 1 点集合に限れば, 無限個の論理式 $\mathrm{N}(p_1), \mathrm{N}(p_2), \ldots$ を構成することが記述 5.32 に違反しないことは明らかである．これらの論理式 $\mathrm{N}(p_m)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ はいずれも 1 個の要素命題 p_m に対する 1 個の真理操作 N の継続的な適用の結果である．

3.2 命題形式の拡張

ここで, 定義 5 の $\sigma_{(O,n)}$ と定義 6 の命題形式の概念を用いて,「要素命題に対する 1 変数真理操作の n 重の継続的な適用の結果」という概念を特定の論理式の集合について定義する．真理操作の継続的な適用の結果という概念は論理式について定義された概念であるが, 特定の論理式の集合はこれを特徴づけることができる．

複数の要素命題 $p_m\,(m=1,2,\dots)\in\mathrm{Atom}$ と, ただ 1 個の 1 変数真理操作 O が与えられたとする. このとき, $m=1,2,\dots$ について, p_m, O についての命題形式 $\mathrm{PF}(p_m, O)$ は

$$\sigma_0(p_m), \sigma_1(p_m), \sigma_2(p_m), \dots$$

であり, その一般項は $\sigma_{(O,n-1)}(p_m)$ である. ここで, $m=1,2,\dots$, $n=0,1,\dots$ について,

$$x\in S_{(O,n)} \overset{\text{def}}{\iff} x=\sigma_{(O,n)}(p_m)$$

となるような集合 $S_{(O,n)}$ を考えると, 論理式の集合の列

$$\left(S_{(O,n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} = (S_{(O,0)}, S_{(O,1)}, S_{(O,2)}, \dots)$$

が得られる. すなわち,

$$\left(S_{(O,n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} = (\{p_1, p_2, \dots\}, \{O(p_1), O(p_2), \dots\}, \{O(O(p_1)), O(O(p_2)), \dots\}, \dots)$$

という列が得られる. ここで, $\sigma_{(O,n)}$, $S_{(O,n)}$ の定義により, 次のことが成り立つ.

命題 10. ただ 1 個の 1 変数真理操作 O が与えられたとき, すべての論理式 $x\in S_{(O,n)}$ について, ある要素命題 $p\in S_{(O,0)}$ があって, x は p に対する真理操作 O の n 重の継続的な適用の結果である.

すなわち, 論理式 x がある要素命題 p に対する真理操作 O の n 重の継続的な適用の結果であることは, x が $S_{(O,n)}$ の要素であることに等しい. また, 論理式 x が $S_{(O,n)}$ の要素であることは, x が $\left(S_{(O,n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の第 $n+1$ 項の要素であることに等しい. すなわち, $\left(S_{(O,n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ の第 n 項は, 命題形式 $\mathrm{PF}(p_m, O)$ の第 n 項の集合である. $\sigma_{(O,n)}(p_m)\in S_{(O,n)}$ を具体的に書き表わせば次のようになる.

$$\begin{array}{cccc}
p_1 & O(p_1) & O(O(p_1)) & \cdots \\
p_2 & O(p_2) & O(O(p_2)) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
 & & & \\
\Cap & \Cap & \Cap & \\
S_{(O,0)} & S_{(O,1)} & S_{(O,2)} & \cdots \\
 & & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
0 & 1 & 2 & \cdots
\end{array}$$

$\sigma_{(O,n)}$, $S_{(O,n)}$ の定義により, $n=0,1,\dots$ について, $\sigma_{(O,n)}(p_m)$ はただ 1 つの $S_{(O,n)}$ に属している. つまり, 論理式の集合 $S_{(O,n)}$ は,「要素命題に対する 1 変数真理操作の n 重の継続的な適用の結果」という概念を特徴づけている. すなわち, 1 変数論理式について, 記述 5.32 の「すべての論理式は要素命題に対する有限個の真理操作の継続的な適用の結果である」という主張は,「すべての論理式 x について, ある $n\in\mathbb{N}$ があって, x は $S_{(O,n)}$ の要素である」という主張に等しい.

論理式 $\sigma_{(O,n)}(p_m)$ は $S_{(O,n)}$ に類別され, $S_{(O,n)}$ は自然数 n に一対一対応している．このとき, 1 変数論理式全体の集合から自然数全体の集合への関数 $f\colon \sigma_{(O,n)}(p) \mapsto n$ が得られる.

$$
\begin{tikzcd}
\{\sigma_{(O,n)}(p) \mid p \in \mathrm{Atom}, n \in \mathbb{N}\} \arrow[d] \arrow[dr, "f"] & \\
\{S_{(O,n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \arrow[r, "\simeq"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}
$$

第 5 節では, このような関数 f によって, 論理式 φ の継続的な長さ $f(\varphi)$ という概念を導入する.

3.3 量化表現と操作の継続的な適用の結果

『論理哲学論考』では, 量化表現 φ が真理操作 N の継続的な適用の結果であるということについて, 具体的な説明が与えられていない．しかし,「論理式の一般的な形式」と呼ばれる概念が用いられ, これが真理操作 N の継続的な適用と関係していることが述べられている[*16].『論理哲学論考』の記述 6 と記述 6.001 では, 論理式の一般的な形式と操作の継続的な適用の結果について次のように説明されている.

> 6　Die allgemeine Form der Wahrheitsfunktion ist: $[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]$. Dies ist die allgemeine Form des Satzes.
>
> 6.001　Dies sagt nichts anderes, als dass jeder Satz ein Resultat der successiven Anwendung der Operation $\mathrm{N}'(\overline{\xi})$ auf die Elementarsätze ist.

英語訳は次のとおりである[*17].

> 6　The general form of truth-function is: $[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]$. This is the general form of proposition.
>
> 6.001　This says nothing else than that every proposition is the result of successive applications of the operation $\mathrm{N}'(\overline{\xi})$ to the elementary propositions.

日本語訳は次のとおりである[*18].

> 6　真理関数の一般的形式は、$[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]$ である。これは命題の一般的形式である。
>
> 6.001　このことは、命題はいずれも、要素命題に対する操作 $\mathrm{N}'(\overline{\xi})$ の継続的適用の結果である、と語ることに他ならない。

[*16] 本稿は「論理式の一般的な形式」を原文の “Die allgemeine Form der Wahrheitsfunktion” の訳語として用いる.
[*17] 英語訳は Ramsey and Ogden (1922) [4] による.
[*18] 日本語訳は奥 (1975) [7] による.

この記述から次のようなことが考えられる．すなわち，N による論理式 φ が要素命題に対する真理操作 N の継続的な適用の結果であることは，φ が論理式の一般的な形式 $[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]$ の具体例として現れることに等しい．

『論理哲学論考』の序文では，$[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]$ という表記について次のように解説されている[*19]．

> The symbol he uses is $[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]$. The following is the explanation of this symbol:
>
> $\overline{p}$ stands for all atomic propositions.
>
> $\overline{\xi}$ stands for any set of propositions.
>
> $\mathrm{N}(\overline{\xi})$stands for the negation of all the propositions making up $\overline{\xi}$.
>
> The whole symbol $[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]$ means whatever can be obtained by taking any selection of atomic propositions, negating them all, then taking any selection of the set of propositions now obtained, together with any of the originals – and so on indefinitely.

日本語訳は次のとおりである[*20]．

> 彼は、$[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]$ というシンボルを用いています。このシンボルの説明は次の通りです。
>
> $\overline{p}$ は全ての原子命題を代表します。
>
> $\overline{\xi}$ は命題の集合のいずれをも代表します。
>
> $\mathrm{N}(\overline{\xi})$ は $\overline{\xi}$ を作り上げる全ての命題の否定を代表します。
>
> シンボル全体 $[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]$ は次のようにして得ることのできるあらゆるものを意味します。即ち、原子命題を任意に選択し、それら選択された命題を全て否定し、かくして得られる諸命題の集合から任意に命題を選択し、これにはじめの原子命題を任意に付け加え、そしてこれらを全て否定する、$\cdots\cdots$ といったことを無限にくりかえして得られるあらゆるものを意味します。

この説明から，論理式の一般的な形式 $[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]$ が真理操作 N による論理式の構成方法を表していることがわかる．

ここで次のような疑問が生じる．すなわち，ただ 1 個の論理式の一般的な形式 $[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]$ があって，N によるすべての論理式がこの形式に含まれているのか，それとも，N によるすべての論理式について，それぞれ，論理式の一般的な形式 $[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]$ が定まるのか，という疑問である．前者であれば，$[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]$ は論理式の集合の列の一般項を表していることが考えられる．後者であれば，$[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]$ は，$\mathrm{N}(\overline{\xi})$ という何らかの論理式と，それを構成するために必要な論理式からなる何らかの概念であることが考えられる．本稿は前者の解釈を仮定

[*19] 『論理哲学論考』の序文はバートランド・ラッセルによって書かれている．ここで,「原子命題」は要素命題のことを指している．

[*20] 日本語訳は奥 (1975) [7] による．本稿は一部の改行を省略して引用している．

する[*21].

論理式の一般的な形式 $[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]$ がなんらかの列の一般項を表す表記であると仮定する根拠は, この記号法の一貫性に依存している. すなわち, この記号法は『論理哲学論考』の記述を通して何らかの列の一般項を表すものでなければならない, ということである.『論理哲学論考』では, 記述 6 の $[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]$ と同様の記号法が次のような記述でも用いられる.

- 記述 5.2522 の $[a, x, O(x)]$
- 記述 6.01 の $[\overline{\eta}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]$
- 記述 6.02 の $[x, \xi, \Omega(\xi)]$ と $[\Omega^0(x), \Omega^v(x), \Omega^{v+1}(x)]$
- 記述 6.03 の $[0, \xi, \xi + 1]$

第 3.1 節で述べたように, 記述 5.2522 の $[a, x, O(x)]$ は 1 変数の操作の継続的な適用の結果 (i.e. 1 変数論理式) を決められた順番で並べた列の一般項である[*22].

その他の記述を以下に引用する. 記述 6.01 は次のようなものである[*23].

> 6.01 Die allgemeine Form der Operation $\Omega'(\overline{\eta})$ ist also: $[\overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]'(\overline{\eta})$ $(= [\overline{\eta}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})])$.
>
> Das ist die allgemeinste Form des Überganges von einem Satz zum anderen.

> 6.01 The general form of the operation $\Omega'(\overline{\eta})$ is therefore: $[\overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]'(\overline{\eta})$ $(= [\overline{\eta}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})])$.
>
> This is the most general form of transition from one proposition to another.

> 6.01 従って操作 $\Omega'(\overline{\eta})$ の一般的形式は、$[\overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]'(\overline{\eta})$ $(= [\overline{\eta}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})])$ である。
>
> これはある命題から他の命題への移行の最も一般的な形式である。

記述 6.02 では次のように述べられている[*24].

> 6.02 Und s o kommen wir zu den Zahlen: Ich definiere
>
> $$x = \Omega^{0\prime}x \quad \text{Def. und}$$
>
> $$\Omega'\Omega^{v\prime}x = \Omega^{v+1\prime}x \quad \text{Def.}$$
>
> Nach diesen Zeichenregeln schreiben wir also die Reihe
>
> $$x,\ \Omega'x,\ \Omega'\Omega'x,\ \Omega'\Omega'\Omega'x,\ \ldots$$

[*21] 『論理哲学論考』では, 論理式の一般的な形式 $[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]$ が何らかの列であるということは明言されていない. これを列とみなす解釈は整合的な部分もあるが, そうでない部分もある.

[*22] 記述 5.2522 はこの表記法の説明が与えられている記述である. 記述 5.2522 は第 3 節の冒頭で引用されている.

[*23] 英語訳は Ramsey and Ogden (1922) [4] による. 日本語訳は奥 (1975) [7] による. 本稿は一部の改行を省略して日本語訳を引用している.

[*24] ここで引用されているものは記述 6.02 の一部分である.

so:

$$\Omega^{0\prime}x,\ \Omega^{0+1\prime}x,\ \Omega^{0+1+1\prime}x,\ \Omega^{0+1+1+1\prime}x,\ \ldots$$

Also schreibe ich statt „ $[x, \xi, \Omega(\xi)]$ “:

$$„\ [\Omega^0(x), \Omega^v(x), \Omega^{v+1}(x)]“.$$

英語訳は次のとおりである[*25].

6.02　And thus we come to numbers: I define

$$x = \Omega^{0\prime}x \quad \text{Def. and}$$

$$\Omega'\Omega^{v\prime}x = \Omega^{v+1\prime}x \quad \text{Def.}$$

According, then, to these symbolic rules we write the series

$$x,\ \Omega'x,\ \Omega'\Omega'x,\ \Omega'\Omega'\Omega'x,\ \ldots$$

as:

$$\Omega^{0\prime}x,\ \Omega^{0+1\prime}x,\ \Omega^{0+1+1\prime}x,\ \Omega^{0+1+1+1\prime}x,\ \ldots$$

Therefore I write in place of “$[x, \xi, \Omega(\xi)]$”,

$$“[\Omega^0(x), \Omega^v(x), \Omega^{v+1}(x)]”.$$

日本語訳は次のとおりである[*26].

6.02　*このようにして* 我々は数に至る。私は次のように定義する。

$$x = \Omega^{0\prime}x \quad \text{Def.},$$

$$\Omega'\Omega^{v\prime}x = \Omega^{v+1\prime}x \quad \text{Def.}$$

従ってこの記号の規則によれば我々は系列

$$x,\ \Omega'x,\ \Omega'\Omega'x,\ \Omega'\Omega'\Omega'x,\ \ldots$$

を

$$\Omega^{0\prime}x,\ \Omega^{0+1\prime}x,\ \Omega^{0+1+1\prime}x,\ \Omega^{0+1+1+1\prime}x,\ \ldots$$

と書く。

従って、“$[x, \xi, \Omega(\xi)]$” の代わりに、

$$“[\Omega^0(x), \Omega^v(x), \Omega^{v+1}(x)]”$$

と書く。

[*25] 英語訳は Ramsey and Ogden (1922) [4] による.

[*26] 日本語訳は奥 (1975) [7] による.

記述 6.03 は次のようなものである[*27].

6.03　Die allgemeine Form der ganzen Zahl ist: $[0, \xi, \xi+1]$.

6.03　The general form of the cardinal number is: $[0, \xi, \xi+1]$.

6.03　整数の一般的形式は $[0, \xi, \xi+1]$ である。

記述 6.02 では, $[x, \xi, \Omega(\xi)]$ と $[\Omega^0(x), \Omega^v(x), \Omega^{v+1}(x)]$ が何らかの列を表していることを読み取ることができる．このとき, この 2 つの記号は同一の列を表している．記述 6.02 の $[\Omega^0(x), \Omega^v(x), \Omega^{v+1}(x)]$ が数列 $(0, 1, 2, \dots)$ に対応していることから, これが記述 6.03 の $[0, \xi, \xi+1]$ に対応づけられることを読み取ることができる．

このことから類推して, 記述 6 の $[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]$ と記述 6.01 の $[\overline{\eta}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]$ が何らかの列を表していることが考えられる[*28].

しかし, $[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]$ という表記がなんらかの列の一般項を表す表記であると仮定すると, 次のような問題が生じる．初項を表す $\overline{p}$ は要素命題全体の集合である．このとき, 第 n 項を表す $\overline{\xi}$ は論理式の集合であるが, 第 $n+1$ 項を表す $\mathrm{N}(\overline{\xi})$ は論理式そのものである．また, 集合 $\overline{\xi}$ のとり方によって, $\mathrm{N}(\overline{\xi})$ は複数の論理式を表す．これは列の一般項として成立しない[*29]．そこで, 本稿は論理式の一般的な形式が論理式の集合の列であると仮定して, 次のような仮説を立てる．

仮説 11. 論理式の一般的な形式の一般項は $[\overline{p}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]$ ではなく, $[\overline{p}, \overline{\xi}, \overline{\mathrm{N}(\overline{\xi})}]$ である．

初項を表す $\overline{p}$ は要素命題全体の集合である．第 n 項を表す $\overline{\xi}$ は, すでに構成された論理式全体の集合である．第 $n+1$ 項を表す $\overline{\mathrm{N}(\overline{\xi})}$ は, 第 n 項の $\overline{\xi}$ の任意の空でない部分集合を項に持つ論理式 $N(\overline{\xi})$ 全体の集合である．ここで,「すでに構成された論理式」の意味を明確にするために, 次のような定義を与える．

定義 12. Atom を要素命題全体の集合とする．$n = 0, 1, \dots$ について, 論理式の集合 W_n を次のように帰納的に定義する．

$$W_0 = \mathrm{Atom},$$
$$W_{n+1} = \left\{ \mathrm{N}(S) \;\middle|\; S \subseteq \bigcup\nolimits_{i=0}^{n} W_i,\ S \neq \emptyset \right\}.$$

このとき, 列 $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を論理式の一般的な形式という．論理式の性質として, $\varphi = \mathrm{N}(S)$ となるような $\varphi \in W_0$ は存在せず, $S \neq T$ ならば $\mathrm{N}(S) \neq \mathrm{N}(T)$ である．

すなわち, 量化表現 φ が要素命題に対する真理操作 N の継続的な適用の結果であることは, φ が論理式の一般的な形式 $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に含まれることに等しい．

[*27] 英語訳は Ramsey and Ogden (1922) [4] による．日本語訳は奥 (1975) [7] による．

[*28] 記述 6.01 では, N が他のあらゆる真理操作 Ω を表現することが述べられていると考えられる．

[*29] このことは記述 6.01 の $[\overline{\eta}, \overline{\xi}, \mathrm{N}(\overline{\xi})]$ でも同様である．

ここで,「量化表現 φ が要素命題に対する有限個の真理操作 N の継続的な適用の結果である」という主張を考えるならば, これは「ある $n \in \mathbb{N}$ があって, φ は論理式の一般的な形式 $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の第 $n+1$ 項の集合に属する」という主張に等しい. すなわち,「ある $n \in \mathbb{N}$ があって, $\varphi \in W_n$」という主張に等しい.『論理哲学論考』で構成可能なすべての論理式はいずれかの W_n に属している. したがって,『論理哲学論考』のすべての論理式は要素命題に対する有限個の真理操作 N の継続的な適用の結果である.

ここで, 記述 5.2521 のように,「操作の n 重の継続的な適用の結果である」のような数詞表現がなぜ論理式の一般的な形式に現れないのか不思議に思われるだろう. その理由として, 論理式の一般的な形式の項が「要素命題に対する真理操作 N の n 重の継続的な適用の結果」という概念をうまく特徴づけていないことが考えられる. 第 3.2 節 (i.e. 命題形式の拡張) の $\left(S_{(O,n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ と異なり, 定義 12 の $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は論理式を重複して含んでいる. 具体的には,

$$W_1 \subseteq W_2 \subseteq W_3 \subseteq \cdots$$

という関係が成り立つ[*30]. すなわち, φ が $W_{n\geq 1}$ の要素であれば, φ は W_{n+k} $(k = 1, 2, \dots)$ の要素でもある. つまり, 論理式の一般的な形式という概念を用いれば, 量化表現 φ が要素命題に対する真理操作 N の n 重の継続的な適用の結果であれば, それは $n+k$ 重の継続的な適用の結果でもある, ということである.

第 6 節では, 論理式の重複を取り除いて, 類別された論理式の一般的な形式 $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を考える. このとき, 第 3.2 節の $\left\{S_{(O,n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ と同様に, 論理式全体の集合から自然数全体の集合への関数 $f\colon \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n \to \mathbb{N}$ が得られる.

$$\begin{tikzcd}
\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n \arrow[d] \arrow[dr, "f"] & \\
\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}} \arrow[r, "\simeq"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

『論理哲学論考』では, 量化表現について「真理操作 N の n 重の継続的な適用の結果」のような句を用いた主張は行われない. しかし,「量化表現 φ が要素命題に対する真理操作 N の n 重の継続的な適用の結果である」とは, $\varphi \in L_n$, すなわち, $f(\varphi) = n$ であるということである.

第 5 節以降では, 前述の $f(\varphi)$ の値を「φ の継続的な長さ」といい, $f(\varphi) = n$ であることを「φ は継続的な長さ n を持つ」という[*31]. 論理式 φ が継続的な長さ n を持つということは, すなわち, 論理式 φ が要素命題に対する真理操作の n 重の継続的な適用の結果であるということである.

先行研究では, $\mathrm{N}(\mathrm{N}(\varphi_1), \mathrm{N}(\varphi_2), \dots)$ のような論理式が記述 5.32 に違反すると考えられた. しかし, 記述 5.32 を量化表現に適用するためには, 量化表現について, 真理操作 N の継

[*30] 第 6 節の補題 24 から得られる.

[*31] 第 6 節では, この関数 f を len と表記している.

続的な適用の結果という概念を定めなければならない．仮に, $\mathrm{N}(\mathrm{N}(\varphi_1), \mathrm{N}(\varphi_2), \dots)$ が真理操作の無限重の継続的な適用の結果であるならば, この量化表現はどの W_n にも属さないはずである．しかし, この量化表現は $W_{k\geq 2}$ の要素である．

直観的な描写として, 論理式 φ が要素命題に対する真理操作の n 重の継続的な適用の結果である (i.e. 継続的な長さ n を持つ) ことは, 論理式 φ の構文木の高さ (あるいは深さ) が n であることに相当する．たとえば, $\mathrm{N}(\mathrm{N}(\varphi_1), \mathrm{N}(\varphi_2))$ の構文木は次のようになる．

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{N}(\mathrm{N}(\varphi_1), \mathrm{N}(\varphi_2)) & \\ \diagup & & \diagdown \\ \mathrm{N}(\varphi_1) & & \mathrm{N}(\varphi_2) \\ | & & | \\ \varphi_1 & & \varphi_2 \end{array}$$

構文木の高さは真理操作の項が無限個であっても変わらない．以上が本稿による「操作の継続的な適用の結果」という概念の解釈である．

4　いくつかの曖昧な問題について

本節の目的は, 記述 5.32 と「操作の継続的な適用」という用語に関するいくつかの曖昧な問題を解消することである．

4.1　操作の継続的な適用に関する数詞表現

操作の継続的な適用について,「操作 O の n 回の継続的な適用を行う」,「操作 O の継続的な適用を n 回行う」,「操作 O を継続的に n 回適用する」のような句は, 意味的に曖昧な使い方をすることができる．たとえば, $n = 3$ のとき, このような表現によって論理式を構成しようとすると,

$$a \xrightarrow{O} O(a) \xrightarrow{O} O(O(a)) \xrightarrow{O} O(O(O(a)))$$

といった状況と,

$$\begin{aligned} &a \xrightarrow{O} O(a) \xrightarrow{O} O(O(a)), \\ &b \xrightarrow{O} O(b), \\ &c \xrightarrow{O} O(c) \end{aligned}$$

といった状況の, 2 種類の場合が考えられる．前者は, 操作 O の 3 重の継続的な適用を 1 回行うことである．後者は, 操作 O の 2 重の継続的な適用を 1 回, 1 重の継続的な適用を 2 回行うことである．記述 5.2521 について, 本稿が「操作の n 重の継続的な適用」というような翻訳を行った理由はこのような曖昧さを避けるためである．しかし,「重」,「回」といった訳語を使い分けることが曖昧さを解消するわけではない．操作の継続的な適用の結果が特定の論理式を指すことによって, この曖昧さは解消される．

以降は,「論理式 x は要素命題 p に対する真理操作 O の n 重の継続的な適用の結果である」と同じ意味で「論理式 x は要素命題 p に対して真理操作 O を継続的に n 回適用することによって得られる」という句を用いる.

4.2 必ずしも継続的でない操作の適用

先行研究[*32]では, 記述 5.32 に関する論述で「継続的」という語が省かれることがある. これは表記上の省略ではなく, 操作の継続的な適用の結果という概念の誤用によるものである.

先述のとおり,「無限個の複合式 $O(p_1), O(p_2), \ldots$ は真理操作 O を継続的に無限回適用することによって得られる」という主張は誤りである. 先行研究で言及されている「操作の適用回数」に関する主張は, 構成された複合式の個数に一致するような主張である. ここで重要なことは, 操作の適用回数という概念が, 暗黙のうちに, 論理式の集合について定められていることである.「特定の論理式 x について, x は操作を何回適用することで得られるのか」という問いは, 言い換えれば,「x を構成するために必要な論理式全体の集合に複合式が何個含まれるか」という問いである. ここで, 次のような定義を与える.

定義 13. 論理式の集合 X がちょうど n 個の複合式を要素に持つとき, X は真理操作を n 回適用した結果であるという. X の複合式の個数が有限でないとき, つまり, 複合式の個数に対応する自然数 n が存在しないとき, X は真理操作を無限回適用した結果であるという.

すなわち, 複合式 x を構成するために必要な論理式全体の集合が操作を n 回適用した結果であるならば, x は少なくとも操作を $n+1$ 回適用することで得られる, というような主張を考えることができるだろう. このとき, 操作の適用回数は, 論理式の集合について定義された概念であり, 論理式そのものについて定義されたものではない. 仮に, それぞれの論理式について操作の適用回数がうまく定まるのであれば, すべての論理式が順序づけられて構成されなければならない. しかし, p, q が要素命題であれば, 論理式 $O(p), O(q)$ のどちらが先に論理式として構成されるかは決められていない.

論理式が構成される順序は真理操作の項と値の関係によって定まる. たとえば, 論理式 $O(p)$ が構成されるためには, 論理式 p がすでに与えられていなければならない. 操作の継続的な適用の結果という概念が論理式そのものについて定義されることは, 操作の継続的な適用がこのような操作の項と値の関係の連鎖であることを意味する. このようにして,「操作を継続的に適用した回数」と「操作を適用した回数」は異なる概念である.

例 14. p, q を要素命題, O を 1 変数真理操作とする. このとき $X = \{p, q, O(p), O(q)\}$ は真理操作を 2 回適用した結果である. しかし, O の 2 重の継続的な適用の結果は X の要素に存在しない. 仮に, X の要素 $O(p)$ が O の 2 重の継続的な適用の結果であるならば,

[*32] Fogelin (1987) [2, pp. 78–82], 飯田 (1989) [6, pp. 171–174], 野矢 (2006) [9, pp. 190–204], Connelly(2017) [1].

$O(p) = O(O(x))$ となるような論理式 $x \in X$ が存在しなければならない．しかし, p は要素命題であり, 真理操作を含まないため, そのような x は存在しない．X の他の要素についても同様である．

4.3　「すべての論理式」という句の曖昧さについて

「すべての論理式」という句が「それぞれの論理式」を意味しているのか,「論理式を全て集めた集合」を意味しているのか, 区別されなければならない．記述 5.32 に関して,「すべての論理式は要素命題に対する有限個の真理操作の継続的な適用の結果である」という主張と,「論理式全体の集合は要素命題に対する有限個の真理操作の継続的な適用の結果である」という主張は等しい主張ではない．

1 変数論理式全体の集合に注目すれば, その要素である x が論理式であれば $O(x)$ も論理式である．すなわち, 要素命題に対する真理操作 O の n 重の継続的な適用の結果が論理式であれば, $n+1$ 重の継続的な適用の結果も論理式である．したがって, どのような $n \in \mathbb{N}$ をとっても,「すべての論理式 x について, ある $m \leq n$ があって, x は要素命題に対する真理操作の m 重の継続的な適用の結果である」という主張は成り立たない．このことを「論理式全体の集合は要素命題に対する有限個の真理操作の継続的な適用の結果ではない」と言い表すことができるだろう．しかし, 真理操作の継続的な適用の結果を論理式の集合について定めることは,「操作の継続的な適用の結果」という用語の本来の使い方ではない．特に, 論理式全体の集合は, 真理操作の n 重の継続的な適用の結果という概念を特徴づけるような集合 (i.e. 第 3.2 の $S_{(O,n)}$) ではない．

4.4　操作の適用回数

論理式全体の集合は操作を無限回適用した結果である．このことは要素命題の個数に依存しない．

例 15. p をただ 1 個の要素命題, O をただ 1 個の真理操作とする．このとき得られる論理式全体の集合は次のような集合 X である．すなわち, $p \in X$ であり, $x \in X$ ならば $O(x) \in X$ であるような集合 X である．ここで, 関数 $f \colon X \to \mathbb{N}$ を次のように定義する．

$$f(p) = 0,$$
$$f(O(x)) = f(x) + 1.$$

論理式の性質として, 論理式は式そのものを表す記号列であるので, $x \neq y$ ならば $O(x) \neq O(y)$ である．要素命題は複合式ではないので, すべての $x \in X$ について, $p \neq O(x)$ である．よって, f は一対一対応であるので, X は無限集合である．複合式でない論理式は要素命題 p の 1 個だけなので, 複合式全体の集合は無限集合である．よって, X は真理操作 O を無限回適用した結果である．

仮に, X が真理操作 O を有限回適用した結果であるならば, x が論理式でありながら, $O(x)$ は論理式ではない, というような $x \in X$ が存在しなければならない. しかし, その場合は, 記述 5.2523 の「以下同様」という言葉の使い方を変えなければならないだろう. 要素命題の個数が有限 (e.g. 1 個) であっても, 構成可能な複合式は無限にある. しかし, 真理操作 O を無限回適用しなければ構成できないような論理式は X に属さない.

要素命題と真理操作がそれぞれ 1 個だけ与えられる論理体系では, すべての論理式がただ 1 個の命題形式に属する. つまり, すべての論理式が順序づけられて構成される. このような論理体系では, $\{x\}$ と x を同一視することで,「操作の適用回数」と「操作の継続的な適用回数」を同一視することができる. つまり, このような特殊な論理体系であれば, 記述 5.32 の「継続的」という語を省略することができるだろう[*33].

1 変数論理式について, 有限個の要素命題が与えられたとき,「すべての論理式は真理操作を有限回適用することで得られる」という主張は, 次のような主張である. すなわち, Atom_m を m 個の要素命題からなる集合として,

$$\langle X \rangle_n = \{\sigma_{(O,k)}(p) \mid 0 \leq k \leq n,\, p \in \mathrm{Atom}_m\}$$

とするとき, すべての $n \in \mathbb{N}$ について, $\langle X \rangle_n$ は真理操作を mn 回適用した結果である. このとき, すべての論理式 $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \langle X \rangle_n$ について, ある $n \in \mathbb{N}$ があって, x は $\langle X \rangle_n$ の要素である. 論理式全体の集合 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \langle X \rangle_n$ が真理操作を有限回適用した結果であるのではない.

4.5 『論理哲学論考』の存在物は有限であるか

『論理哲学論考』では, 述語論理式の定数記号で表されるような存在物のことを「対象」という. 野矢 (2006) [9, pp. 190–204] では, このような対象の個数は有限であり, 要素命題の個数も有限であると述べられた. また, 真理操作 N がたかだか有限個の論理式を項に持つことが述べられた[*34]. しかし, このとき, 真理操作 N は不必要に複雑な論理演算になるだろう.

$\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ を論理式とすると, 次のような等価性が成立する[*35].

$$\mathrm{N}(\varphi, \varphi) \;\equiv\; \mathrm{N}(\varphi) \;\equiv\; \neg(\varphi).$$

$$\mathrm{N}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \;\equiv\; \neg(\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n) \;\equiv\; \neg(\varphi_1) \wedge \cdots \wedge \neg(\varphi_n).$$

定義 16. $n = 1, 2, \ldots$ について, A_n を次のようにして定める.

$$A_n \overset{\text{def}}{\iff} \mathrm{N}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n).$$

---

*33 記述 5.32 は, 必ずしも継続的でない操作の適用について述べている文ではない.

*34 野矢 (2006) [9] では, この前提によって, すべての論理式が操作を有限回適用することによって得られるため, 記述 5.32 の問題が解決するという論述がされた. しかし, 先述のとおり, 必ずしも継続的でない操作の適用回数は記述 5.32 の主張とは関係ない.

*35 ここでいう等価性とは, 論理式の真理値が等しくなることをいう.

命題 17. 次のような等価性が成立する.

$$A_{n+1} \equiv \mathrm{N}(\mathrm{N}(A_n, A_n), \varphi_{n+1}).$$

証明.

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &\equiv \mathrm{N}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}) \\
&\equiv \neg(\varphi_1) \wedge \cdots \wedge \neg(\varphi_{n+1}) \\
&\equiv (\neg(\varphi_1) \wedge \cdots \wedge \neg(\varphi_n)) \wedge \neg(\varphi_{n+1}) \\
&\equiv A_n \wedge \neg(\varphi_{n+1}) \\
&\equiv \neg(\neg(A_n) \vee \varphi_{n+1}) \\
&\equiv \mathrm{N}(\neg(A_n), \varphi_{n+1}) \\
&\equiv \mathrm{N}(\mathrm{N}(A_n, A_n), \varphi_{n+1}).
\end{aligned}$$

□

すなわち, 2 変数の論理式 $\mathrm{N}(\varphi, \psi)$ の組み合わせによって, 任意の n 変数の論理式 $\mathrm{N}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ と等価な論理式を構成することができる.

$\mathrm{N}(\varphi, \psi)$ は $\mathrm{N}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ よりも構造が単純でありながら, これらは同等の表現力を持つ. このとき, なぜ複雑な $\mathrm{N}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ が用いられるのか, という疑問が生じる[*36][*37].

しかし, $\mathrm{N}(\overline{\xi})$ が無限個の論理式を項に持つならば, これを $\mathrm{N}(\varphi, \psi)$ によって表すことはできない. なぜなら, 帰納的に構成できない論理式は操作の継続的な適用の結果ではなく,『論理哲学論考』で構成できないからである[*38]. 言い換えれば, 真理操作 N が無限個の論理式を項に持つとき, 本来の真理操作 N の必要性が生じる.

要素命題の個数が有限であることと, 真理操作がたかだか有限個の論理式を項に持つことは同値である. したがって, 真理操作 N の必要性を仮定すれば,『論理哲学論考』の要素命題の個数は必ずしも有限ではないと考えられる. また, 要素命題の個数が有限であることと対象の個数が有限であることが同値であると仮定すれば,『論理哲学論考』の対象の個数は必ずしも有限ではないと考えられる.

5 1 変数論理式の継続的な長さ

本節では, 1 変数論理式の継続的な長さという概念を考える. これを次のように定義する.

[*36] 仮に, 理論の単純さを求めないのであれば, 量化と論理演算の関係をより直接的に表すような真理操作, たとえば, $\acute{\wedge}$, $\acute{\vee}$ が用いられないことが疑問である.

[*37] 余談であるが, 2 変数の真理操作 N は, 項の順序が定められれば, 否定論理和 NOR と等価な論理演算である. すなわち, $\mathrm{NOR}(\varphi, \psi) \equiv \mathrm{N}(\varphi, \psi)$ という等価性が成り立つ. NOR と N はどちらも対称式を作るが,『論理哲学論考』では, 記述 5.501 の $\overline{\xi}$ という表記の定義により, N の項の順序が定められていない. そのため, 非対称的な論理式 (e.g. $\varphi \to \psi$) を N で構成することができない. しかし, 理論上は, 有限個 (i.e. 2 個) の項に順序を定めることは容易である.

[*38] 構成不可能な論理式については, 第 8 節で述べる.

定義 18. $p \in \mathrm{Atom}$ を要素命題, O_λ $(\lambda = 1, \ldots, n)$ を 1 変数真理操作とする．$p \in X$ であり, $x \in X$ ならば $O_\lambda(x) \in X$ であるような集合 X を考える．すなわち, X は 1 変数論理式全体の集合である．関数 $f\colon X \to \mathbb{N}$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} f(p) &= 0, \\ f(O_\lambda(x)) &= f(x) + 1. \end{aligned}$$

このとき, $f(x)$ を論理式 x の継続的な長さという．$f(x) = n$ であるとき, x は継続的な長さ n を持つという．

定義 5 により, $f(\sigma_{(O,n)}(p)) = n$ である．すなわち, ただ 1 個だけの真理操作 O 与えられたとき, 論理式 x が継続的な長さ n を持つことは, x がある要素命題に対する O の n 重の継続的な適用の結果であることに等しい[*39].

例 19. p を要素命題とする．このとき, 論理式 $\neg(\neg(\neg(p)))$ は継続的な長さ 3 を持つ．また, $\neg(\neg(\neg(p)))$ は p に対する $\neg$ の 3 重の継続的な適用の結果である．

論理式の継続的な長さは, その論理式の構成方法によって決まる．ある真理操作が別の真理操作の合成によって定義されるとき, 論理式の見た目とその継続的な長さは必ずしも一致しない．

例 20. p を要素命題, α を 1 変数真理操作とする．$\alpha, \neg$ が他の真理操作によらずに定義される論理体系 $L(\neg, \alpha)$ では, $\neg(\alpha(\neg(p)))$ は継続的な長さ 3 を持つ．$\alpha(x) \overset{\mathrm{def}}{\iff} \neg(\neg(x))$ によって α が定義される論理体系 $L(\neg)$ では, $\neg(\alpha(\neg(p))) \equiv \neg(\neg(\neg(\neg(p))))$ は継続的な長さ 4 を持つ．また, $\neg(\neg(\neg(\neg(p))))$ は p に対する $\neg$ の 4 重の継続的な適用の結果である．

論理体系 $L(\neg)$ で $\alpha(x) \overset{\mathrm{def}}{\iff} \neg(\neg(x))$ が定義されるとき, 論理式 $\alpha(x)$ の継続的な長さは次のように得られる．

$$f(\alpha(x)) = f(\neg(\neg(x))) = f(\neg(x)) + 1 = (f(x) + 1) + 1 = f(x) + 2.$$

このようにして, 2 つの等価な論理体系 $L(\neg, \alpha), L(\neg)$ が与えられたとき, $L(\neg, \alpha)$ の論理式の継続的な長さを用いて, $L(\neg)$ で操作の継続的な適用の概念を復元することができる．

『論理哲学論考』では, 操作の継続的な適用の結果という概念は 1 種類の真理操作からなる論理体系について定義されたものである．しかし, この概念の本質的な特徴は, 1 種類の真理操作だけを繰り返して適用することではなく, これが論理式の構成方法を表していることである．ある真理操作が別の真理操作の合成によって得られるとき, 合成された真理操作による論理式の構成方法は保存されている．複数の種類の真理操作を含む論理式が与えられても, これを 1 種類の真理操作による論理式に復元することで, 操作の継続的な適用の結果の概念も復元される．

[*39] 第 3.2 節により, $x \in S_{(O,n)} \iff x = \sigma_{(O,n)}(p) \iff f(x) = n$ である．

6 量化表現の継続的な長さ

本節では, 量化表現の継続的な長さを考える. $\mathrm{OP} \subseteq \{\acute{\wedge}, \acute{\vee}, \mathrm{N}\}$ を真理操作の集合として, 真理操作 $F \in \mathrm{OP}$ による論理式を次のように定義する[*40].

定義 21. 要素命題全体の集合を Atom とする. $F \in \mathrm{OP}$ を真理操作とする. $n = 0, 1, \ldots$ について, 論理式の集合 W_n を次のように帰納的に定義する.

$$W_0 = \mathrm{Atom},$$
$$W_{n+1} = \left\{ F(S) \;\middle|\; S \subseteq \bigcup\nolimits_{i=0}^{n} W_i,\, S \neq \emptyset \right\}.$$

このとき, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$ の要素を量化表現という. ただし, 論理式の性質として, $\varphi = F(S)$ となるような $\varphi \in W_0$ は存在せず, $S \neq T$ ならば $F(S) \neq F(T)$ である.

以降は断りなく定義 21 の W_n を使用する. また, $F(S)$ を省略して FS と書く.

定義 22. W_n の部分集合 L_n を次のようにして定める.

$$\begin{aligned} L_0 &= W_0, \\ L_n &= W_n \setminus W_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

以降は特に断りなく定義 22 の L_n を使用する. 次に, 量化表現の継続的な長さを次のようにして定義する.

定義 23. $FS \in \bigcup_{n \geq 1} W_n$ とする. 関数 $\mathrm{len}\colon \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n \longrightarrow \mathbb{N}$ を次のようにして定義する.

- $x \in W_0 \implies \mathrm{len}(x) = 0.$
- $\exists x \in S \,[\mathrm{len}(x) = n]\,, \forall y \in S \,\exists m \leq n \,[\mathrm{len}(y) = m] \implies \mathrm{len}(FS) = n + 1.$

このとき, $\mathrm{len}(x)$ を x の継続的な長さという. また, $\mathrm{len}(x) = n$ であるとき, x は継続的な長さ n を持つという.

すなわち, すべての要素命題は継続的な長さ 0 を持ち, 論理式 FS の継続的な長さは, S の元の継続的な長さの最大値に 1 を足したものである.

補題 24. すべての $n = 1, 2, \ldots$ について, 次の等式が成り立つ.

$$W_n = \bigcup_{i=1}^{n} W_i.$$

[*40] 論理式の継続的な長さは原始的な真理操作の選択によって定まる. OP は原始的に定義された真理操作記号の集合を意味する. 『論理哲学論考』の論理体系では, $\mathrm{OP} = \{\mathrm{N}\}$ である.

証明. k について数学的帰納法を使用する．$W_1 = \bigcup_{i=1}^{1} W_i$ は明らかに成り立つ．ここで，$W_k = \bigcup_{i=1}^{k} W_i$ を仮定する．定義 21 により，

$$FS \in W_k \iff S \subseteq \bigcup_{i=0}^{k-1} W_i,\ S \neq \emptyset,$$
$$FS \in W_{k+1} \iff S \subseteq \bigcup_{i=0}^{k} W_i,\ S \neq \emptyset.$$

よって，$W_k \subseteq W_{k+1}$．したがって，

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{k+1} W_i &= \bigcup_{i=1}^{k} W_i \cup W_{k+1} \\ &= W_k \cup W_{k+1} \\ &= W_{k+1}. \end{aligned}$$

よって，

$$W_n = \bigcup_{i=1}^{n} W_i.$$

□

補題 25. すべての $n = 0, 1, \ldots$ について，次の等式が成立する．

$$\bigcup_{i=0}^{n} L_i = \bigcup_{i=0}^{n} W_i.$$

証明. k について数学的帰納法を使用する．定義 21 により，$W_0 \cap W_1 = \emptyset$ なので，

$$\begin{aligned} L_1 &= W_1 \setminus W_0 \\ &= W_1. \end{aligned}$$

$\bigcup_{i=1}^{k} L_i = \bigcup_{i=1}^{k} W_i$ を仮定する．補題 24 により，$W_n = \bigcup_{i=1}^{n} W_i$ なので，

$$\begin{aligned} L_{k+1} &= W_{k+1} \setminus W_k \\ L_{k+1} &= \bigcup_{i=1}^{k+1} W_i \setminus \bigcup_{i=1}^{k} W_i \\ \bigcup_{i=1}^{k} W_i \cup L_{k+1} &= \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} W_i \setminus \bigcup_{i=1}^{k} W_i \right) \cup \bigcup_{i=1}^{k} W_i \\ \bigcup_{i=1}^{k} L_i \cup L_{k+1} &= \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} W_i \cup \bigcup_{i=1}^{k} W_i \right) \cap \left(\left(\bigcup_{i=1}^{k} W_i \right)^{\complement} \cup \bigcup_{i=1}^{k} W_i \right) \\ \bigcup_{i=1}^{k+1} L_i &= \bigcup_{i=1}^{k+1} W_i \cup \bigcup_{i=1}^{k} W_i \\ \bigcup_{i=1}^{k+1} L_i &= \bigcup_{i=1}^{k+1} W_i. \end{aligned}$$

よって, $n=1,2,\ldots$ について, $\bigcup_{i=1}^{n} L_i = \bigcup_{i=1}^{n} W_i$. 定義 22 により, $L_0 = W_0$. よって, $n=0,1,\ldots$ について,

$$\bigcup_{i=0}^{n} L_i = \bigcup_{i=0}^{n} W_i.$$

□

系 26. 次の等式が成立する.

$$\bigcup_{i=1}^{n} L_n = \bigcup_{i=1}^{n} W_n.$$

命題 27. 次の等式が成立する.

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n.$$

証明. $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$ ならば, $x \in L_n$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する. したがって, $x \in \bigcup_{i=0}^{n} L_i$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する. 補題 25 により, $\bigcup_{i=0}^{n} L_i = \bigcup_{i=0}^{n} W_i \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$. よって, $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$ ならば, $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$. 同様にして, $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$ ならば, $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$. よって,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n.$$

□

命題 28. 任意の $m, n = 0,1,\ldots$ について, 次が成り立つ.

$$m \neq n \implies L_m \cap L_n = \emptyset.$$

証明. 定義 22 により, $L_0 = W_0$, $L_n \subseteq W_n$. $n=1,2,\ldots$ について, $W_0 \cap W_n = \emptyset$ なので, $L_0 \cap L_n = \emptyset$. 定義 22, 補題 24, 系 26 により, $n=1,2,\ldots$ について,

$$\begin{aligned} L_n &= W_n \setminus W_{n-1} \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} W_i \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} W_i \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} L_i \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} L_i. \end{aligned}$$

したがって,

$$L_n \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} L_i = \emptyset.$$

ここで, $m < n$ とすると,

$$L_m \subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} L_i$$

であるので,

$$m < n \implies L_m \cap L_n = \emptyset.$$

同様にして, $n < m$ の場合でも, $L_m \cap L_n = \emptyset$ であることがわかる. よって,

$$m \neq n \implies L_m \cap L_n = \emptyset.$$

□

補題 29. $\mathrm{len}_{\max}(X)$ を X の要素の継続的な長さの最大値とする. このとき, 次の等式が成立する.

$$\mathrm{len}_{\max}(W_n) = n.$$

証明. k について完全帰納法を使用する. 定義 23 により, $\mathrm{len}_{\max}(W_0) = 0$. ここで, $m = 0, 1, \ldots, k$ について, $\mathrm{len}_{\max}(W_m) = m$ を仮定する. 定義 21 により,

$$FS \in W_{k+1} \iff S \subseteq \bigcup_{i=0}^{k} W_i,\, S \neq \emptyset.$$

したがって, $FS \in W_{k+1}$ のとき, $\mathrm{len}_{\max}(S) = k$. 定義 23 により, $\mathrm{len}(FS) = k+1$. よって, $\mathrm{len}_{\max}(W_n) = n$. □

命題 30. 次の同値性が成立する.

$$x \in L_n \iff \mathrm{len}(x) = n.$$

証明. まず, $(\Rightarrow)$ を示す. k について完全帰納法を使用する. 定義 22, 23 により, $x \in L_0$ ならば, $\mathrm{len}(x) = 0$. ここで, $m = 1, \ldots, k$ について, $x \in L_m \Longrightarrow \mathrm{len}(x) = m$ を仮定する. 定義 22, 補題 25 により,

$$\begin{aligned} L_{k+1} &= W_{k+1} \setminus W_k \\ &= \bigcup_{i=1}^{k+1} L_i \setminus \bigcup_{i=1}^{k} L_i. \end{aligned}$$

命題 28 により, $x \in L_{k+1}$ ならば, $x \notin L_m$ $(m = 1, \ldots, k)$ なので, 仮定により, $\mathrm{len}(x) \neq 1, \ldots, k$. $x \in L_{k+1}$ ならば, $x \notin L_0$ なので, $\mathrm{len}(x) \neq 0$. すなわち,

$$x \in L_{k+1} \implies \mathrm{len}(x) \neq 0, \ldots, k.$$

補題 24, 29, 系 26 により,

$$\mathrm{len}_{\max}\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} L_i\right) = \mathrm{len}_{\max}(W_{k+1}) = k+1.$$

したがって, $L_{k+1} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k+1} L_i$ により, $x \in L_{k+1}$ ならば, $\mathrm{len}(x) \leq k+1$. よって,

$$x \in L_{k+1} \implies \mathrm{len}(x) = k+1.$$

したがって,

$$x \in L_n \implies \mathrm{len}(x) = n.$$

次に, ($\Leftarrow$) を示す. 定義 23, 命題 27, 命題 28 により, $\mathrm{len}(x) = n$ ならば, ただ 1 つの $n \in \mathbb{N}$ があって, $x \in L_n$. これを $x \in L_m$ とする. すでに示した ($\Rightarrow$) により, $x \in L_n$ ならば $\mathrm{len}(x) = n$. したがって, $L_m = L_n$. よって,

$$\mathrm{len}(x) = n \implies x \in L_n.$$

よって,

$$x \in L_n \iff \mathrm{len}(x) = n.$$

□

命題 27, 28, 30 により, 次のことが成立する.

$$\varphi \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n \iff \varphi \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n \iff \varphi\text{が継続的な長さ}\ {}^{\exists!}n \in \mathbb{N}\ \text{を持つ}.$$

すなわち,『論理哲学論考』で構成可能なすべての論理式は継続的な長さを持ち, 継続的な長さを持つ論理式は『論理哲学論考』で構成可能である. このとき, 論理式の継続的な長さは一意的に定まる.

第 3.3 節で言及した「類別された論理式の一般的な形式」は, このようにして得られる論理式の集合の列 $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ である. 命題 30 により, L_n は「要素命題に対する真理操作 N の n 重の継続的な適用の結果」という概念を特徴づけている.

7 量化表現の構成

本節では, 真理操作 N を用いていくつかの量化表現を構成する. その方法は次の 2 つである.

- 特定の閉論理式*41の集合から論理式の記号の集合への対応づけを定めて, 定義 2 の真理値解釈を用いる.
- 一階述語論理の構造を用いて, 真理操作 N に変数とその割り当ての概念を与える.

前者は『論理哲学論考』のアイデアに即したものであり, この方法は Fogelin (1987) [2], 飯田 (1989) [6], 野矢 (2006) [9], Connelly (2017) [1] による構成方法と類似している部分がある. 後者は一階述語論理に新しい量化子 N を導入して, それによって真理操作 N を表現するという方法である. 真理操作 N に変数記号を与えるという点では, Geach (1981)[3], Soames (1983) [5] によるアイデアと類似している部分がある.

*41 自由変数記号を含まない論理式のことを閉論理式という. つまり, それ単体で真理値の解釈が与えられるような論理式のことである.

7.1 閉論理式を用いた構成方法

定義 31. 論理式 $\neg(\varphi)$ の真理値 $v(\neg(\varphi)) \in \{0,1\}$ を次のようにして定める.

$$v\left(\neg(\varphi)\right) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad v(\varphi) = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

補題 32. φ を論理式, $X = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ を論理式の集合とすると, 定義 2, 31 により, 次のような等価性が成立する.

$$\mathrm{N}(\varphi) \ \equiv \ \neg(\varphi).$$

$$\mathrm{N}(\varphi_1, \varphi_2, \dots) \ \equiv \ \neg(\acute{\bigvee}(\varphi_1, \varphi_2, \dots)) \ \equiv \ \acute{\bigwedge}(\neg(\varphi_1), \neg(\varphi_2), \dots).$$

$$\neg(\acute{\bigwedge}(\varphi_1, \varphi_2, \dots)) \ \equiv \ \acute{\bigvee}(\neg(\varphi_1), \neg(\varphi_2), \dots).$$

証明. 後の証明で使用するものだけ証明する.

$$\begin{aligned} v(\mathrm{N}(\varphi)) = 1 &\iff \forall \psi \in \{\varphi\} \, [v(\psi) = 0] \\ &\iff v(\varphi) = 0 \\ &\iff v(\neg(\varphi)) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(\mathrm{N}(\varphi_1, \varphi_2, \dots)) = 1 &\iff \forall \psi \in \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \, [v(\psi) = 0] \\ &\iff \neg \exists \psi \in \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \, [v(\psi) = 1] \\ &\iff v((\acute{\bigvee}(\varphi_1, \varphi_2, \dots)) = 0 \\ &\iff v(\neg(\acute{\bigvee}(\varphi_1, \varphi_2, \dots))) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(\neg(\acute{\bigwedge}(\varphi_1, \varphi_2, \dots))) = 1 &\iff v(\acute{\bigwedge}(\varphi_1, \varphi_2, \dots)) = 0 \\ &\iff \neg \forall \psi \in \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \, [v(\psi) = 1] \\ &\iff \exists \psi \in \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \, [v(\psi) = 0] \\ &\iff \exists \psi \in \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \, [v(\neg(\psi)) = 1] \\ &\iff \exists \psi \in \{\neg(\varphi_1), \neg(\varphi_2), \dots\} \, [v(\neg(\neg(\psi))) = 1] \\ &\iff \exists \psi \in \{\neg(\varphi_1), \neg(\varphi_2), \dots\} \, [v(\psi) = 1] \\ &\iff v(\acute{\bigvee}(\neg(\varphi_1), \neg(\varphi_2), \dots)) = 1. \end{aligned}$$

□

補題 33. 次のような等価性が成立する.

$$\acute{\bigvee}(\varphi_1, \varphi_2, \dots) \ \equiv \ \mathrm{N}(\mathrm{N}(\varphi_1, \varphi_2, \dots)).$$

$$\acute{\bigwedge}(\varphi_1, \varphi_2, \dots) \ \equiv \ \mathrm{N}(\mathrm{N}(\varphi_1), \mathrm{N}(\varphi_2), \dots).$$

証明.

$$\begin{aligned} \acute{\bigvee}(\varphi_1, \varphi_2, \dots) &\equiv \neg(\neg(\acute{\bigvee}(\varphi_1, \varphi_2, \dots))) \\ &\equiv \mathrm{N}(\mathrm{N}(\varphi_1, \varphi_2, \dots)). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\acute{\wedge}(\varphi_1, \varphi_2, \dots) &\equiv \neg(\neg(\acute{\wedge}(\varphi_1, \varphi_2, \dots))) \\
&\equiv \neg(\acute{\vee}(\neg(\varphi_1), \neg(\varphi_2), \dots)) \\
&\equiv \mathrm{N}(\neg(\varphi_1), \neg(\varphi_2), \dots) \\
&\equiv \mathrm{N}(\mathrm{N}(\varphi_1), \mathrm{N}(\varphi_2), \dots).
\end{aligned}
$$

□

定義 34. 添字集合 $I = \{1, 2, \dots\}$ から論理式の集合 $X = \{\psi_1, \psi_2, \dots\}$ への一対一対応により, 次のような表記法を定義する.

$$\{\psi_i\}_{i \in I} \overset{\text{def}}{\iff} \{\psi_1, \psi_2, \dots\}.$$

この表記法を用いて, 次が得られる.

$$
\begin{aligned}
\acute{\vee}(\{\varphi_i\}_{i \in I}) &\equiv \mathrm{N}(\mathrm{N}(\{\varphi_i\}_{i \in I})). \\
\acute{\wedge}(\{\varphi_i\}_{i \in I}) &\equiv \mathrm{N}(\{\mathrm{N}(\varphi_i)\}_{i \in I}).
\end{aligned}
$$

一階述語論理のモデル $\mathcal{M}$ が与えられたとする. 添字の組の集合 $I \times J$ から定数記号の組の集合への一対一対応 $(i, j) \mapsto (x_i, y_j)$ を定める. このとき, 各 (i, j) に対して, 原子論理式 $P(x_i, y_j)$ が一意的に定まる. また, 一階述語論理の開論理式 $P(x, y)$ について, 変数の割り当て $g[x \mapsto [\![x_i]\!], y \mapsto [\![y_j]\!]]$ が与えられたとする. ただし, $[\![a]\!]$ は a の解釈, すなわち, モデル $\mathcal{M}$ の領域 D の値とする.

$$
\begin{tikzcd}
\text{変数記号 } x, y \arrow[r, "{[\![\,]\!]_{\mathcal{M},g}}"] \arrow[d, "\text{述語 } P"] & {[\![x_i]\!], [\![y_j]\!] \in D} & \text{定数記号 } x_i, y_j \, (i, j \in I \times J) \arrow[l, "{[\![\,]\!]_{\mathcal{M}}}"'] \arrow[d, "\text{述語 } P"] \\
\text{開論理式 } P(x, y) \arrow[r, "{[\![\,]\!]_{\mathcal{M},g}}"] \arrow[d, "\text{量化子 } \forall, \exists"] & \{0, 1\} & \text{閉論理式 } P(x_i, y_j) \arrow[l, "{v = [\![\,]\!]_{\mathcal{M}}}"'] \arrow[d, "\text{真理操作 } \acute{\wedge}, \acute{\vee}, \mathrm{N}"] \\
\text{一階述語論理の量化文} \arrow[r, "{[\![\,]\!]_{\mathcal{M},g}}"] & \{0, 1\} & \text{量化表現} \arrow[l, "{v = [\![\,]\!]_{\mathcal{M}}}"']
\end{tikzcd}
$$

このとき, 2 つの言語間で次のような等価性が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
\forall x \forall y P(x, y) &\equiv \acute{\wedge}(\{\acute{\wedge}(\{P(x_i, y_j)\}_{j \in J})\}_{i \in I}). \\
\forall x \exists y P(x, y) &\equiv \acute{\wedge}(\{\acute{\vee}(\{P(x_i, y_j)\}_{j \in J})\}_{i \in I}). \\
\exists x \forall y P(x, y) &\equiv \acute{\vee}(\{\acute{\wedge}(\{P(x_i, y_j)\}_{j \in J})\}_{i \in I}). \\
\exists x \exists y P(x, y) &\equiv \acute{\vee}(\{\acute{\vee}(\{P(x_i, y_j)\}_{j \in J})\}_{i \in I}).
\end{aligned}
$$

ここで, 真理操作 $F = \mathrm{N}, \acute{\vee}, \acute{\wedge}$ について, 次のような表記法を定める.

$$
\begin{array}{c} F \\ \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \\ \vdots \end{pmatrix} \end{array}
\overset{\text{def}}{\iff} F(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots).
$$

命題 35. 補題 33 により, 以下のような等価性が成立する.

$$
\begin{aligned}
\forall x \forall y P(x,y) &\equiv \acute{\wedge}(\{\acute{\wedge}(\{P(x_i,y_j)\}_{j\in J})\}_{i\in I}) \\
&\equiv \acute{\wedge}\left(\overset{\acute{\wedge}}{\begin{pmatrix} P(x_1,y_1) \\ \vdots \\ P(x_1,y_n) \\ \vdots \end{pmatrix}}, \ldots, \overset{\acute{\wedge}}{\begin{pmatrix} P(x_m,y_1) \\ \vdots \\ P(x_m,y_n) \\ \vdots \end{pmatrix}}, \ldots \right) \\
&\equiv \mathrm{N}\left(\mathrm{N}\left(\overset{\mathrm{N}}{\begin{pmatrix} \mathrm{N}(P(x_1,y_1)) \\ \vdots \\ \mathrm{N}(P(x_1,y_n)) \\ \vdots \end{pmatrix}} \right), \ldots, \mathrm{N}\left(\overset{\mathrm{N}}{\begin{pmatrix} \mathrm{N}(P(x_m,y_1)) \\ \vdots \\ \mathrm{N}(P(x_m,y_n)) \\ \vdots \end{pmatrix}} \right), \ldots \right) \\
&\equiv \mathrm{N}(\{\mathrm{N}(\mathrm{N}(\{\mathrm{N}(P(x_i,y_j))\}_{j\in J}))\}_{i\in I}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\forall x \exists y P(x,y) &\equiv \acute{\wedge}(\{\acute{\vee}(\{P(x_i,y_j)\}_{j\in J})\}_{i\in I}) \\
&\equiv \acute{\wedge}\left(\overset{\acute{\vee}}{\begin{pmatrix} P(x_1,y_1) \\ \vdots \\ P(x_1,y_n) \\ \vdots \end{pmatrix}}, \ldots, \overset{\acute{\vee}}{\begin{pmatrix} P(x_m,y_1) \\ \vdots \\ P(x_m,y_n) \\ \vdots \end{pmatrix}}, \ldots \right) \\
&\equiv \mathrm{N}\left(\mathrm{N}\left(\mathrm{N}\left(\overset{\mathrm{N}}{\begin{pmatrix} P(x_1,y_1) \\ \vdots \\ P(x_1,y_n) \\ \vdots \end{pmatrix}} \right)\right), \ldots, \mathrm{N}\left(\mathrm{N}\left(\overset{\mathrm{N}}{\begin{pmatrix} P(x_m,y_1) \\ \vdots \\ P(x_m,y_n) \\ \vdots \end{pmatrix}} \right)\right), \ldots \right) \\
&\equiv \mathrm{N}\left(\overset{\mathrm{N}}{\begin{pmatrix} P(x_1,y_1) \\ \vdots \\ P(x_1,y_n) \\ \vdots \end{pmatrix}}, \ldots, \overset{\mathrm{N}}{\begin{pmatrix} P(x_m,y_1) \\ \vdots \\ P(x_m,y_n) \\ \vdots \end{pmatrix}}, \ldots \right) \\
&\equiv \mathrm{N}(\{\mathrm{N}(\{P(x_i,y_j)\}_{j\in J})\}_{i\in I}) \\
&\equiv \mathrm{N}(\{\mathrm{N}(\mathrm{N}(\mathrm{N}(\{P(x_i,y_j)\}_{j\in J})))\}_{i\in I}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\exists x \forall y P(x,y) &\equiv \acute{\vee}(\{\acute{\wedge}(\{P(x_i,y_j)\}_{j\in J})\}_{i\in I}) \\
&\equiv \acute{\vee}\left(\overset{\acute{\wedge}}{\begin{pmatrix} P(x_1,y_1) \\ \vdots \\ P(x_1,y_n) \\ \vdots \end{pmatrix}}, \dots, \overset{\acute{\wedge}}{\begin{pmatrix} P(x_m,y_1) \\ \vdots \\ P(x_m,y_n) \\ \vdots \end{pmatrix}}, \dots \right) \\
&\equiv \mathrm{N}\left(\mathrm{N}\left(\overset{\mathrm{N}}{\begin{pmatrix} \mathrm{N}(P(x_1,y_1)) \\ \vdots \\ \mathrm{N}(P(x_1,y_n)) \\ \vdots \end{pmatrix}}, \dots, \overset{\mathrm{N}}{\begin{pmatrix} \mathrm{N}(P(x_m,y_1)) \\ \vdots \\ \mathrm{N}(P(x_m,y_n)) \\ \vdots \end{pmatrix}}, \dots \right)\right) \\
&\equiv \mathrm{N}(\mathrm{N}(\{\mathrm{N}(\{\mathrm{N}(P(x_i,y_j))\}_{j\in J})\}_{i\in I})).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\exists x \exists y P(x,y) &\equiv \acute{\vee}(\{\acute{\vee}(\{P(x_i,y_j)\}_{j\in J})\}_{i\in I}) \\
&\equiv \acute{\vee}\left(\overset{\acute{\vee}}{\begin{pmatrix} P(x_1,y_1) \\ \vdots \\ P(x_1,y_n) \\ \vdots \end{pmatrix}}, \dots, \overset{\acute{\vee}}{\begin{pmatrix} P(x_m,y_1) \\ \vdots \\ P(x_m,y_n) \\ \vdots \end{pmatrix}}, \dots \right) \\
&\equiv \mathrm{N}\left(\mathrm{N}\left(\mathrm{N}\left(\overset{\mathrm{N}}{\begin{pmatrix} P(x_1,y_1) \\ \vdots \\ P(x_1,y_n) \\ \vdots \end{pmatrix}} \right), \dots, \mathrm{N}\left(\overset{\mathrm{N}}{\begin{pmatrix} P(x_m,y_1) \\ \vdots \\ P(x_m,y_n) \\ \vdots \end{pmatrix}} \right), \dots \right)\right) \\
&\equiv \mathrm{N}(\mathrm{N}(\{\mathrm{N}(\mathrm{N}(\{P(x_i,y_j)\}_{j\in J}))\}_{i\in I})).
\end{aligned}
$$

ここで構成された論理式が $\acute{\wedge}, \acute{\vee}$ による論理体系 $L(\acute{\wedge}, \acute{\vee})$ で構成されたものであれば, すなわち, $\mathrm{OP} = \{\acute{\wedge}, \acute{\vee}\}$ であれば, これらは第 6 節の L_2 の要素である．このとき, これらの論理式はいずれも継続的な長さ 2 を持つ．N による論理体系 $L(\mathrm{N})$ で構成されたものであれば, L_4 の要素である．このとき, これらの論理式は継続的な長さ 4 を持つ．すなわち, 要素命題に対する真理操作 N の 4 重の継続的な適用の結果である．ただし, N による 2 重否定を消去して得られた意味的に等価な論理式 $\mathrm{N}(\{\mathrm{N}(\{P(x_i,y_j)\}_{j\in J})\}_{i\in I})$ は L_2 の要素である．したがって, この論理式は継続的な長さ 2 を持ち, 要素命題に対する真理操作 N の 2 重の継続的な適用の結果である．

本稿では, 添字づけを用いることによって, 無限個の論理式を項に持つ論理式を書き表している．この表記法は『論理哲学論考』で使われるものではないが, そのアイデアは記述 5.501 で示唆されている．記述 5.501 では次のように述べられている[*42][*43].

> Wie die Beschreibung der Glieder des Klammerausdruckes geschieht, ist unwesentlich.
>
> Wir k ö n n e n drei ArtenderBeschreibung unterscheiden: 1. Die direkte Aufzählung. In diesem Fall können wir statt der Variablen einfach ihre konstanten Werte setzen. 2. Die Angabe einer Funktion fx, deren Werte für alle Werte von x die zu beschreibenden Sätze sind. 3. Die Angabe eines formalen Gesetzes, nach welchem jene Sätze gebildet sind. In diesem Falle sind die Glieder des Klammerausdrucks sämtliche Glieder einer Formenreihe.

英語訳は次のとおりである[*44].

> How the description of the terms of the expression in brackets takes place is unessential.
>
> We may distinguish 3 kinds of description: 1. Direct enumeration. In this case we can place simply its constant values instead of the variable. 2. Giving a function fx, whose values for all values of x are the propositions to be described. 3. Giving a formal law, according to which those propositions are constructed. In this case the terms of the expression in brackets are all the terms of a formal series.

日本語訳は次のとおりである[*45].

> 括弧づきの表現の諸項がいかに記述されるかは、非本質的なことである。
>
> 我々は三通りの記述の仕方を区別できる。1、直接の枚挙。この場合、変項に代えて即座にその定項的な値を与えることができる。2、その値が記述されるべき諸命題となるような関数 fx を、x の全ての値について陳述すること。3、当の諸命題を形づくる形式的法則の陳述。この場合括弧づきの表現の項が、ある形式的系列の総ての項であることとなる。

本節で用いられた表記法は記述 5.501 で言及されている 2 つ目の表記法に該当する．すな

---

*42 ここで引用されているものは記述 5.501 の一部である．

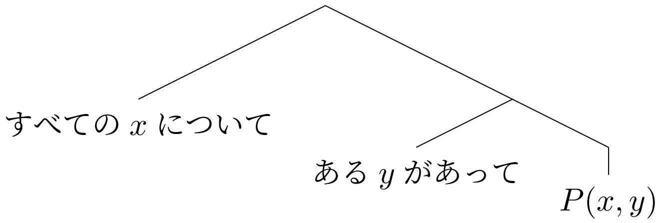
*43 英語訳の “expression in brackets” はドイツ語原文の “Klammerausdruckes” の訳語である．“Klammer” は日本語の「かっこ」と同様に, かっこの種類を問わずに用いられる．“bracket” は, 特にアメリカ英語では, 角かっこを意味する語として用いられるが, ここでは, 丸かっこを意味する語として用いられている．

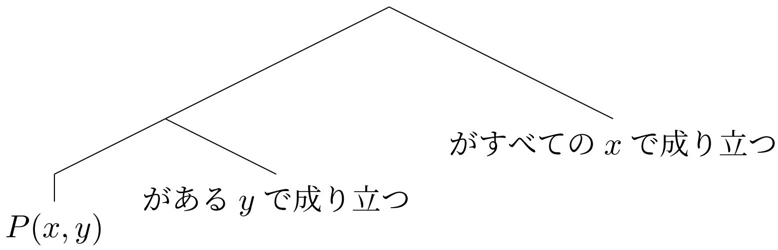
*44 英語訳は Ramsey and Ogden (1922) [4] による．

*45 日本語訳は奥 (1975) [7] による．

わち, 自然数からなる添字集合から閉論理式の集合への関数を用いた表記法である. 無限個の論理式を実際に記述して枚挙することはできない. しかし, 記述 5.501 で述べられているように,『論理哲学論考』では, 真理操作の項に含まれるすべての論理式を実際に記述するかどうかは, 非本質的なことである.

閉論理式を用いて量化表現を書き表すことによって, 量化文の意味が直観的に理解しやすくなるかもしれない. たとえば, $\forall x \exists y P(x,y)$ は自然言語で「すべての x について, ある y があって, $P(x,y)$ である」のように言い表される. $\acute{\wedge}, \acute{\vee}$ による量化表現を見れば, これを「$P(x,y)$ である, ということがある y について成り立つ, ということがすべての x について成り立つ」というように言い表すことができるだろう. これらの文の入れ子構造は次のように表される[46].





$\forall x \exists y P(x,y)$ という表記が本来 $\forall x(\exists y(P(x,y)))$ という論理式のかっこを省略したものであることを考えれば, このような自然言語の表現方法は不思議なものではないだろう.

7.2 一階述語論理の構造を用いた構成方法

一階述語論理のモデル $\mathcal{M}$ が与えられたとする. $D \neq \emptyset$ を $\mathcal{M}$ の領域とする.

定義 36. 変数の割り当て g とは, 変数記号の集合からモデルの領域への関数 $g\colon \mathrm{Var} \to D$ のことである. ここで, 変数 x の値を d に置き換えた関数 $g[x \mapsto d]$ を次のように定義する.

$$g[x \mapsto d](r) = \begin{cases} d & \text{if} \quad r = x, \\ g(r) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

通常の一階述語論理の論理記号と同様にして, 量化子 N を次のようにして定義する.

定義 37. モデル $\mathcal{M}$, 変数の割り当て g における論理式 $\psi = \neg\varphi, \forall x\varphi, \exists x\varphi, \mathrm{N}x\varphi$ の真理値

[46] 二股分岐は表記上のものである.

$[\![\psi]\!]_{\mathcal{M},g} \in \{0,1\}$ を次のようにして定める.

$$[\![\neg\varphi]\!]_{\mathcal{M},g} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},g} = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$[\![\forall x\varphi]\!]_{\mathcal{M},g} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \forall d \in D\left[[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},g[x\mapsto d]} = 1\right], \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$[\![\exists x\varphi]\!]_{\mathcal{M},g} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \exists d \in D\left[[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},g[x\mapsto d]} = 1\right], \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$[\![\mathrm{N}x\varphi]\!]_{\mathcal{M},g} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \forall d \in D\left[[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},g[x\mapsto d]} = 0\right], \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

補題 38. 次のような等価性が成り立つ.

$$\forall x\neg\varphi \ \equiv \ \neg\exists x\varphi \ \equiv \ \mathrm{N}x\varphi.$$

$$\neg\forall x\varphi \ \equiv \ \exists x\neg\varphi \ \equiv \ \neg\mathrm{N}x\neg\varphi.$$

$$\forall x\varphi \ \equiv \ \neg\exists x\neg\varphi \ \equiv \ \mathrm{N}x\neg\varphi.$$

$$\neg\forall x\neg\varphi \ \equiv \ \exists x\varphi \ \equiv \ \neg\mathrm{N}x\varphi.$$

証明. 後の証明で使用するものだけを証明する.

$$\begin{aligned} [\![\forall x\varphi]\!]_{\mathrm{M},g} = 1 &\iff \forall d \in D\left[[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},g[x\mapsto d]} = 1\right] \\ &\iff \forall d \in D\left[[\![\neg\varphi]\!]_{\mathcal{M},g[x\mapsto d]} = 0\right] \\ &\iff [\![\mathrm{N}x\neg\varphi]\!]_{\mathcal{M},g} = 1. \end{aligned}$$

したがって, $\forall x\varphi \equiv \mathrm{N}x\neg\varphi$.

$$\begin{aligned} [\![\exists x\varphi]\!]_{\mathrm{M},g} = 1 &\iff \exists d \in D\left[[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},g[x\mapsto d]} = 1\right] \\ &\iff \neg\forall d \in D\left[[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},g[x\mapsto d]} \neq 1\right] \\ &\iff \neg\forall d \in D\left[[\![\neg\varphi]\!]_{\mathcal{M},g[x\mapsto d]} = 1\right] \\ &\iff [\![\forall x\neg\varphi]\!]_{\mathcal{M},g} = 0 \\ &\iff [\![\mathrm{N}x\varphi]\!]_{\mathcal{M},g} = 0 \\ &\iff [\![\neg\mathrm{N}x\varphi]\!]_{\mathcal{M},g} = 1. \end{aligned}$$

したがって, $\exists x\varphi \equiv \neg\mathrm{N}x\varphi$. □

補題 39. 次のような等価性が成り立つ.

$$\begin{aligned} \forall x \forall y \varphi &\equiv \mathrm{N}x \neg \mathrm{N}y \neg \varphi. \\ \forall x \exists y \varphi &\equiv \mathrm{N}x \mathrm{N}y \varphi. \\ \exists x \forall y \varphi &\equiv \neg \mathrm{N}x \mathrm{N}y \neg \varphi. \\ \exists x \exists y \varphi &\equiv \neg \mathrm{N}x \neg \mathrm{N}y \varphi. \end{aligned}$$

証明. 補題 38 により, 以下のように示される.

$$\begin{aligned} \forall x \forall y \varphi &\equiv \mathrm{N}x \neg \forall y \varphi \\ &\equiv \mathrm{N}x \neg \mathrm{N}y \neg \varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x \exists y \varphi &\equiv \mathrm{N}x \neg \exists y \varphi \\ &\equiv \mathrm{N}x \mathrm{N}y \varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exists x \forall y \varphi &\equiv \neg \mathrm{N}x \forall y \varphi \\ &\equiv \neg \mathrm{N}x \mathrm{N}y \neg \varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exists x \exists y \varphi &\equiv \neg \mathrm{N}x \exists y \varphi \\ &\equiv \neg \mathrm{N}x \neg \mathrm{N}y \varphi. \end{aligned}$$

□

定義 40. 論理式 φ について, $\mathrm{FV}(\varphi)$ を φ の自由変数全体の集合とする. $\delta \notin \mathrm{FV}(\varphi)$ であるとき, δ は φ のダミー変数であるという.

補題 41. δ が φ のダミー変数であるとき, すべての $d \in D$ について, 次の等式が成り立つ.

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},g} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},g[\delta \mapsto d]}.$$

証明. $\varphi = \forall x \psi$ の場合だけを証明する. $\delta \notin \mathrm{FV}(\forall x \psi)$ とする. ψ の構造に関する帰納法を使用する. 定義 37 により,

$$[\![\forall x \psi]\!]_{\mathcal{M},g[\delta \mapsto d]} = 1 \iff \forall e \in D \left[[\![\psi]\!]_{\mathcal{M},(g[\delta \mapsto d])[x \mapsto e]} = 1 \right].$$

$\delta = x$ ならば, $(g[x \mapsto e])[\delta \mapsto d] = g[x \mapsto e]$ なので, 定義 37 により従う. $\delta \neq x$ ならば, $\delta \notin \mathrm{FV}(\psi)$ であり,

$$(g[\delta \mapsto d])[x \mapsto e] = (g[x \mapsto e])[\delta \mapsto d].$$

帰納法の仮定により, $[\![\psi]\!]_{\mathcal{M},g[x \mapsto e]} = [\![\psi]\!]_{\mathcal{M},(g[x \mapsto e])[\delta \mapsto d]}$. よって, 定義 37 により,

$$[\![\forall x \psi]\!]_{\mathcal{M},g} = [\![\forall x \psi]\!]_{\mathcal{M},g[\delta \mapsto d]}.$$

□

すなわち, ダミー変数の値 $g(\delta)$ をどの $d \in D$ に変更しても論理式の真理値は変わらない.

補題 42. δ が φ のダミー変数であるとき, 次の等価性が成り立つ.

$$\forall\delta\varphi \ \equiv\ \varphi.$$

$$\exists\delta\varphi \ \equiv\ \varphi.$$

$$\mathrm{N}\delta\varphi \ \equiv\ \neg\varphi.$$

証明. 補題 41 により, 以下のように示される.

$$\begin{aligned}
[\![\forall\delta\varphi]\!]_{\mathcal{M},g} = 1 &\iff \forall d \in D\left[[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},g[\delta\mapsto d]} = 1\right]\\
&\iff \forall d \in D\left[[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},g} = 1\right]\\
&\iff [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},g} = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\![\exists\delta\varphi]\!]_{\mathcal{M},g} = 1 &\iff \exists d \in D\left[[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},g[\delta\mapsto d]} = 1\right]\\
&\iff \exists d \in D\left[[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},g} = 1\right]\\
&\iff [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},g} = 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\![\mathrm{N}\delta\varphi]\!]_{\mathcal{M},g} = 1 &\iff \forall d \in D\left[[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},g[\delta\mapsto d]} = 0\right]\\
&\iff \forall d \in D\left[[\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},g} = 0\right]\\
&\iff [\![\varphi]\!]_{\mathcal{M},g} = 0\\
&\iff [\![\neg\varphi]\!]_{\mathcal{M},g} = 1.
\end{aligned}$$

□

命題 43. $\delta \notin \mathrm{FV}(\varphi)$ とする. 補題 39, 42 により, 次のような等価性が成り立つ.

$$\forall x\forall y\varphi \ \equiv\ \mathrm{N}x\mathrm{N}\delta\mathrm{N}y\mathrm{N}\delta\varphi.$$

$$\forall x\exists y\varphi \ \equiv\ \mathrm{N}x\mathrm{N}y\varphi.$$

$$\exists x\forall y\varphi \ \equiv\ \mathrm{N}\delta\mathrm{N}x\mathrm{N}y\mathrm{N}\delta\varphi.$$

$$\exists x\exists y\varphi \ \equiv\ \mathrm{N}\delta\mathrm{N}x\mathrm{N}\delta\mathrm{N}y\varphi.$$

命題 44. $\delta \notin \mathrm{FV}(\varphi)$ とする. 補題 42, $\neg\neg\varphi \equiv \varphi$ により, 次が成立する.

$$\forall x\exists y\varphi \ \equiv\ \mathrm{N}x\mathrm{N}y\varphi \ \equiv\ \mathrm{N}x\mathrm{N}\delta\mathrm{N}\delta\mathrm{N}y\varphi.$$

$\varphi = P(x,y)$ とすれば, 命題 43, 44 で構成された論理式は命題 35 で構成された論理式と等価な論理式である.『論理哲学論考』では, 真理操作 N による論理体系が考案された. その論理体系では, 真理操作 N による論理式が量化文の解釈を表現している. ここで示した構成方法はその逆方向のアプローチである. すなわち, 量化子 N による論理体系を作り, 量化子 N による量化文が真理操作 N による論理式の解釈を表現している.

真理操作 N によって $\acute{\wedge}, \acute{\vee}, \neg$ を表現することができるように, 量化子 N によって, $\forall, \exists, \neg$ を表現することができる. これらの論理記号による論理体系は互いに等価な表現力を持っている[*47].

$$L(\mathrm{N}) \ \equiv \ L(\acute{\wedge}, \acute{\vee}, \neg) \ \equiv \ L(\forall, \exists, \neg) \ \equiv \ L(\mathrm{N}).$$

先行研究の Geach (1981)[3], Soames (1983) [5] では, 真理操作 N に変数記号を与えたものと, 本来の真理操作 N の両方を組み合わせて用いることによって論理式が構成された. そのとき, 本来の真理操作 N は否定を表現するために用いられている. 本稿では, ダミー変数を持つ量化子 N が否定を表現するため, 量化子 N だけを用いることによってこれらの論理式を構成することができる.

8 『論理哲学論考』で構成不可能な論理式

本節では,『論理哲学論考』で構成不可能な論理式について考察する.

8.1 『論理哲学論考』で構成不可能な 1 変数論理式

『論理哲学論考』で構成不可能な 1 変数論理式として次のようなものを考えることができる.

例 45. 命題形式 $\mathrm{PF}(p, O)$ を用いて, 次のような記号列を定義する.

$$\ldots OOOp \ \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ (p, O(p), O(O(p)), O(O(O(p))), \ldots)$$

このとき, $\ldots OOOp$ は論理式ではない. また, この記号列は継続的な長さを持たない.

このような記号列は論理式として帰納的に定義することができない. 同様に, その真理値を定めることができない. 仮にこの記号列の真理値をその要素の真理値の極限によって定義しても, その定義が必ずしもうまくいくとは限らない.

定義 46 (擬定義)**.** x の真理値を $v(x)$ とする. $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} = \mathrm{PF}(p, O)$ の真理値を次のように定義する. この定義はうまくいかない.

$$v((\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \lim_{n \to \infty} (v(\phi_n))_{n \in \mathbb{N}}.$$

例 47. p を要素命題とする. 記号列 $\ldots \neg\neg\neg p$ は真理値を持たない.

このような記号列は日常的な言語の表記で次のような文に相当する.

p ということはないということはないということはない ....

[*47] 左辺の N は真理操作 N を表し, 右辺の N は量化子 N を表している.

仮にこのような記号列を「要素命題に対する真理操作の無限重の継続的な適用の結果」であると考えたとしても, 記述 5.32 で有限であることが明言されているため,『論理哲学論考』の論理式として扱うことはできない. つまり, 記述 5.32 によって, このような記号列が論理体系から明示的に排除されることがわかる*48.

8.2　『論理哲学論考』で構成不可能な量化表現

『論理哲学論考』で構成不可能な量化表現として, 次のようなものが考えられる.

例 48. $\overline{\xi}$ が『論理哲学論考』で構成可能な任意の論理式の集合を表すと仮定する. このとき,

$$\overline{\xi} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \mid x \in W_n\}$$

とすると, $\mathrm{N}(\overline{\xi})$ はどの W_n にも属さない. すなわち, この $\mathrm{N}(\overline{\xi})$ は論理式ではない. また, この $\mathrm{N}(\overline{\xi})$ は継続的な長さを持たない.

操作の継続的な適用の結果は論理式が定義される順序に対応している. 本稿の概念を用いれば, この順序関係は論理式の継続的な長さの順序関係 $\leq$ である. 例 48 の擬似的な論理式は操作の継続的な適用の結果ではなく, このような順序関係を持たない.

また, 1 変数論理式の場合と同様に,

$$\ldots \mathrm{N}(\mathrm{N}(\mathrm{N}(X)))$$

のような記号列は構成不可能である. 一階述語論理の構造を持った論理式の場合は, 無限個の量化子を含むような記号列

$$\ldots \mathrm{N}x\mathrm{N}y\mathrm{N}z\varphi$$

が構成不可能である.

真理操作の継続的な適用の結果について, 記述 5.32 では有限性について言及されているが, 記述 6.001 では有限性について言及されていない. しかし, 有限性についての言及がなくても, 操作の継続的な適用の結果は常になんらかの自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対応している. このような $n \in \mathbb{N}$ が存在することが, 論理式が有限個の真理操作の継続的な適用の結果であることを意味している.

『論理哲学論考』の論理式の構成可能性は, 実際に有限の手順で書けるかどうかによって決定するのではない. たとえば, $\mathrm{N}(\mathrm{N}(\varphi_1), \mathrm{N}(\varphi_2), \ldots)$ と $\ldots \mathrm{N}(\mathrm{N}(\mathrm{N}(X)))$ はいずれも無限に長い記号列を表しており, これを実際に有限の手順で書くことは不可能である. しかし, 前者は構成可能であり, 後者は構成不可能である. 論理式の構成可能性は, 論理式が継続的な長さを持つかどうかによって決定する. すなわち, 操作の継続的な適用の結果であるかどうかによって決定する.

*48 野矢 (2006) [9] では,『新・論考』というものが考えられており,「『新・論考』では記述 5.32 は削除されてよい」と述べられている. しかし, 記述 5.32 は『新・論考』でも削除されるべきではないだろう.

8.3 非対称的な論理式

真理操作 N で構成できない論理式として, $\varphi \to \psi$ (i.e. φ ならば ψ) が挙げられる．この論理式の特徴は, 対称式でないこと (i.e. $\varphi \to \psi \not\equiv \psi \to \varphi$) である．『論理哲学論考』では, $\overline{\xi}$ という記号が項の順序がどうでもよい場合を仮定して定義されている．$\overline{\xi}$ という記号については記述 5.501 で次のように説明されている[*49][*50].

> 5.501　Einen Klammerausdruck, dessen Glieder Sätze sind, deute ich – wenn die Reihenfolge der Glieder in der Klammer gleichgültig ist – durch ein Zeichen von der Form „ $(\overline{\xi})$ “ an. „ ξ “ ist eine Variable, deren Werte die Glieder des Klammerausdruckes sind; und der Strich über der Variablen deutet an, dass sie ihre sämtlichen Werte in der Klammer vertritt.
> (Hat also ξ etwa die 3 Werte P, Q, R, so ist $(\overline{\xi}) = (P, Q, R)$.)

英語訳は次のとおりである[*51].

> 5.501　An expression in brackets whose terms are propositions I indicate – if the order of the terms in the bracket is indifferent – by a sign of the form “$(\overline{\xi})$”. “ξ” is a variable whose values are the terms of the expression in brackets, and the line over the variable indicates that it stands for all its values in the bracket.
> (Thus if ξ has the 3 values P, Q, R, then $(\overline{\xi}) = (P, Q, R)$.)

日本語訳は次のとおりである[*52].

> 5.501　命題をその項とする括弧づきの表現において括弧の中の順序はどうでもよい場合、私はその表現を “$(\overline{\xi})$” という形式の記号によって表示しよう。“ξ” は括弧づきの表現の項をその値とする変更である。そして変項の上の線は、変項が括弧の中の総ての値を代表することを、示している。
> (従って例えば ξ が三つの値 P, Q, R をとるならば、$(\overline{\xi}) = (P, Q, R)$。)

すなわち, $\overline{\xi}$ は順序づけられた論理式の組や列ではなく, 論理式の集合を表している．したがって, $\overline{\xi}$ を項とする真理操作 N による論理式は対称式でなければならない.

$$\mathrm{N}(\varphi, \psi) \;\equiv\; \mathrm{N}(\psi, \varphi).$$

---

*49 ここで引用されているものは記述 5.501 の一部である.

*50 英語訳の “bracket” はドイツ語原文の “Klammer” の訳語である．“Klammer” は日本語の「かっこ」と同様に, かっこの種類を問わずに用いられる．“bracket” は, 特にアメリカ英語では, 角かっこを意味する語として用いられる．ここでは, 丸かっこを意味する語として用いられている.

*51 英語訳は Ramsey and Ogden (1922) [4] による.

*52 日本語訳は奥 (1975) [7] による．本稿は一部の改行を省略して引用している.

しかし, 対称式でない論理式は真理操作の項の順序がどうでもよくない論理式である. したがって, そのような論理式を構成するためには, 真理操作の項の順序を定める必要がある.

9 あとがき

本稿が引用している『論理哲学論考』のドイツ語原文と英語訳は Kevin C. Klement 氏による *Ludwig Wittgenstein: Tractatus Logico-Philosophicus Side-by-Side-by-Side Edition* [4] に基づいている.

本稿に関する情報は URL に掲載している.

最後に, この論文を親友に捧げる.

参考文献

[1] Connelly, J. R. *On Operator N and Wittgenstein's logical philosophy.* Journal for the History of Analytical Philosophy (Volume 5, Number 4, 2017). (DOI: `https://doi.org/10.15173/jhap.v5i4.2963`). 2017.

[2] Fogelin, R. J. *Wittgenstein* (Second edition). Routledge & Kegan Paul. 1987. The original work was published in 1976.

[3] Geach, P. T. *Wittgenstein's Operator N.* Analysis (Volume 41, Issue 4, October 1981, pp. 168–171). (DOI: `https://doi.org/10.1093/analys/41.4.168`). 1981.

[4] Klement, K. C. *Ludwig Wittgenstein: Tractatus Logico-Philosophicus Side-by-Side-by-Side Edition* (Version 0.69, September 2, 2025). (Available at: `https://people.umass.edu/klement/tlp/`). 2025. (The original German work by Ludwig Wittgenstein was first published in 1921; an edition including an English translation by F. P. Ramsey and C. K. Ogden was published by Kegan Paul in 1922.)

[5] Soames, S. *Generality, truth functions, and expressive capacity in the Tractatus.* The Philosophical Review (Volume 92, Number 4, October 1983, pp. 573–589). (DOI: `https://doi.org/10.2307/2184881`). 1983.

[6] 飯田隆『言語哲学大全 II 意味と様相 (上)』. 勁草書房. 1989.

[7] 奥雅博『ウィトゲンシュタイン全集１』. 大修館書店. 1975.

[8] 野矢茂樹『論理哲学論考』. 岩波書店. 2003.

[9] 野矢茂樹『ウィトゲンシュタイン『論理哲学論考』を読む』. 筑摩書房. 2006.

[10] 若山和宏『『論理哲学論考』の量化表現に関する考察』. 名古屋外国語大学, 2018 年度修士論文 (未公刊). 2019.